TEORÍA DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS

1. INTRODUCCIÓN

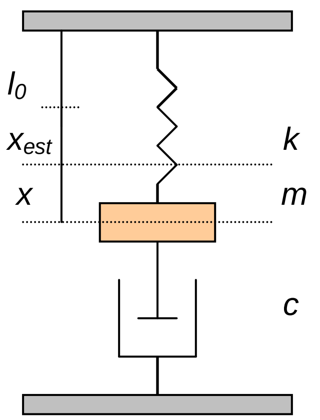
Movimiento vibratorio o vibración es la variación o cambio de configuración de un sistema en relación al tiempo, en torno a una posición de equilibrio estable, su característica fundamental es que es periódico, siendo frecuente el movimiento armónico simple, por lo que este movimiento adquiere una singular importancia en los estudios vibratorios.

Los sistemas mecánicos al ser sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo, principalmente periódicas, responden variando sus estados de equilibrio y, como consecuencia, presentan cambios de configuración que perturban su normal funcionamiento, presentan molestias al personal que los maneja y acortan la vida útil de los mecanismos.

Actualmente, el estudio y análisis de las vibraciones mecánicas ha adquirido gran importancia en la supervisión de los sistemas mecánicos, sobre todo de elementos de tipo rotativo. Independientemente de los planes de mantenimiento correctivo y preventivo, el plan de mantenimiento predictivo se basa, principalmente, en el estudio de las vibraciones mediante la instalación de sensores que permiten detectar vibraciones fuera de rango.

En general, se suponen vibraciones de pequeña amplitud porque fuera de ellas dejan de tener validez la mayoría de las hipótesis que se establecen para su estudio.

Supongamos el sistema de la figura, formado por una masa principal *m*, un elemento recuperador elástico de constante *k* y un dispositivo amortiguador de constante *c.*



Notación:

K. constante de rigidez elástica

m: masa principal

c: coeficiente de amortiguación

F: resultante de las fuerzas exteriores

l_0: longitud inicial del muelle

x_{est}: deformación en equilibrio estático

x: desplazamiento

Se consideran las siguientes hipótesis:
a) La masa tiene un guiado vertical, sin rozamiento, que permite únicamente desplazamientos verticales, e impide otros desplazamientos y giros.
b) El muelle tiene masa despreciable frente a la masa principal del sistema y su fuerza recuperadora elástica es proporcional a su deformación.
c) El dispositivo amortiguador tiene sus masas móviles despreciables frente a la masa principal del sistema y está basado en un rozamiento de tipo viscoso, con fuerza de rozamiento opuesto a la velocidad y proporcional a ella.
d) El sistema se supone situado en el vacío.

La ecuación del equilibrio dinámico permite establecer la ecuación diferencial del movimiento ,

$$mx''+cx'+kx = F$$

siendo F la fuerza aplicada directamente al sistema, -mx'' la fuerza de inercia , -cx' la fuerza amortiguadora de tipo viscoso y -kx la fuerza elástica, con las condiciones m>0, c>0 y m>0 .

2. CLASIFICACIÓN DE LAS VIBRACIONES.

Las vibraciones son **libres** cuando no existen fuerzas o acciones exteriores directamente aplicadas al sistema a lo largo del tiempo.
Las vibraciones son **forzadas** cuando existen acciones o excitaciones directamente aplicadas al sistema a lo largo del tiempo, además de las fuerzas o momentos internos.

Tanto las vibraciones libres como las forzadas pueden subdividirse, dependiendo de la existencia o no de fuerzas resistentes que amortiguan el movimiento vibratorio, en:

- Sin amortiguamiento. No existe resistencia pasiva al movimiento del sistema.
- Con amortiguamiento. Existen resistencias pasivas al movimiento del sistema, es decir, fuerzas o momentos disipativos que amortiguan el movimiento vibracional.

3. VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO.

La ecuación diferencial del movimiento es $mx''+kx = 0$, su ecuación característica es $mr^2 + k = 0$, siendo sus raíces imaginarias conjugadas $r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$.

La solución general es de la forma $x = a\,\mathrm{sen}(\omega_n t + \varphi)$

donde a (amplitud) y φ (fase inicial) son constantes que se pueden determinar, en cada caso particular, con las condiciones iniciales.
La frecuencia natural de la vibración y el periodo son

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En este tipo de vibraciones se cumple el principio de la conservación de la energía mecánica, es decir, la suma de la energía cinética y el potencial elástico es constante e igual a la energía total comunicada inicialmente al sistema, por lo que se verifica la ecuación:

$$\frac{m}{2}x'^2 + \frac{k}{2}x^2 = Cte = \frac{1}{2}k\ a^2$$

4. VIBRACIONES LIBRES CON AMORTIGUAMIENTO

En todos los movimientos oscilantes reales, se disipa energía mecánica debido a algún tipo de fricción o rozamiento, de forma que dejado libremente a sí mismo, un muelle o péndulo finalmente deja de oscilar. Este movimiento se denomina amortiguado y se caracteriza porque tanto la amplitud como la energía mecánica disminuyen con el tiempo.

La ecuación diferencial que describe el movimiento es $mx''+cx'+kx = 0$; la ecuación característica es $mr^2 + cr + k = 0$, cuyas raíces son: $r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$.

Se presentan tres casos posibles:

a) Amortiguamiento supercrítico: $\frac{c^2}{4m^2} > \frac{k}{m} \Rightarrow c > 2\sqrt{km}$

Las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas. La solución de esta ecuación, amortiguada pero no armónica, es de la forma

$$x = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración. El sistema no oscila, simplemente vuelve a la posición de equilibrio, cuanto mayor es el amortiguamiento, más tiempo tarda el sistema en alcanzar la posición de equilibrio.

b) Amortiguamiento crítico: $\frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m} \Rightarrow c = 2\sqrt{km} = c_{cr}$.

La raíz de la ecuación característica es doble e igual a $r = -\frac{c_{cr}}{2m}$.

La solución, amortiguada pero no armónica, es de la forma

$$x = e^{-\frac{c_{cr}}{2m}t}(C_1 + C_2t)$$

El sistema vuelve a la posición de equilibrio en el tiempo más breve posible sin oscilación. El amortiguamiento crítico tiene una importancia especial porque separa los movimientos aperiódicos (no oscilatorios) de los oscilatorios amortiguados. Es decir, el valor crítico es la menor cantidad de amortiguamiento para que el sistema no oscile. En muchas aplicaciones prácticas se utiliza un amortiguamiento crítico, o próximo al crítico, para evitar vibraciones y conseguir que el sistema alcance el equilibrio rápidamente.

c) Amortiguamiento subcrítico: $\frac{c^2}{4m^2} < \frac{k}{m} \Rightarrow c < 2\sqrt{km}$.

Las raíces son imaginarias conjugadas e iguales a,

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\, i = -\frac{c}{2m} \pm \omega_n^{'} i$$

y la frecuencia de la vibración amortiguada es $\omega_n^{'} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$.

La solución es de la forma

$$x = ae^{-\frac{c}{2m}t}\,\mathrm{sen}(\omega_n^{'} t + \varphi)$$

Esta solución es aproximadamente armónica, es decir, existe una cierta periodicidad en el movimiento con intervalos temporales medidos por el pseudoperiodo $T^{'}$, que se puede expresar en función del periodo T correspondiente a la vibración no amortiguada a través de la relación

$$T^{'} = \frac{2\pi}{\omega'_n} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}}$$

Elevando al cuadrado la expresión de la frecuencia de la vibración amortiguada, se tiene

$$\omega_n^{'\,2} = \frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2} = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{c^2}{4km}\right) = \omega_n^2\left(1 - \frac{c^2}{c_{cr}^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{\omega_n^{'}}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2 = 1$$

Relación que permite la determinación del coeficiente de amortiguamiento para unas frecuencias dadas a priori o medidas experimentalmente.

Denominando factor de amortiguación $f = \frac{c}{c_{cr}}$ y factor de frecuencias $\Omega = \frac{\omega_n^{'}}{\omega_n}$ se obtiene la ecuación de una elipse $f^2 + \Omega^2 = 1$.

En las vibraciones amortiguadas, por ser un movimiento aperiódico no se cumple el principio de conservación de la energía mecánica, pero si el de la energía total, de forma que la suma de la energía cinética, el potencial elástico y la energía disipada en forma de calor, debido a la existencia de amortiguamiento, se mantiene constante,

$$\frac{m}{2}x'^2 + \frac{k}{2}x^2 + c\int_0^t x'^2 dt = Cte.$$

los dos primeros términos disminuyen con el tiempo y la energía disipada tiende a alcanzar el valor máximo, es decir, existe transformación de energía mecánica en calorífica.

5. VIBRACIONES FORZADAS SIN AMORTIGUAMIENTO.

Para mantener un sistema oscilando es necesario suministrar energía al sistema, cuando esto se lleva a cabo se dice que la vibración es forzada. Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor del que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo que se manifiesta por un aumento de la amplitud del movimiento. Si la energía se proporciona al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo.

La ecuación diferencial del movimiento, teniendo en cuenta que la fuerza es de tipo periódico, es

$$\mathrm{mx''+kx = F = F_0 \cos\omega t}$$

donde F_0 es la amplitud y ω la frecuencia de la fuerza excitadora.
La solución general de la ecuación diferencial se obtiene añadiendo a la solución general de la homogénea una solución particular de la completa $(x = x_h + x_p)$. La ecuación característica es $\mathrm{mr^2 + k = 0}$, las raíces de esta ecuación son imaginarias conjugadas $r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\ i$ y la solución general de la homogénea es $\mathrm{x_h = a\,sen(\omega_n t + \varphi)}$
La solución particular de la completa es $x_p = A\cos\omega t$
Así, la solución general tiene por expresión:

$$x = a\cos(\omega_n t + \varphi) + \frac{F_0/k}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}\cos\omega t$$

En todo sistema no amortiguado y forzado armónicamente, el movimiento resultante se compone de la suma de dos armónicos, uno de frecuencia natural ω_n y otro de frecuencia de la fuerza exterior ω. La amplitud del primero depende de las condiciones iniciales y se anula para unos valores particulares, la amplitud del segundo depende de la proximidad de ambas frecuencias a través de la expresión denominada factor de resonancia:

$$\rho = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \frac{A}{x_{est}}$$

BATIMIENTO. Fenómeno producido cuando la frecuencia natural del sistema (ω_n) toma un valor muy próximo a la frecuencia de la fuerza exterior (ω), es decir, en el caso particular en que $\omega_n = \omega + \Delta\omega$. Para perturbación inicial nula $(x_0 = x'_0 = 0)$ se obtiene,

$$x = \frac{F_0 \omega_n}{k \Delta\omega} \operatorname{sen} \frac{\Delta\omega}{2} t \operatorname{sen} \omega_n t$$

Se trata de un movimiento armónico de frecuencia ω_n y de amplitud también armónica, ésta crece hasta un máximo y disminuye hasta que se anula, repitiendo este ciclo de forma periódica.

RESONANCIA. Una característica muy significativa del movimiento oscilatorio tiene lugar cuando la fuerza excitadora de las vibraciones tiene unas frecuencias particulares, para cada sistema dado, produciéndose cambios de configuración de los sistemas mecánicos que alcanzan amplitudes notables, y generalmente, ocasionan un fallo estructural del material sometido a esfuerzos de rotura: *efectos resonantes*. Este riesgo se produce incluso con fuerzas excitadoras muy pequeñas ya que depende de las características del material sometido a vibración.

Cuando la frecuencia de la fuerza exterior es igual a la frecuencia natural del sistema $(\omega = \omega_n)$, es decir, cuando $\Delta\omega \to 0$, se produce la resonancia, la ecuación que rige dicho fenómeno es,

$$x = \frac{F_0 \omega}{2k} t \operatorname{sen} \omega_n t \,.$$

Expresión que corresponde a un movimiento armónico de frecuencia ω_n y cuya amplitud tiende a infinito cuando $t \to \infty$.

6. VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO.

La ecuación diferencial del movimiento, teniendo en cuenta que la fuerza es de tipo periódico, $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, es de la forma

$$mx''+cx'+kx = F$$

La ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial homogénea es $mr^2 + cr + k = 0$. Se supone amortiguamiento inferior al crítico para que resulte una vibración, la solución general se obtiene añadiendo a la solución de la ecuación diferencial de la homogénea una solución particular de la completa $(x = x_h + x_p)$, resultando

$$x = ae^{-\frac{c}{2m}t}\,\mathrm{sen}\left(\omega_n' t + \varphi\right) + A\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \Theta\right)$$

esta solución consta de dos partes, una solución transitoria, en la que el primer término (x_h), al cabo de un tiempo generalmente breve, se reduce a un valor despreciable, y la solución estacionaria (x_p), en la que el sistema oscila con frecuencia ω, amplitud A constante y desfase Θ cuyas expresiones son:

$$\mathrm{tg}\Theta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}\,; \qquad A = \frac{F_0 / m\omega_n^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

7. TRANSMISIÓN DE VIBRACIONES

Cuando un sistema vibra según la ecuación: $mx'' + cx' + kx = F$, la fuerza transmitida, pasado el primer periodo transitorio, es

$$f = F - mx'' = kx + cx'$$

se trata de una fuerza armónica de frecuencia igual a la frecuencia de la fuerza aplicada ω, de amplitud f_0 y desfase Θ_1, siendo

$$f = f_0\,\mathrm{sen}(\omega\, t - \Theta_1)$$

donde $$f_0 = A\sqrt{k^2 + c^2\omega^2} = \frac{F_0\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}}{k\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Se denomina **coeficiente de transmisibilidad** a la relación entre las amplitudes máximas de la fuerza aplicada y transmitida, cuya expresión en forma adimensional es:

$$\tau = \frac{\sqrt{1+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\frac{c}{c_{cr}}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Es conveniente que el coeficiente de transmisibilidad sea bajo, preferiblemente menor que la unidad, por lo que $\tau < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_n} > \sqrt{2}$

8. BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía general

ALONSO, M.; FINN, E. (1995). Física. Addison Wesley Iberoamericana. *Capítulo 10*
CRAWFORD, J. (1977). Ondas, Berkeley Physics Course. Ed. Reverté. *Capít. 1 y 3.*
SERWAY, R. A. (1992). Física. Ed. Mc Graw Hill. *Capítulo 13.*
TIPLER, P.A. (1999). Física para la ciencia y la tecnología. Ed. Reverté. *Capítulos 14 y 15.*
LAFITA, F.; MATA, H. (1968). Introducción a la Teoría de las vibraciones mecánicas. Ed. Labor.

Artículos de revistas científicas

Fuertes, F. El modesto péndulo. Revista Española de Física, V-4, n.3, pp.82-86. (1990).
Gonzalo, P. La ley de Hooke, masa y periodo de un resorte. Revista Española de Física, V-5, n.1, pp.36. (1991).
Sanmartín, J. R. La física del botafumeiro. Investigación y ciencia, n.161, pp. 7-10. (1990).
Solaz, J. J. Una práctica con el péndulo transformada en investigación. Revista Española de Física. V-4, n. 3, pp. 87-94. (1990)

Página web: http://www.sc.ehu.es/sweb/fisica/oscilaciones/oscilacion.htm