Mecánica de Hilos y Cables

Física Aplicada a la Ingeniería

Mª Victoria Carbonell

Curso 06/07

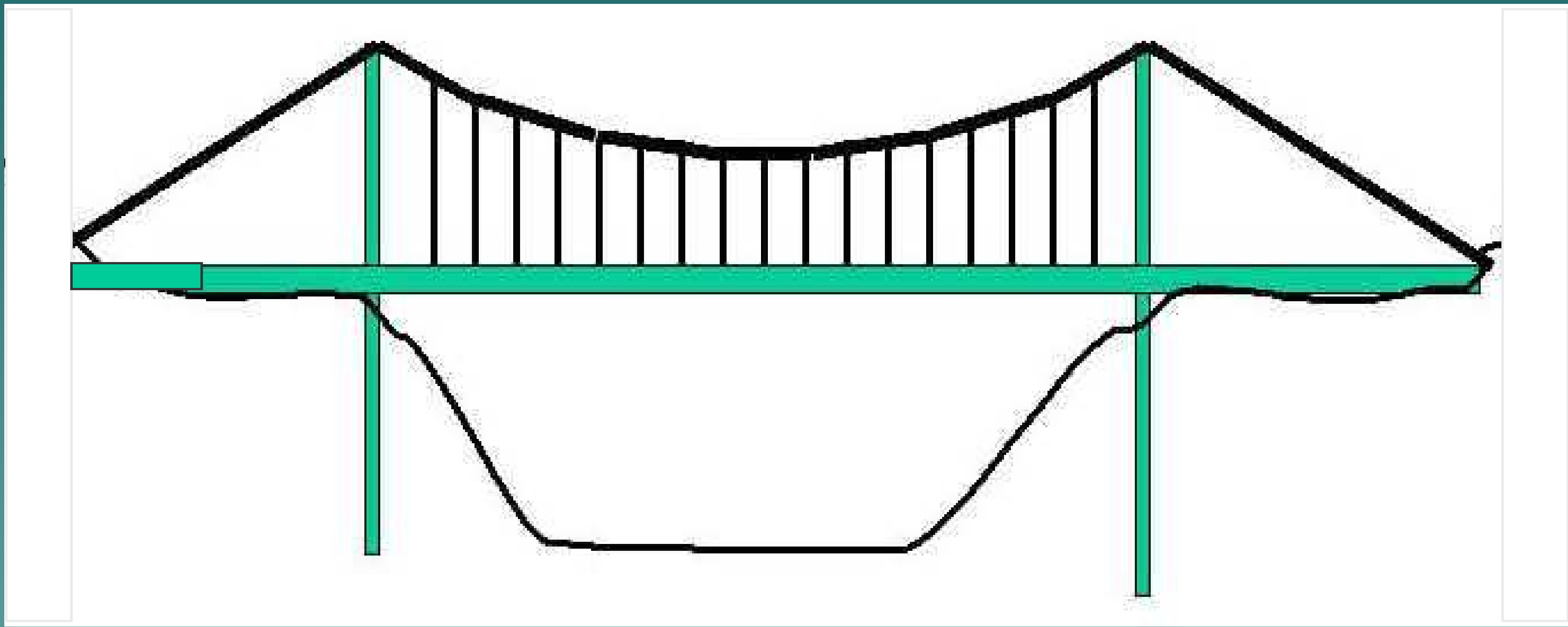
Las imágenes de la presentación han sido obtenidas del libro:

Physics for Scientists and Engineers
Paul A. Tipler • Gene Mosca

Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
  - Ecuaciones cartesianas
  - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
  - Parábola de puente colgante

Puente Colgante



Programa

Conceptos fundamentales

Ecuación vectorial del equilibrio de hilos

- Ecuaciones cartesianas
- Ecuaciones intrínsecas

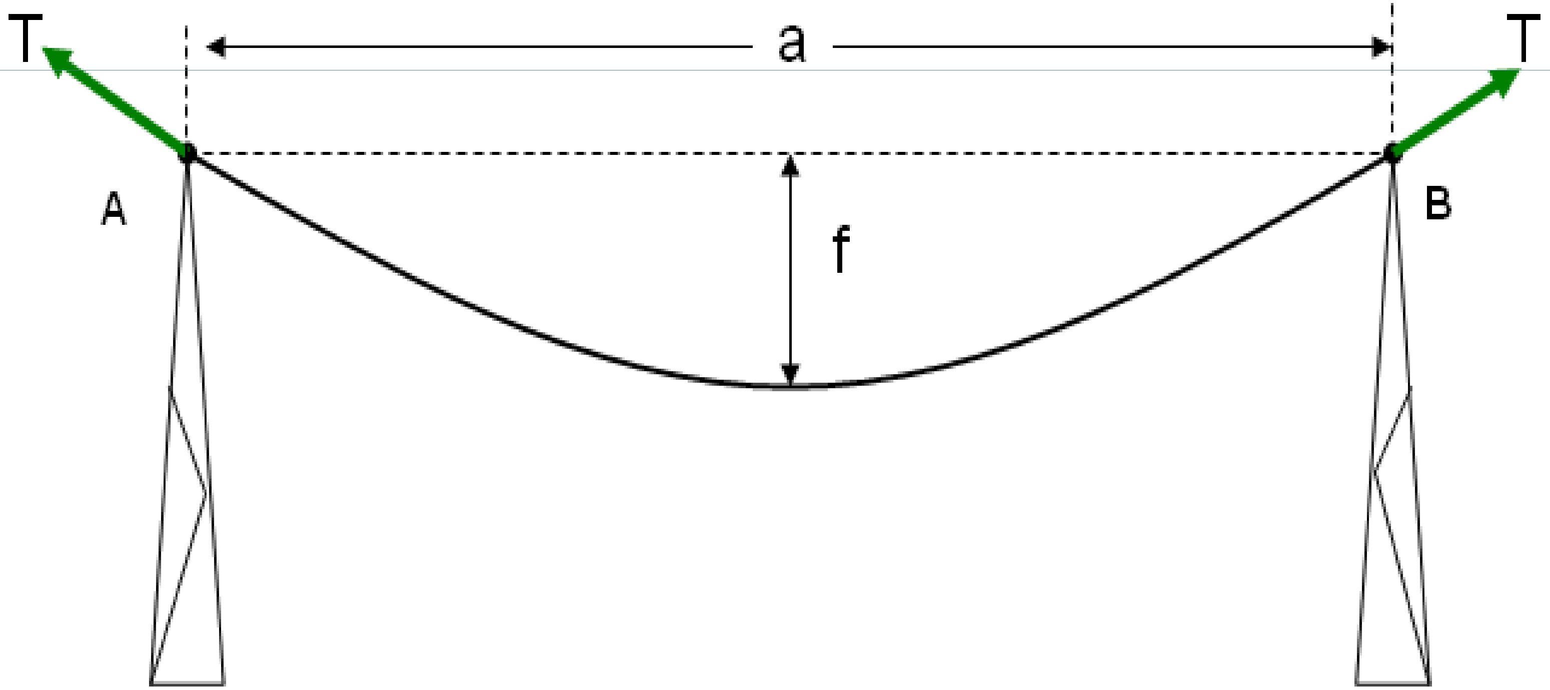
Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas

Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas

- Parábola de puente colgante
- Catenaria

Catenaria

f: flecha   a: vano   A, B: puntos de amarre



Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
  - Ecuaciones cartesianas
  - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
  - Parábola de puente colgante
  - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
  - Lisas
  - Rugosas: cabrestante

Objetivos

- Estudiar el equilibrio de sistemas estructurales de gran importancia y aplicación en ingeniería: hilos y cables

- Conocer los conceptos de hilo y tensión

- Establecer las condiciones del equilibrio de un hilo referido a un sistema de ejes cartesianos y a un sistema de ejes centrados en cada punto del hilo (ecuaciones intrínsecas)

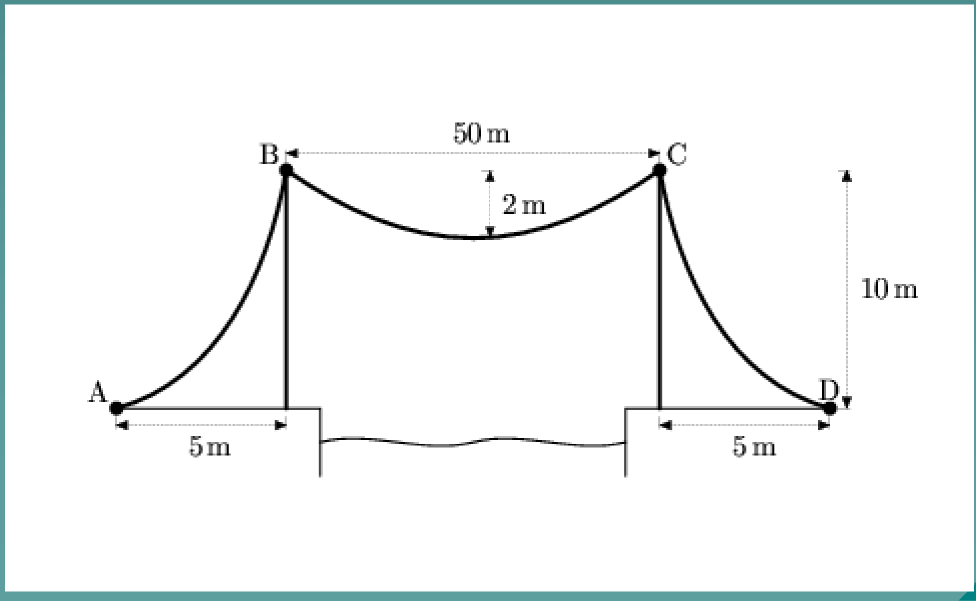
- Aplicar las condiciones del equilibrio en el caso particular de fuerzas paralelas
    - parábola de puente colgante
    - catenaria

- Estudiar el equilibrio de hilos apoyados sobre superficies lisas y superficies rugosas, aplicación: cabrestante, amarres, frenos….

Conceptos Previos

Hilo: una de las estructuras más importante en los proyectos de construcción, ya que va a soportar el peso de las otras partes y transmitirlo hasta la cimentación o apoyos correspondientes.

Hilo: sistema estructural unidimensional delgado que trabaja sometido a momentos flectores pequeños.



Concepto de Hilo

Sistema material

Continuo distancia entre dos puntos cualesquiera es infinitesimal

Deformable bajo estímulos externos cambia de forma o configuración

Unidimensional curva o línea geométrica

Flexible no existen fuerzas interiores que se opongan a la flexión

Torsionable no existen fuerzas interiores que se opongan a la torsión

Inextensible la longitud es constante

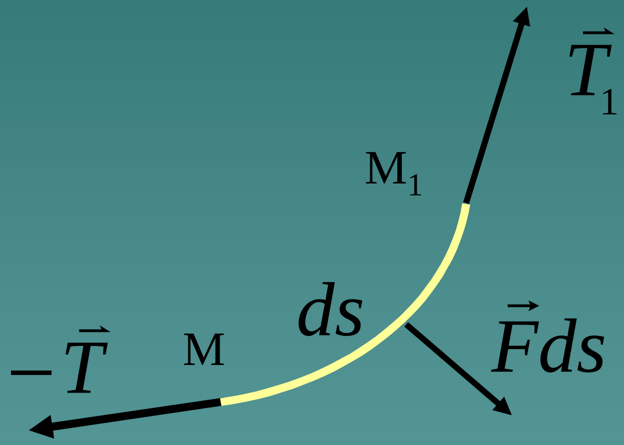
no sufre alargamiento

No tiene elasticidad

Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
  - Ecuaciones cartesianas
  - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
  - Parábola de puente colgante
  - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
  - Lisas
  - Rugosas: cabrestante

Ecuación vectorial del equilibrio de Hilos



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_P = \vec{0}$$

$$\vec{F} + \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$$

$$\vec{F}ds + d\vec{T} = \vec{0}$$

Ecuaciones cartesianas del equilibrio de Hilos

$$\left.\begin{aligned} X+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)&=0\\ Y+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)&=0\\ Z+\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right)&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$Xds+d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

$$Yds+d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0$$

$$Zds+d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=0$$

$$\vec{F}+\frac{d\vec{T}}{ds}=\vec{0}$$

$$\vec{F}ds+d\vec{T}=\vec{0}$$

Ecuaciones cartesianas del equilibrio de Hilos

Casos Particulares:

- Si la fuerza es perpendicular a un eje, la proyección de la tensión sobre ese eje es constante

$$\vec{F} = Y\,\vec{j} \Rightarrow paralelo\,OY;\ perpendicular\,OX \Rightarrow X = 0$$

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0;\ T\frac{dx}{ds} = Cte;\ \ T_x = T\cos\alpha = Cte$$

$$\boxed{\vec{T}\cdot\vec{u} = Cte}$$

- Si la fuerza es paralela a un eje, el momento de la tensión respecto a ese eje es constante

$$\boxed{\vec{T}\wedge\vec{u} = Cte}$$

Ecuaciones cartesianas del equilibrio de Hilos

Caso general:

La fuerza *F* depende de la posición, de la orientación del elemento diferencial *ds* en el espacio y de la posición de *ds* sobre la curva de equilibrio

$$\begin{cases} -x, y, z \\ -\dfrac{dx}{ds}; \dfrac{dy}{ds}; \dfrac{dz}{ds} \\ -s \end{cases}$$

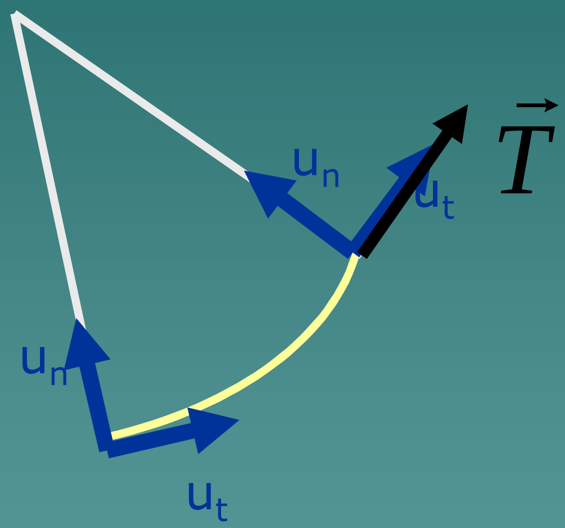
Condición geométrica:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

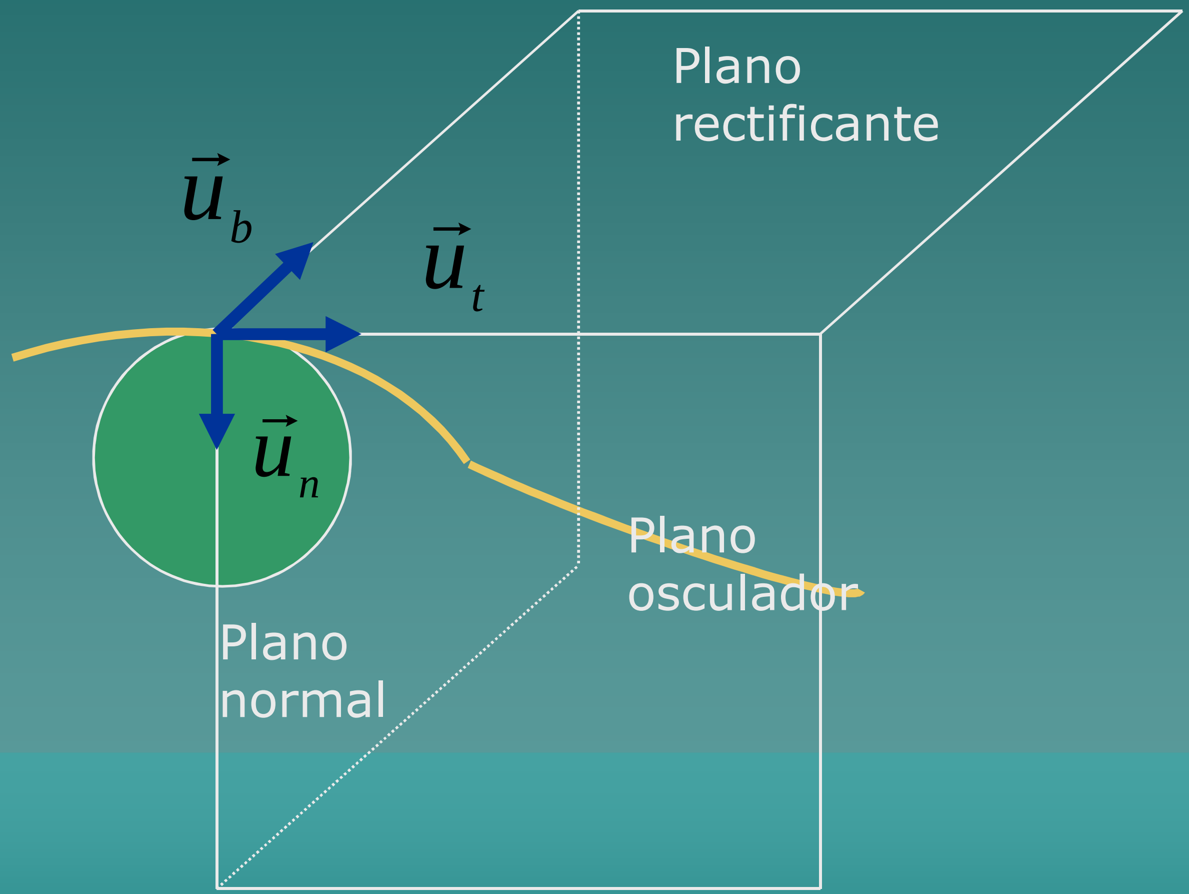
Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
    - Ecuaciones cartesianas
    - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
    - Parábola de puente colgante
    - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
    - Lisas
    - Rugosas: cabrestante

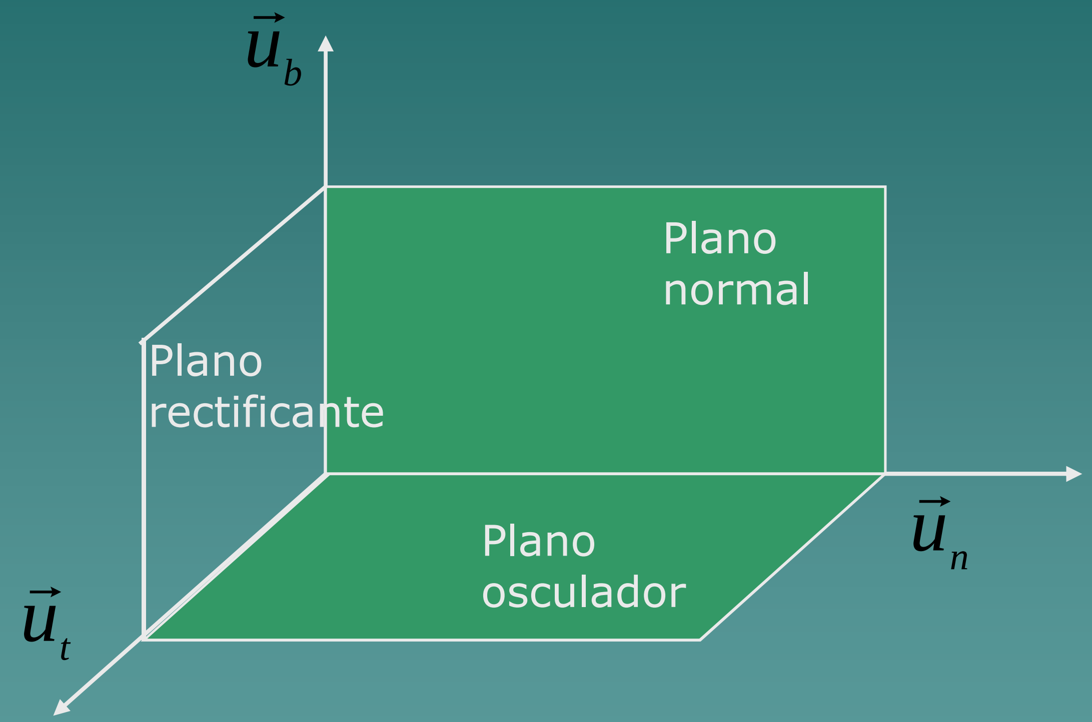
Triedro de Frenet



Triedro de Frenet



Triedro de Frenet



Fórmulas de Frenet

$$\vec{u}_b = \vec{u}_t \wedge \vec{u}_n$$

$$\vec{u}_t = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

$$\vec{u}_n = \rho\left[\frac{d^2x}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}\right] = \rho\frac{d\vec{u}_t}{ds}$$

$$\frac{d\,\vec{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{u}_n$$

Ecuaciones intrínsecas del equilibrio de Hilos

$$\left.\begin{aligned} F_t + \frac{dT}{ds} &= 0 \\ F_n + \frac{T}{\rho} &= 0 \\ F_b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$F_t = -\frac{dT}{ds}$$

$$F_n = -\frac{T}{\rho}$$

$$F_b = 0$$

Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
    - Ecuaciones cartesianas
    - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
    - Parábola de puente colgante
    - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
    - Lisas
    - Rugosas: cabrestante

Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas

Ecuación vectorial del equilibrio de hilos

$$\vec{F} + \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0} \qquad \vec{F} d\vec{r} + \frac{d\vec{T}}{ds} d\vec{r} = \vec{0}$$

$$\vec{F} d\vec{r} + d\vec{T}\,\vec{u}_t = \vec{0}$$

Si las fuerzas derivan de un potencial $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

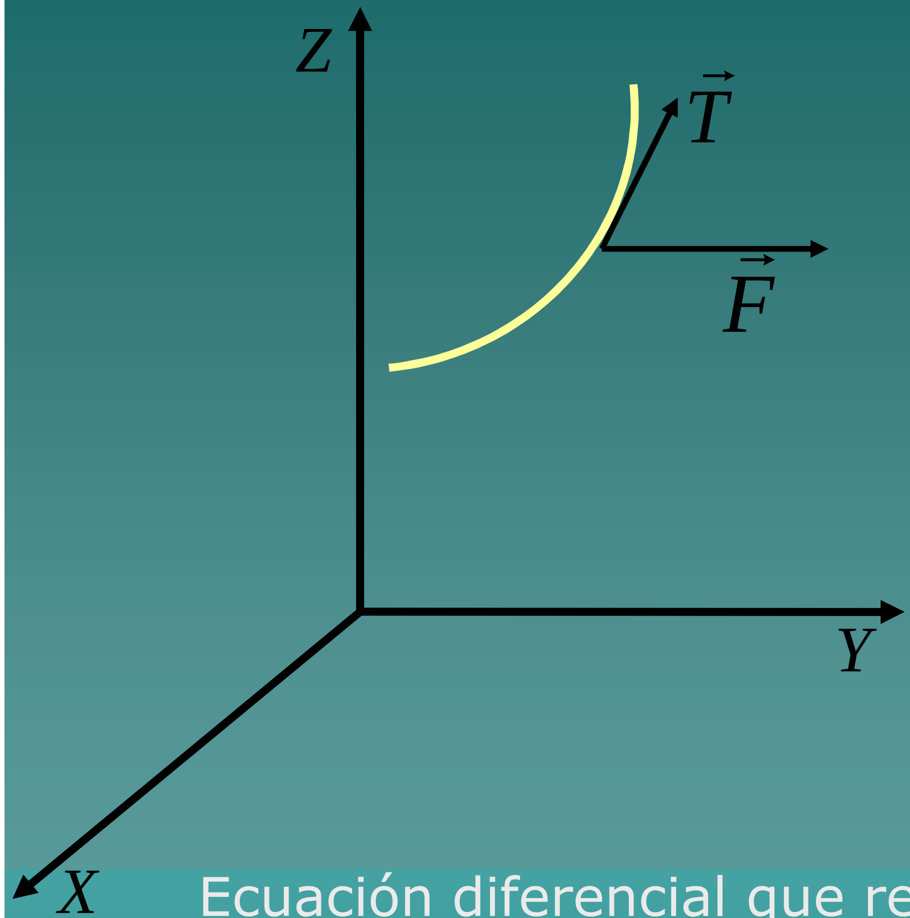
$$-dU + dT = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{T = U + Cte}$$

Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
  - Ecuaciones cartesianas
  - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
  - Parábola de puente colgante
  - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
  - Lisas
  - Rugosas: cabrestante

Fuerzas Paralelas



Fuerza paralela al eje OY

$$\vec{F} = Y\,\vec{j}$$

Proyección de la tensión sobre el eje OX constante

$$T_x = Cte$$

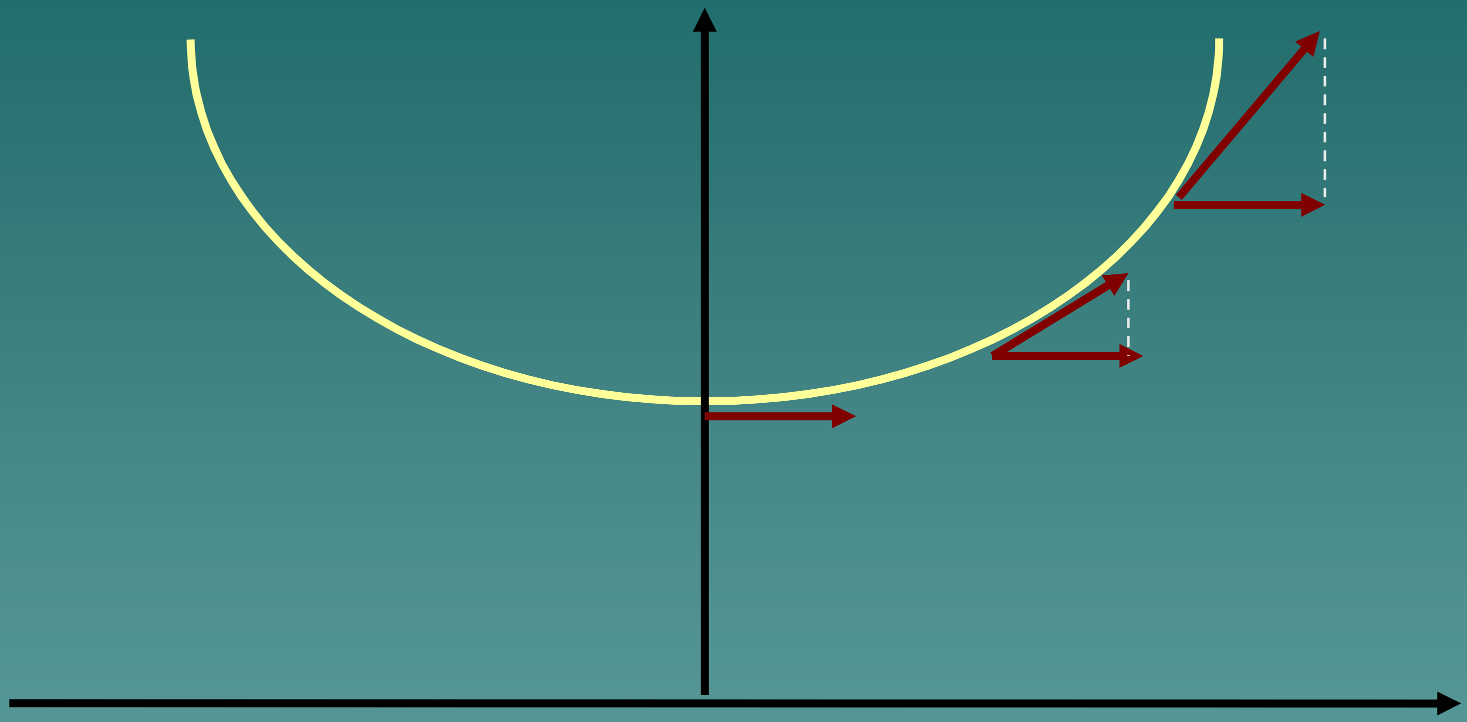
La figura de equilibrio es plana

$$Cz - C_1 x = C_2$$

Ecuación diferencial que resuelve el equilibrio:

$$Cdy' + Yds = 0$$

Fuerzas Paralelas



Proyección de la tensión sobre el eje OX constante

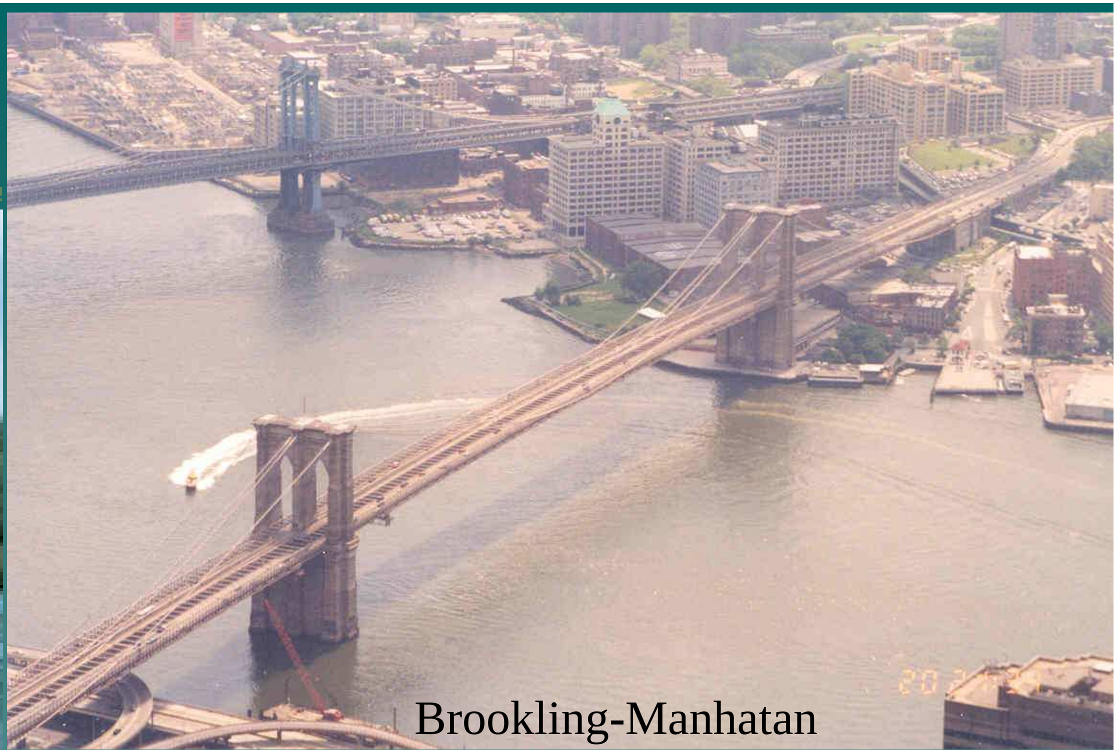
$$T_x = Cte$$

Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
  - Ecuaciones cartesianas
  - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
  - Parábola de puente colgante
  - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
  - Lisas
  - Rugosas: cabrestante

Puente Colgante Cuenca

Puente Colgante



Brookling-Manhatan

Santa Fe (Argentina)

Puente Colgante

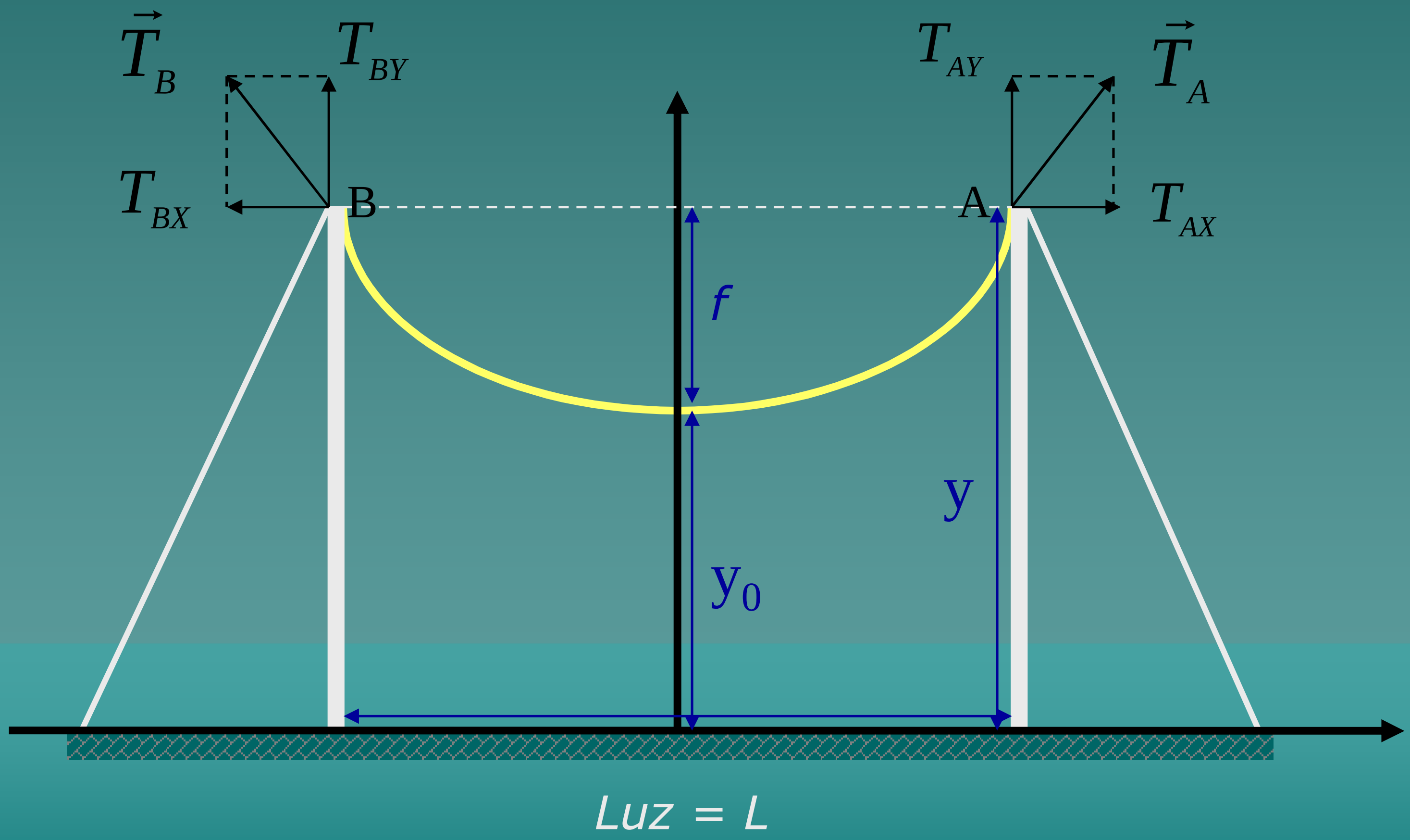
Olafsund

Puente Colgante

Vizcaya

Puente Colgante

Carga q distribuida uniformemente según la horizontal

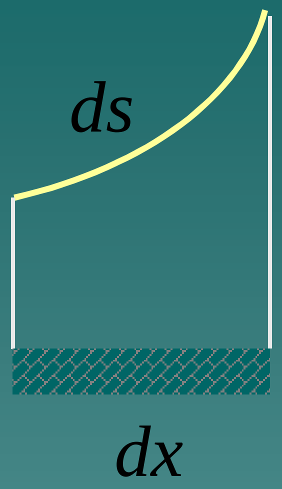


Puente Colgante

$$\vec{F} = Y\,\vec{j}$$

$$Yds = -qdx$$

$$T\cos\alpha = C = T_0$$



Ecuación diferencial que resuelve el equilibrio:

$$Cdy' + Yds = 0 \qquad dy' = \frac{q}{T_0}dx \qquad y' = \frac{q}{T_0}x$$

$$\int_{y_0}^{y} dy = \frac{q}{T_0}\int_0^x xdx$$

$$\boxed{y - y_0 = \frac{q}{2T_0}x^2}$$

Puente Colgante: Tensiones

$$\left.\begin{aligned} \vec{T}_A &= T_{AX}\vec{i} + T_{AY}\vec{j} \\ \vec{T}_B &= -T_{BX}\vec{i} + T_{BY}\vec{j} \end{aligned}\right\}$$

$$T_A = T_B = T_{máx}$$

$$T_0 = T_{mín}$$

$$T_{AX} = T_{BX} = T_0$$

$$T_{AY} = T_{BY} = q\frac{L}{2}$$

$$T = T_0\sqrt{1+\left(\frac{qL}{T_0 2}\right)^2}$$

Puente Colgante: Tensiones

$$T\cos\alpha = T_0; \qquad T = \frac{T_0}{\cos\alpha}; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$tg\alpha = y' = \frac{q}{T_0}x \qquad T = T_0\sqrt{1+y'^2}$$

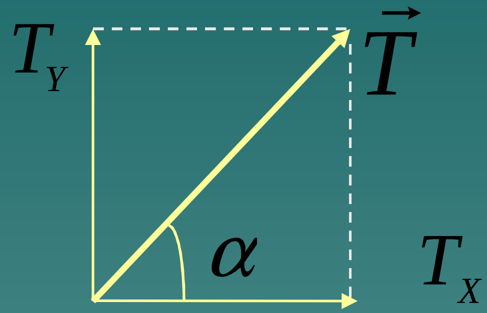
Para x=L/2 Puntos A, B

$$T = T_0\sqrt{1+\left(\frac{qL}{T_0 2}\right)^2}$$

$$T = \sqrt{T_X^2 + T_Y^2}$$

Puente Colgante: Tensiones

Cálculo vectorial



$$T_X = T\cos\alpha = T_0$$

$$T_Y = T\,sen\alpha$$

$$T = \sqrt{T_X^2 + T_Y^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_X = \sqrt{T^2 - T_Y^2} \\ T_Y = \sqrt{T^2 - T_X^2} \end{cases}$$

$$tg\alpha = y' = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{T sen\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{T_Y}{T_X}$$

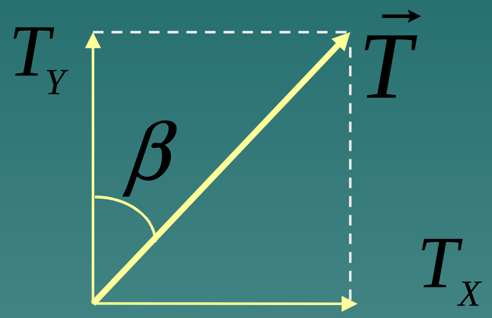
Puente Colgante: Tensiones

Cálculo vectorial

$$T_X = T\,sen\beta = T_0$$

$$T_Y = T\cos\beta$$

$$T = \sqrt{T_X^2 + T_Y^2}$$



$$tg\,\alpha = y' = \frac{sen\beta}{\cos\beta} = \frac{T\,sen\beta}{T\cos\beta} = \frac{T_X}{T_Y}$$

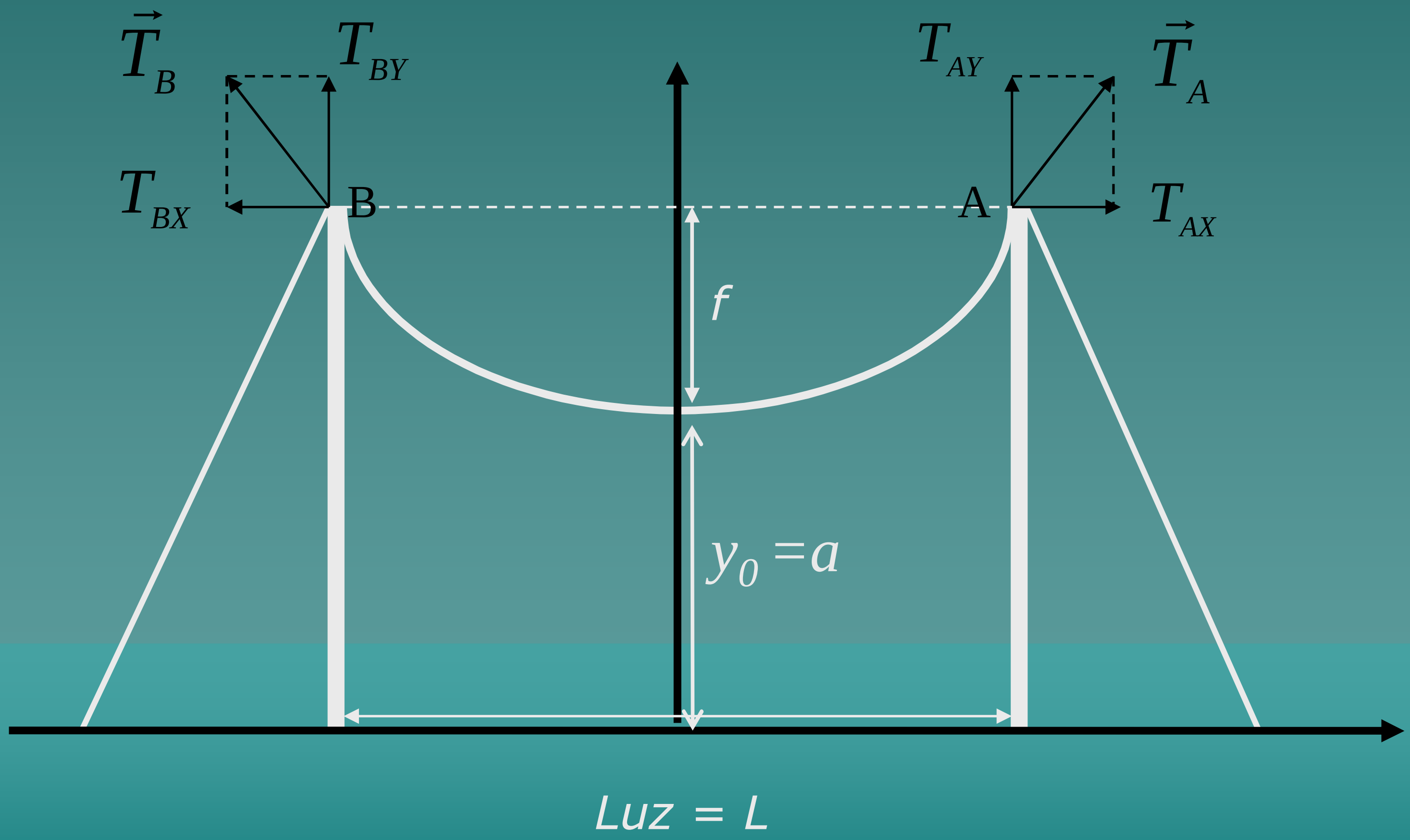
Programa

- Conceptos fundamentales
- Ecuación vectorial del equilibrio de hilos
  - Ecuaciones cartesianas
  - Ecuaciones intrínsecas
- Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas
- Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas
  - Parábola de puente colgante
  - Catenaria
- Equilibrio de hilo sobre superficies
  - Lisas
  - Rugosas: cabrestante

Catenaria

Catenaria

Consideramos el peso del hilo por unidad de longitud: p (N/m)



Funciones Hiperbólicas

$$Shx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$Chx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$Ch^2 x - Sh^2 x = 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = ArgShx + C$$

$$\vec{F} = Y\,\vec{j}$$

$$Y = -p$$

$$T\cos\alpha = C = T_0$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Ecuación diferencial que resuelve el equilibrio:

$$C\,dy' + Y\,ds = 0 \qquad dy' = \frac{p}{T_0}\,ds \qquad dy' = \frac{p}{T_0}\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

$$T_0 = p\,a \qquad \int_0^{y'} \frac{dy}{\sqrt{1 + y'^2}} = \int_0^x \frac{dx}{a}$$

$$y' = Sh\frac{x}{a} \qquad \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^x Sh\frac{x}{a}\,dx$$

$$\boxed{y = aCh\frac{x}{a}}$$

Catenaria: Tensiones

$$T\cos\alpha = T_0; \qquad T = \frac{T_0}{\cos\alpha}; \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,\alpha}}$$

$$\left.\begin{aligned} tg\,\alpha &= y' = Sh\frac{x}{a} \\ y &= aCh\frac{x}{a} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} T &= T_0\sqrt{1+Sh^2\frac{x}{a}} = T_0 Ch\frac{x}{a} \\ T &= T_0\frac{y}{a} = py \end{aligned}$$

$$T = \sqrt{T_X^2 + T_Y^2}$$

$$T = py$$

$$T_y = ps$$

$$T_0 = pa$$

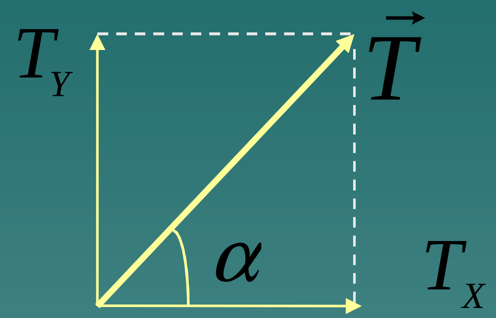
$$s_{AB} = s_{total} = 2s$$

Catenaria: Tensiones

Cálculo vectorial

$$T_X = T\cos\alpha = T_0$$

$$T_Y = T\,sen\alpha$$



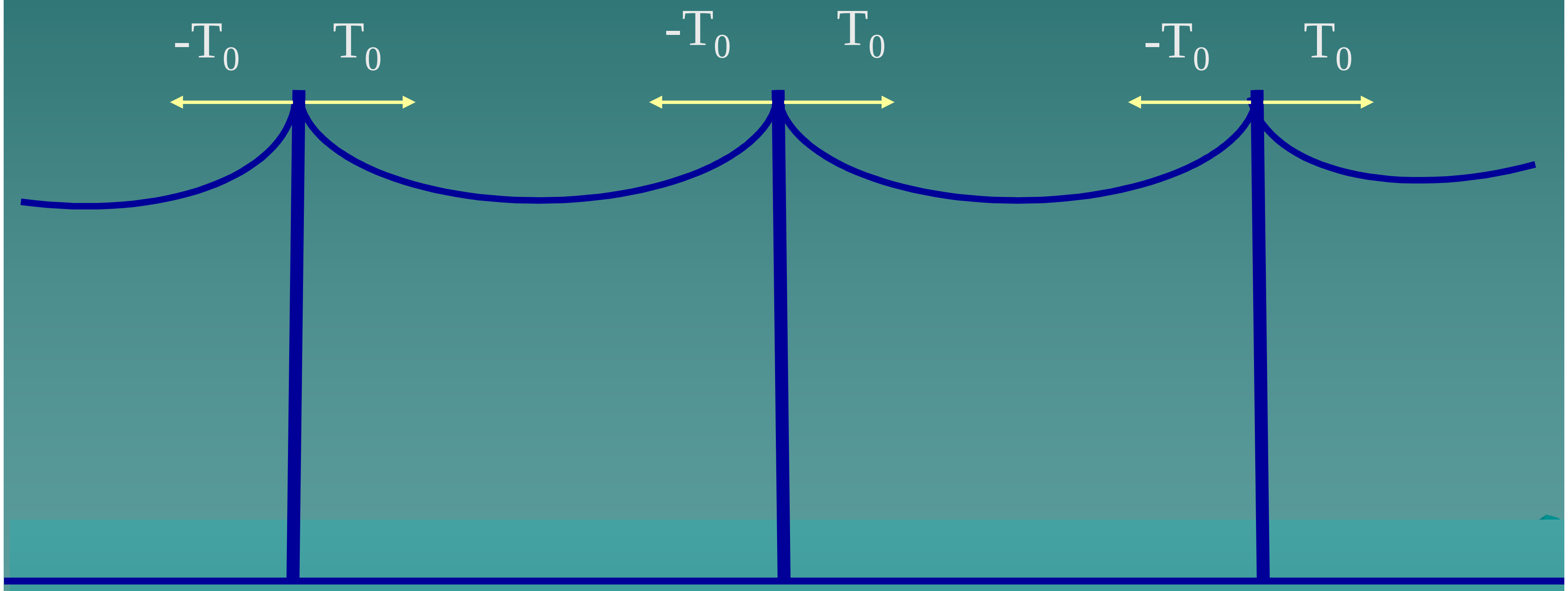
$$T = \sqrt{T_X^2 + T_Y^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_X = \sqrt{T^2 - T_Y^2} \\ T_Y = \sqrt{T^2 - T_X^2} \end{cases}$$

$$tg\alpha = y' = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{Tsen\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{T_Y}{T_X}$$

Catenaria : tendido eléctrico

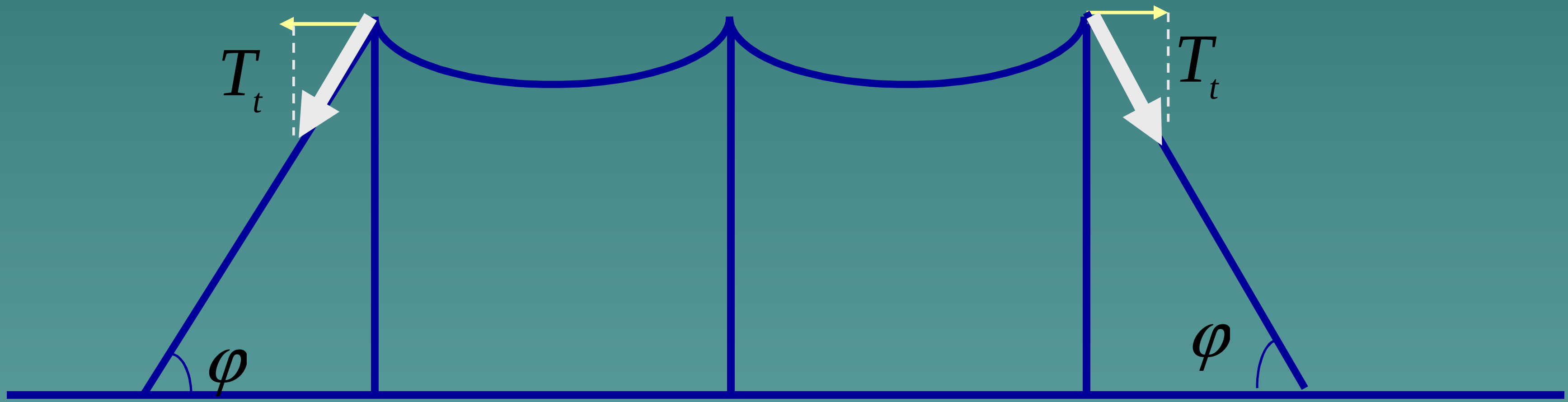
Las componentes horizontales de la tensión se anulan



Catenaria : tendido eléctrico

Las componentes horizontales de la tensión se anulan, excepto en los extremos:

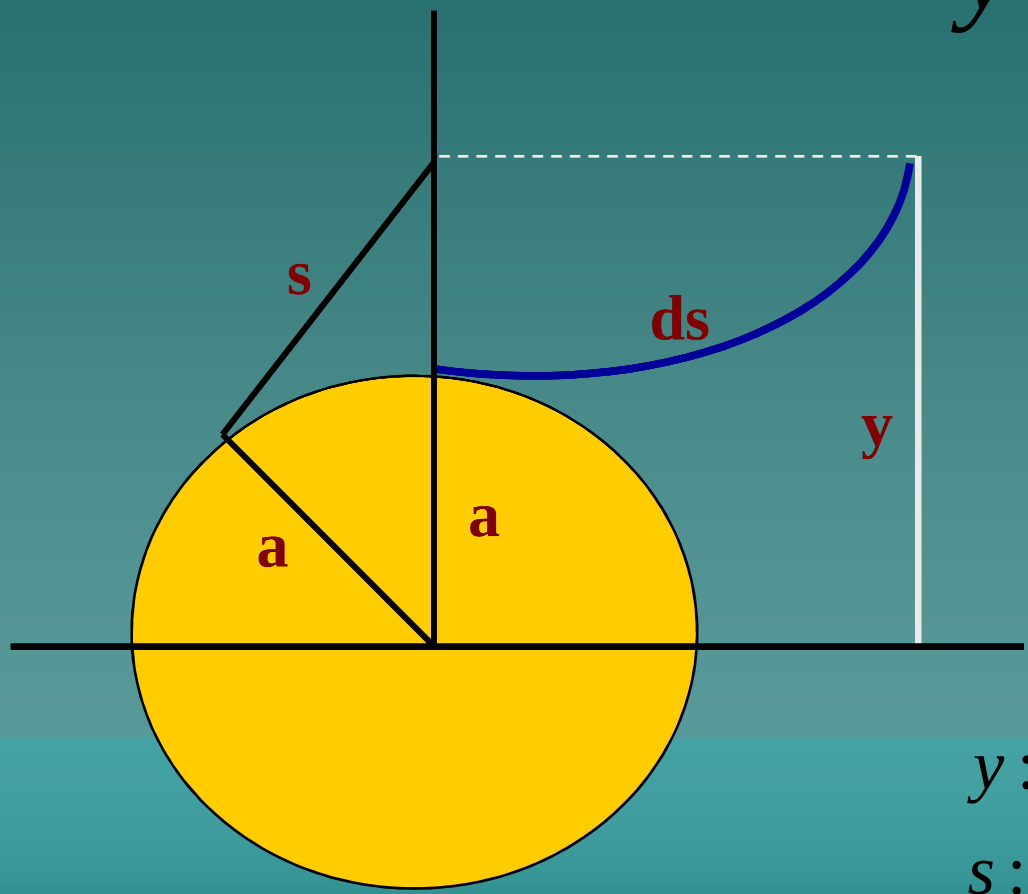
tirantes



$$\left.\begin{aligned} T_{tx} &= T_0 \\ T_{tx} &= T_t \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad T_t = \frac{T_0}{\cos\varphi}$$

Catenaria: cálculo del arco

$$y^2 = a^2 + s^2$$



y : *altura*

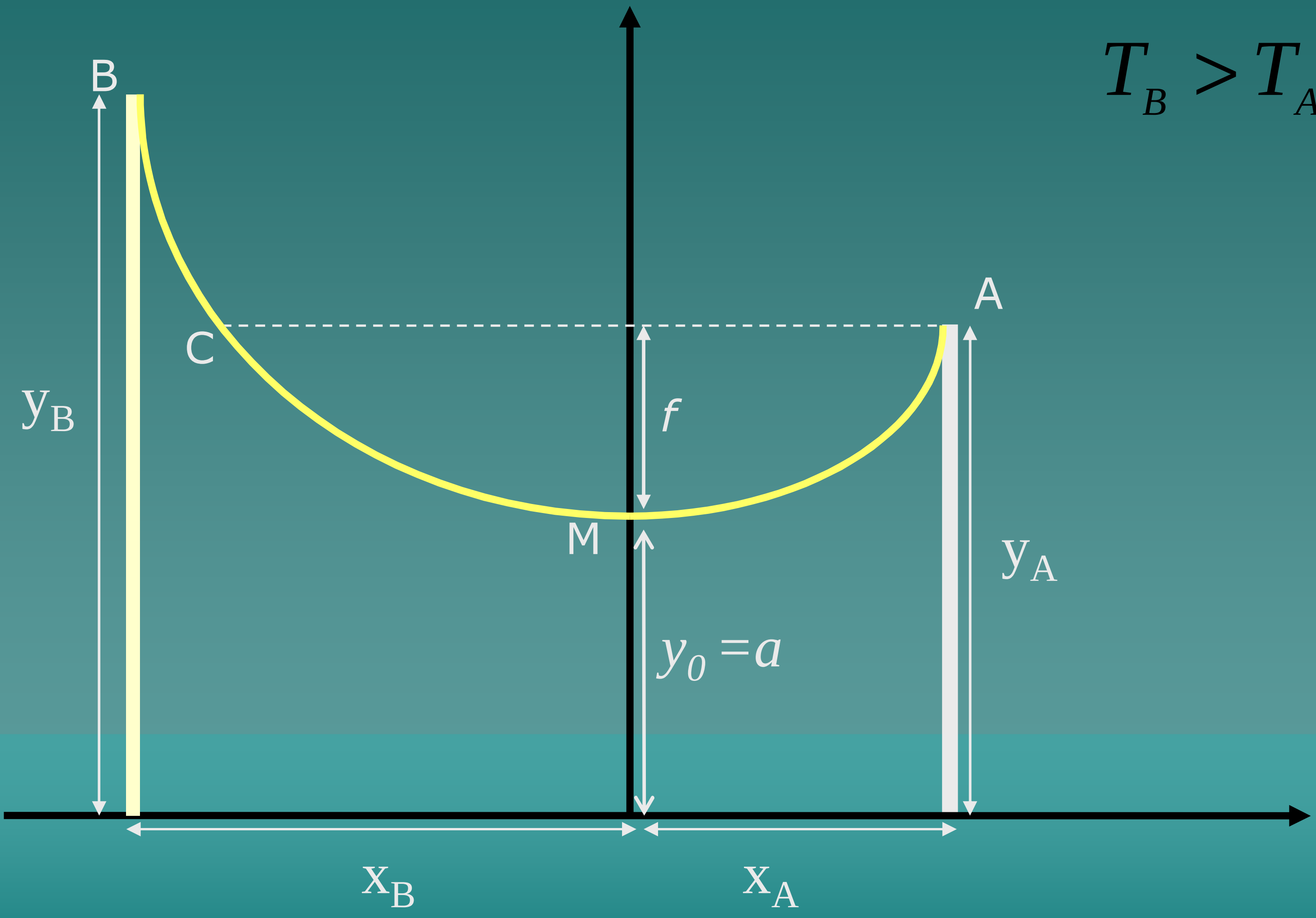
s : *longitud del semiarco*

a : *parámetro catenaria*

Catenaria Asimétrica

$$T_A = T_C$$

$$T_B > T_A$$



Catenaria Asimétrica

$$T_A = p y_A$$

$$T_B = p y_B$$

$$T_M = T_0 = pa$$

$$T_{Ax} = T_{Bx} = T_0 = T_{mín}$$

$$T_{Ay} = p s_{AM}$$

$$T_{By} = p s_{MB}$$

$$s_{AB} = s_{total} = s_{AM} + s_{MB}$$

$$y_A^2 = a^2 + s_{AM}^2$$

$$y_B^2 = a^2 + s_{MB}^2$$

$$y_A = a Ch \frac{x_A}{a}$$

$$y_B = a Ch \frac{x_B}{a}$$

Programa

Conceptos fundamentales

Ecuación vectorial del equilibrio de hilos

- Ecuaciones cartesianas
- Ecuaciones intrínsecas

Equilibrio de hilo: fuerzas conservativas

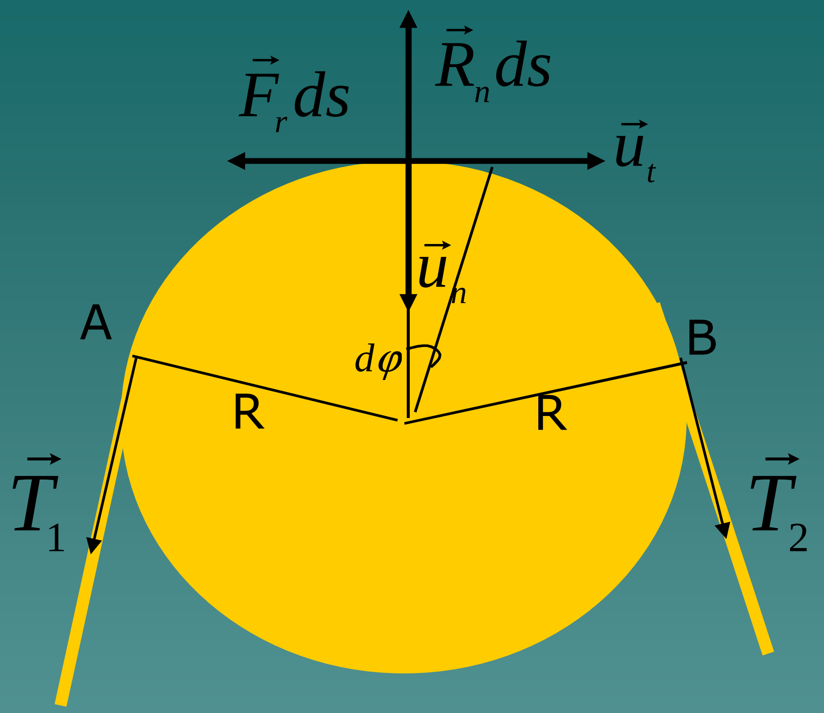
Equilibrio de hilo: fuerzas paralelas

- Parábola de puente colgante
- Catenaria

Equilibrio de hilo sobre superficies

- Lisas
- Rugosas: cabrestante

Equilibrio sobre una superficie con rozamiento



Equilibrio estricto: A →B

$$\vec{T}_2 = \vec{T}_1 + \vec{F}_r ds + \vec{R}_n ds$$

$$\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_r = -\left|\vec{F}_r\right|\vec{u}_t$$

$$\vec{R}_n = -\left|\vec{R}_n\right|\vec{u}_n$$

$$\vec{F}_r + \vec{R}_n = \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$$

Ecuación diferencial del equilibrio

Equilibrio sobre una superficie con rozamiento

$$-\left|\vec{F}_r\right|\vec{u}_t-\left|\vec{R}_n\right|\vec{u}_n+\frac{dT}{ds}\vec{u}_t+\frac{T}{R}\vec{u}_n=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dT}{ds}=\left|\vec{F}_r\right|=\mu\left|\vec{R}_n\right| \\ \dfrac{T}{R}=\left|\vec{R}_n\right|\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}\dfrac{dT}{ds}=\mu\dfrac{T}{R} \\ \dfrac{dT}{T}=\dfrac{\mu}{R}ds\end{array}$$

$$ds=Rd\rho$$

$$\frac{dT}{T}=\mu d\varphi \qquad \ln\frac{T}{T_0}=\mu\varphi$$

$$\boxed{T=T_0e^{\mu\varphi}}$$

Equilibrio sobre una superficie con rozamiento

$$T = T_0 e^{\mu\varphi}$$

Ejemplo:

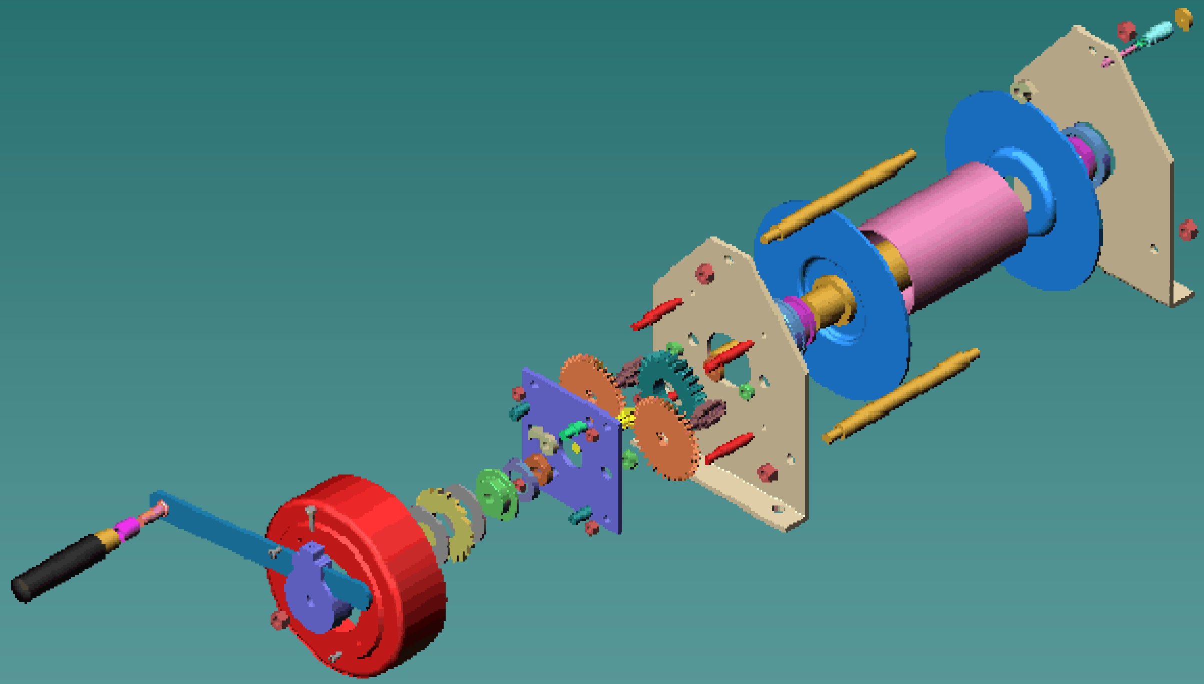
$$\mu = 0{,}5$$
$$n = 3 vueltas$$
$$\varphi = 2\pi n = 6\pi$$

$$T = T_0 e^{3\pi} = 12.000\, T_0$$

$$1N \Rightarrow 12.000\, N$$
$$1W \Rightarrow 12.000\, W$$

Cabrestante

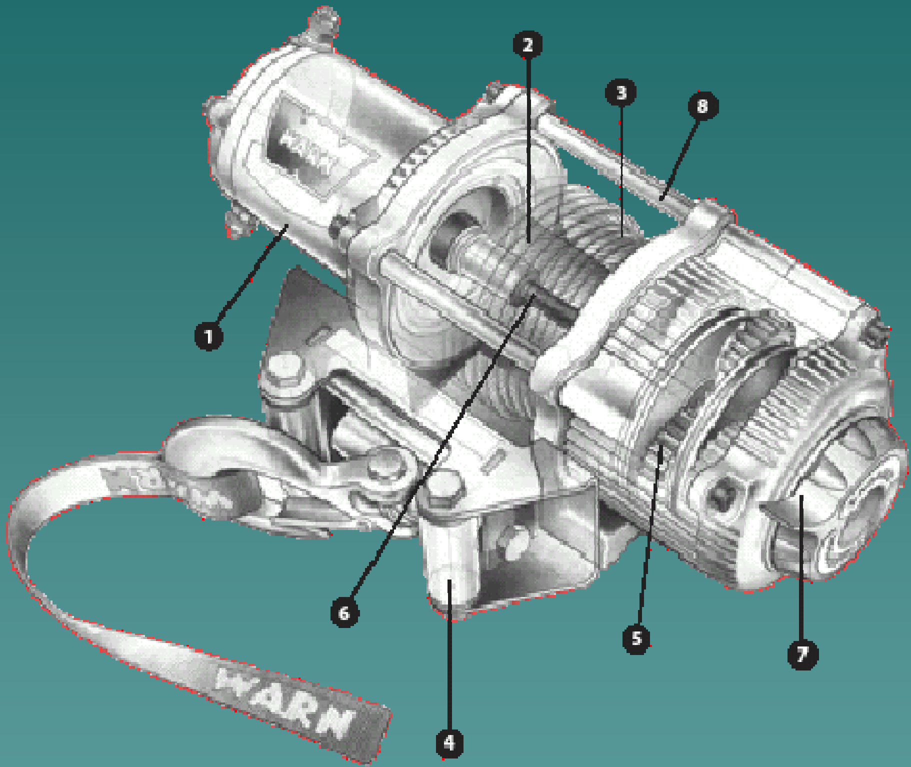
Cabrestante



Cabrestante

Cabrestante

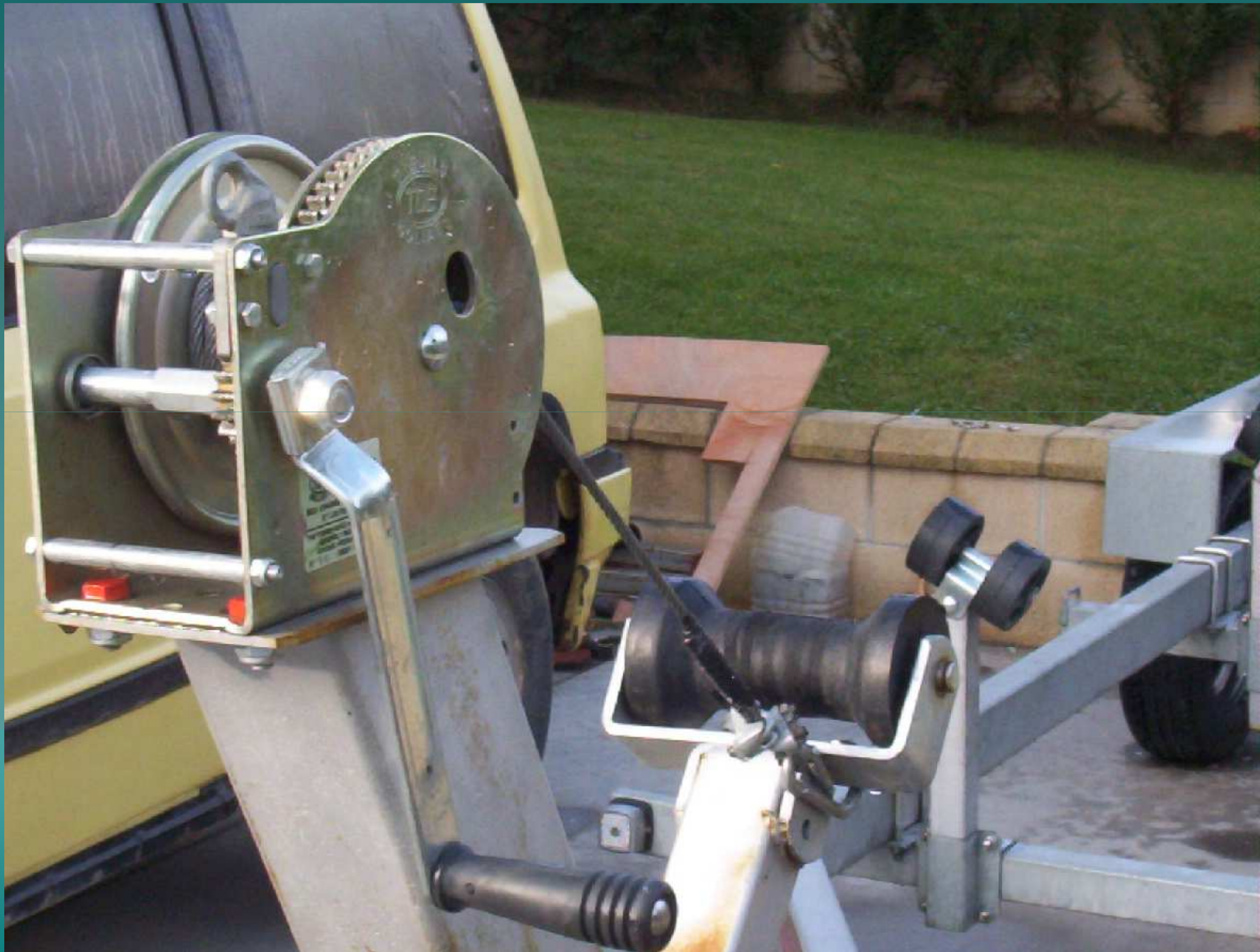
Cabrestante



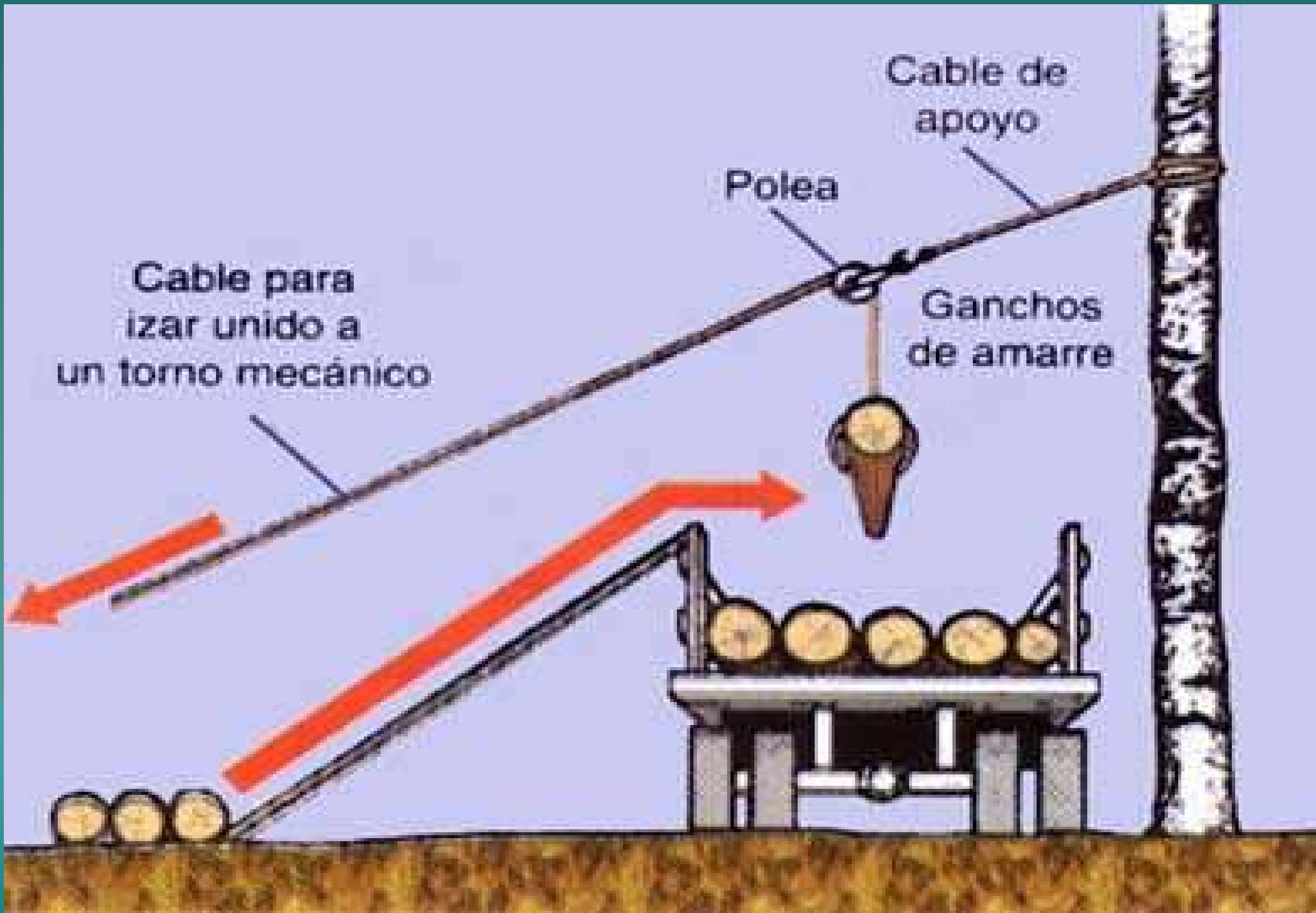
Cabrestante

Cabrestante

Cabrestante

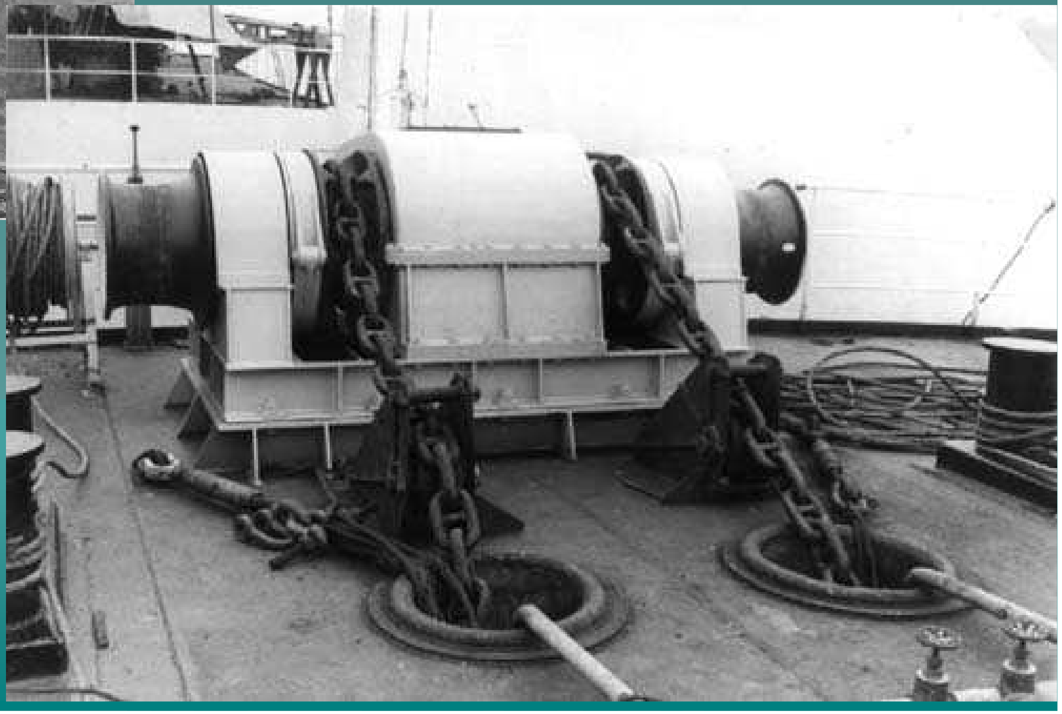


Aplicación Ingeniería Agroforestal



Aplicación Ingeniería Agroforestal

Aplicación Ingeniería Naval



Cabrestante

Aplicación Ingeniería Naval




Aplicación Ingeniería Naval