

FÍSICA APLICADA A LA INGENIERÍA

Prof. María Victoria Carbonell

Las imágenes de la presentación han sido obtenidas del libro:
Physics for Scientists and Engineers
Paul A. Tipler • Gene Mosca
Copyright © 2004 by W. H. Freeman & Company

1. Teoría de Campos y operadores diferenciales

2. Mecánica de Fluidos

3. Mecánica de Hilos y Cables

4. Vibraciones mecánicas. Aplicaciones a la ingeniería

Programa

- Generalidades
- Ecuación diferencial general del movimiento de las vibraciones mecánicas
- Vibraciones libres sin amortiguamiento
- Vibraciones libres amortiguadas: Estudio energético
 - Amortiguamiento supercrítico
 - Amortiguamiento crítico
 - Amortiguamiento subcrítico
- Vibraciones forzadas sin amortiguamiento
- Resonancia, fenómenos de batimiento
- Vibraciones forzadas con amortiguamiento. Aplicaciones a desequilibrios rotatorios
- Transmisión de vibraciones. Coeficiente de transmisibilidad

Objetivos

- Distinguir los movimientos armónico y no armónico.
- Identificar las fuerzas que actúan sobre un sistema vibrante.
- Clasificar las vibraciones en función de la presencia o ausencia de amortiguamiento y de estímulos externos.
- Saber deducir la ecuación diferencial que rige el movimiento en cada tipo de vibración.
- Analizar los distintos movimientos vibratorios desde el punto de vista energético.
- Conocer los efectos resonantes, su trascendencia y aplicación en el ámbito de la ingeniería.
- Diseñar amortiguadores para evitar la transmisión de vibraciones.

Bibliografía

ALONSO, M. FINN, E. (1995). Física. Addison Wesley Iberoamericana.
Capítulo 10

BEER, F.; JOHNSTON, E.R. (2005). Mecánica vectorial para ingenieros.
Dinámica. Cap.19. Mc Graw Hill, 7ª Ed.

CRAWFORD, J. (1977). Ondas, Berkeley Physics Course. Ed. Reverté
Capítulos 1 y 3

LAFITA, F.; MATA, H. (1968). Introducción a la teoría de vibraciones
mecánicas. Ed. Labor

LEA, S.M.; BURKE, J.R. (1998). Física .La naturaleza de las cosas.
Capítulo 14

SERWAY, R.A. (1992). Física. Ed. Mc Graw Hill. Capítulo 13

TIPLER, P.A.; MOSCA, G. (2005). Física para la ciencia y la tecnología.
5ª edición. Ed. Reverté

<http://www.sc.ehu.es/sweb/fisica/oscilaciones/oscilacion.htm>

Videos: El Universo mecánico. Movimiento armónico, Resonancia

Movimiento vibratorio o vibración es la variación o cambio de configuración de un sistema en torno a una posición de equilibrio estable.

Característica fundamental:

periódico

Es frecuente el movimiento armónico simple

Generalmente, se suponen vibraciones relativamente **pequeñas**, porque fuera de ellas dejan de tener validez la mayoría de las hipótesis que se establecen para su estudio.

Movimiento periódico: cuando la configuración del sistema que realiza el movimiento se repite o toma los mismos valores en intervalos iguales de tiempo (PERIODO: T)

Posición $x(t) = x(t + T) = x(t + 2T) = \dots = x(t + nT)$

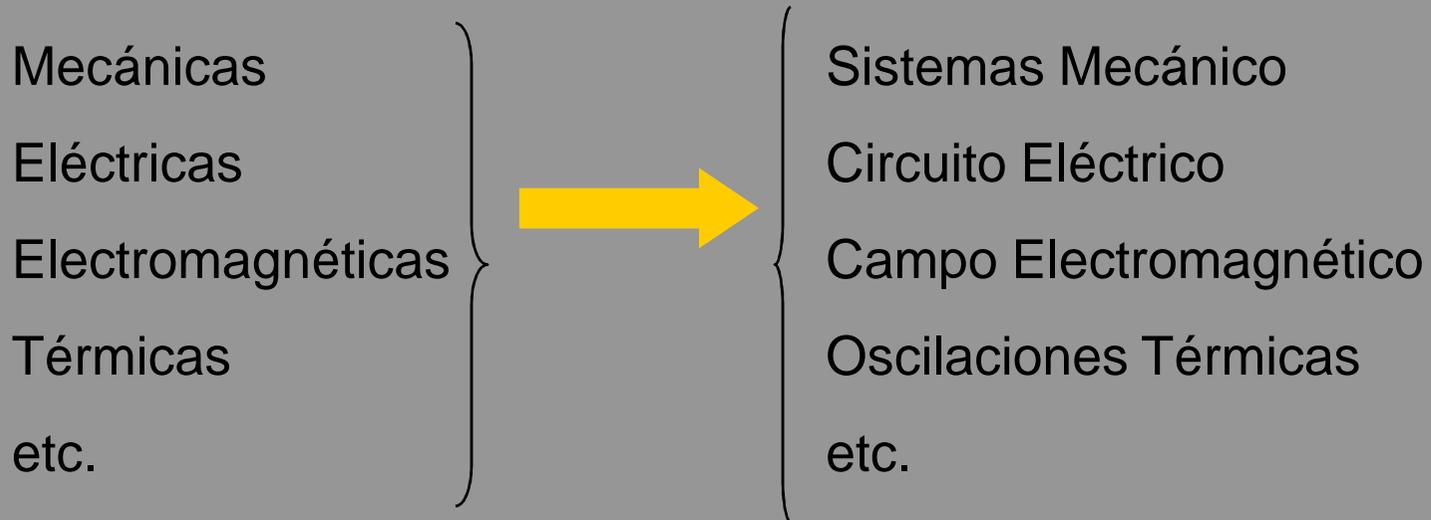
Velocidad $x'(t) = x'(t + T) = x'(t + 2T) = \dots = x'(t + nT)$

Aceleración $x''(t) = x''(t + T) = x''(t + 2T) = \dots = x''(t + nT)$

Movimiento aperiódico: cuando no se repite.

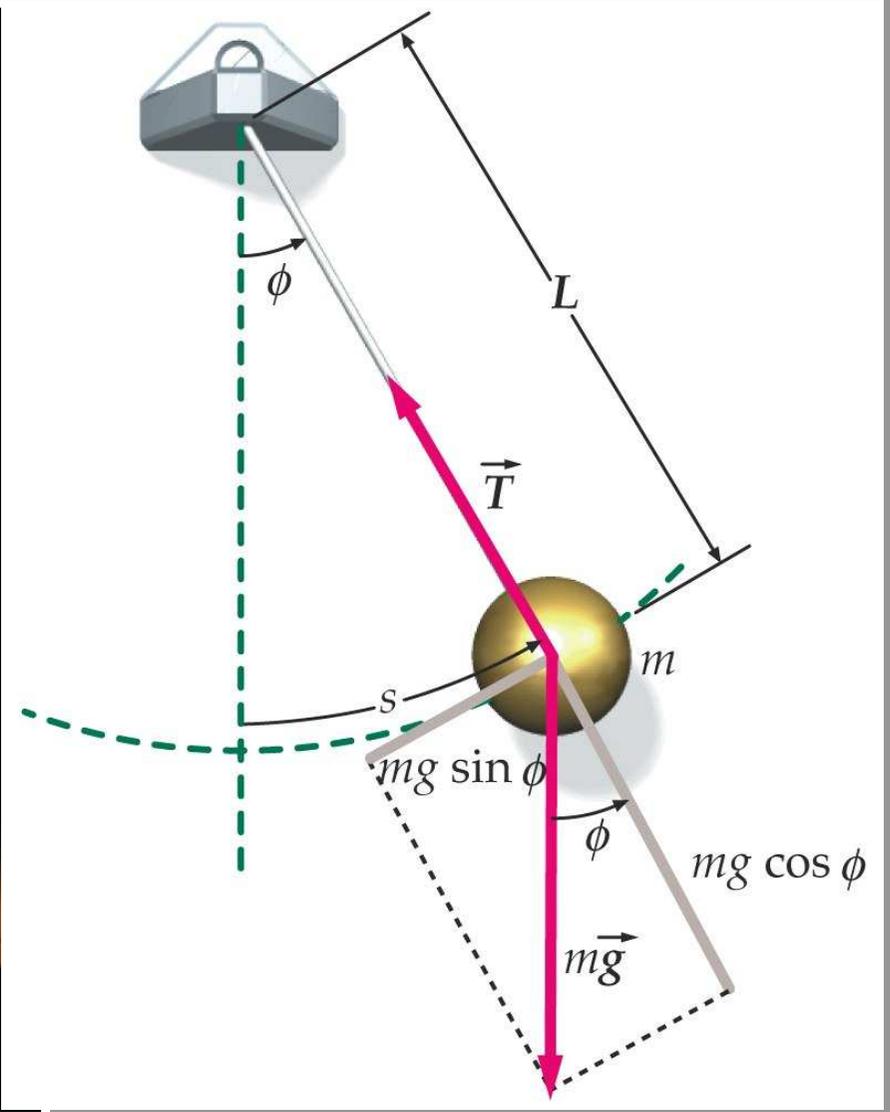
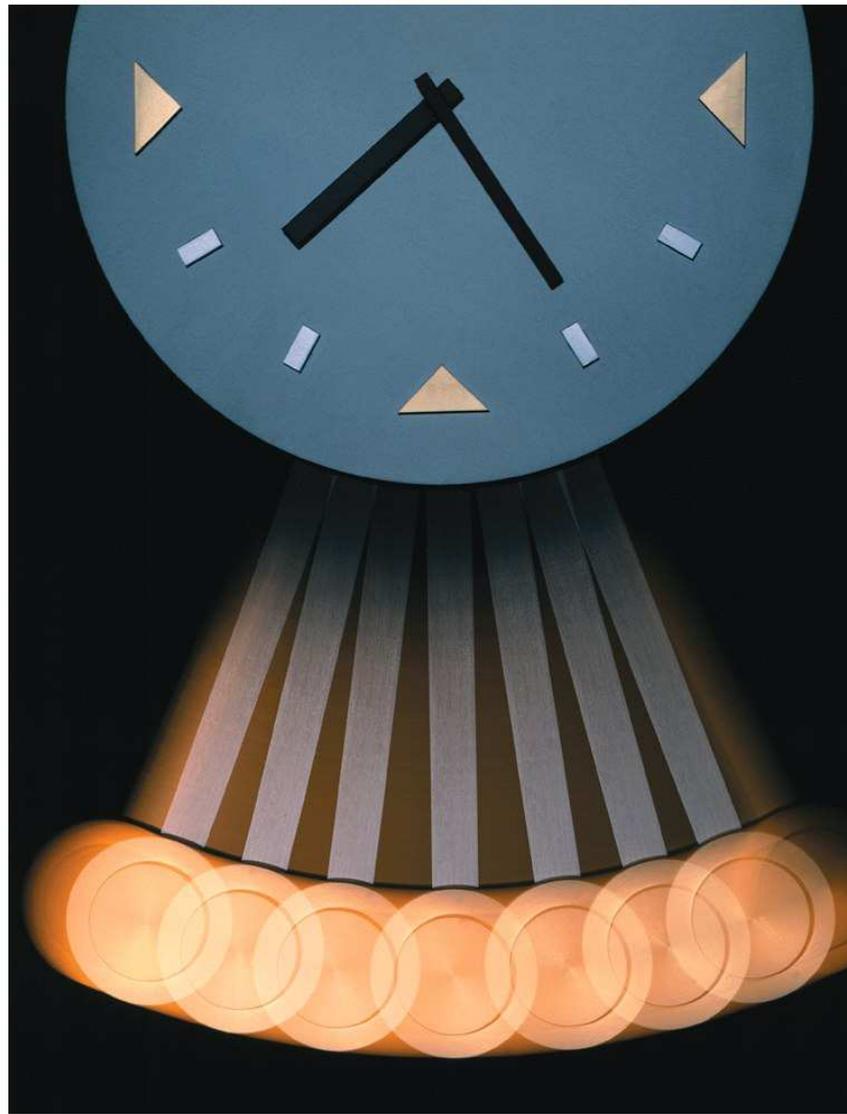
- Amortiguados: los parámetros se hacen cada vez más pequeños
- Amplificados: algún parámetro aumenta con el tiempo

Las vibraciones pueden ser:



Vibraciones Mecánicas

Ejemplos



Ejemplos

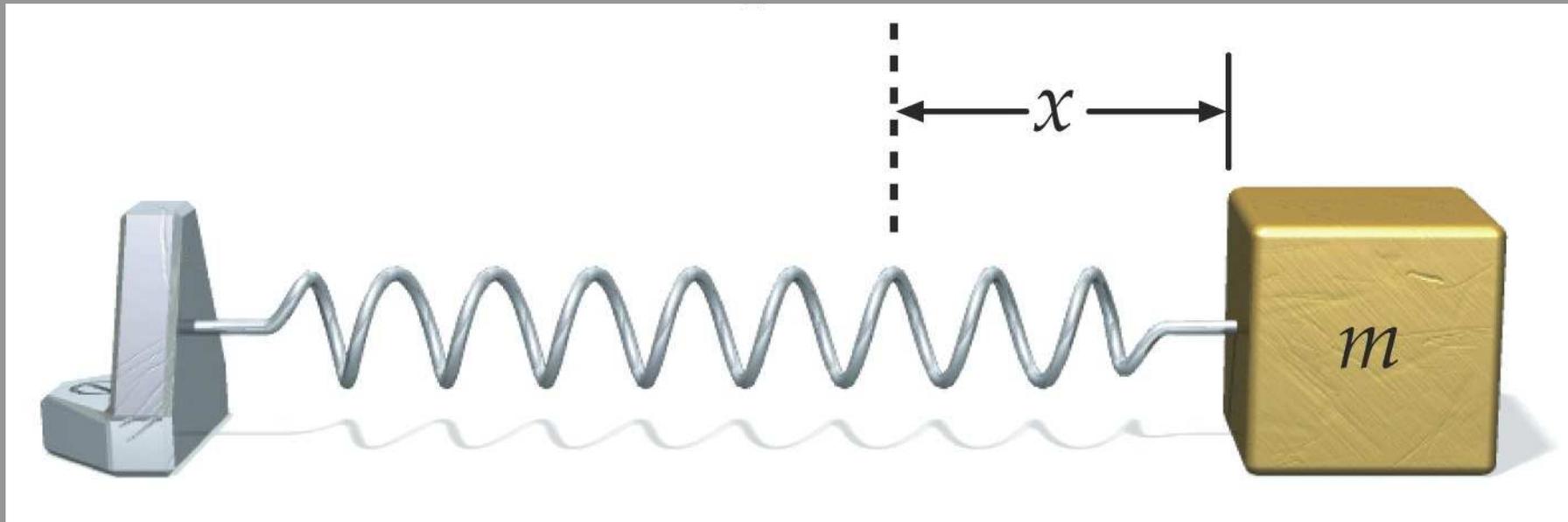


Ejemplos

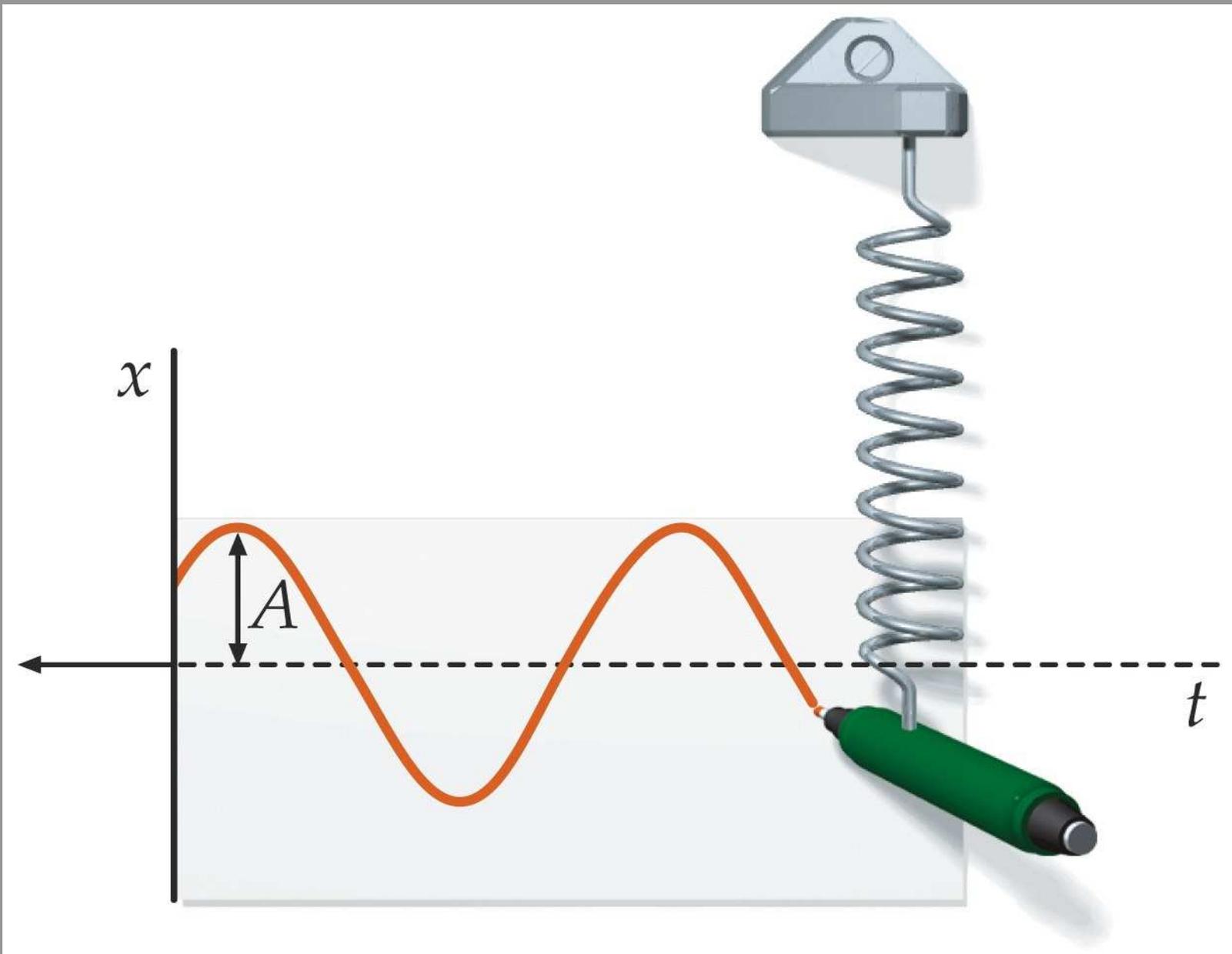


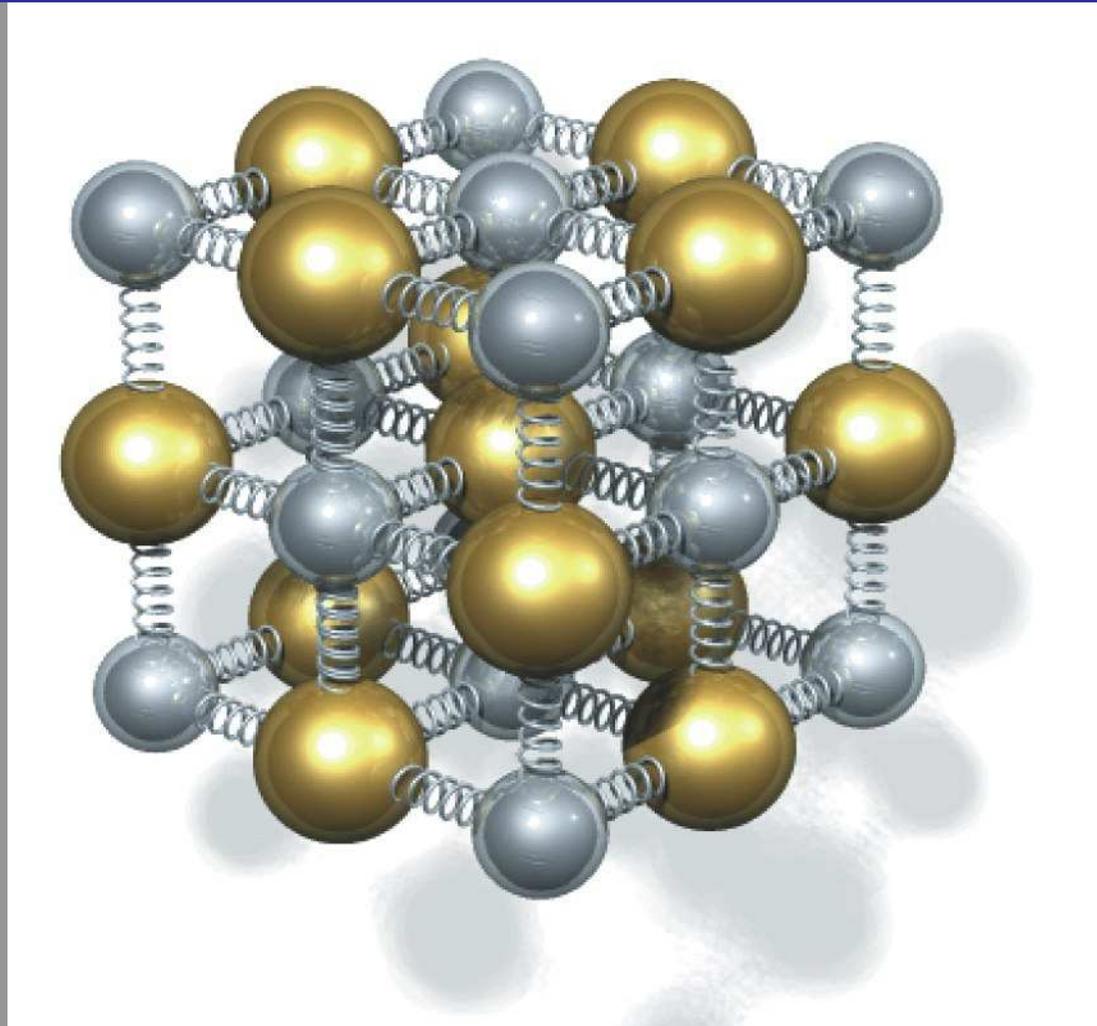
Ejemplo: Vibraciones libres sin amortiguamiento

Posición de Equilibrio



Ejemplo: Vibraciones libres sin amortiguamiento





La fuerza ejercida por un muelle es semejante a la ejercida por un átomo sobre otro en una molécula. Para pequeños desplazamientos del equilibrio, la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento.

- **Importancia en la ingeniería**

- ✓ Perturban el normal funcionamiento de un sistema mecánico
- ✓ Causan molestias en el personal
- ✓ Acortan la vida útil de los mecanismos

- **Aplicaciones**

- ✓ Plan de mantenimiento de sistemas mecánicos

Correctivo

Preventivo

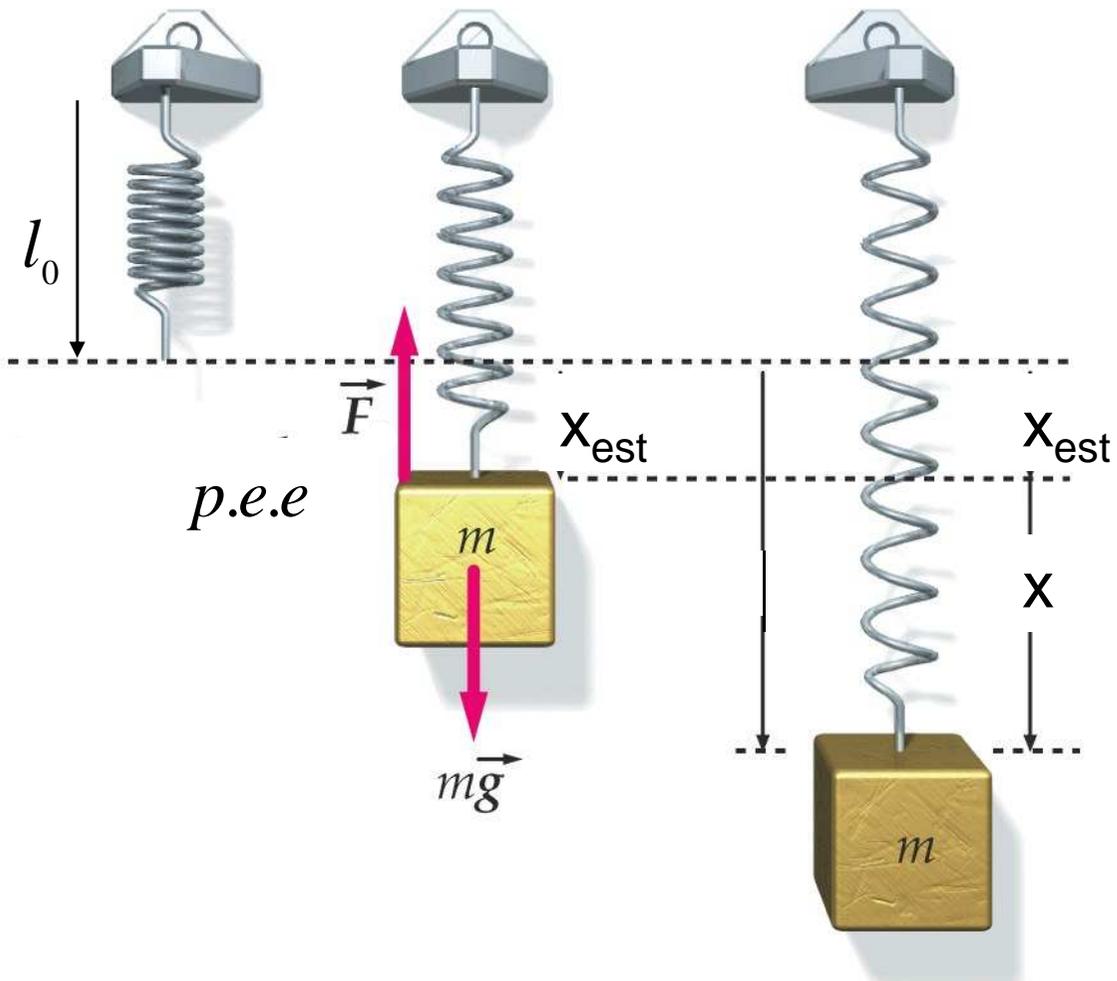
Predictivo



Estudio de las vibraciones

- ✓ Efectos resonantes

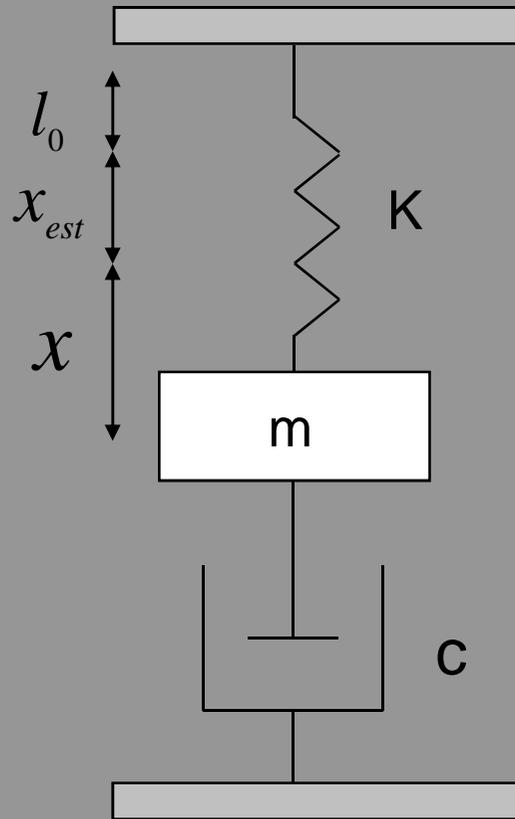
Planteamiento del problema



Planteamiento del problema



Planteamiento del problema



Notación:

m: masa principal

K: constante rigidez elástica

c: constante de amortiguamiento viscoso

F: Fuerza exterior

l_0 : longitud inicial

x_{est} : deformación en p.e.e

x : desplazamiento del c.d.g.

respecto a p.e.e

Planteamiento del problema

Fuerzas que actúan sobre la masa en dirección vertical

Fuerza de inercia $-mx''$

Fuerza elástica $-k(x + x_{est})$

Fuerza amortiguadora $-cx'$

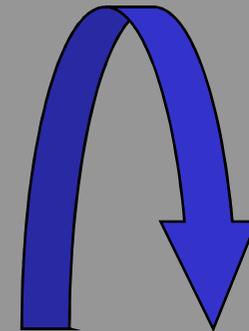
Fuerza de gravedad mg

Fuerza exterior F

$$mx'' + cx' + kx = F$$

$$mx'' + cx' + k(x + x_{est}) = mg + F$$

Ley de Hooke $mg = kx_{est}$



Condiciones: $m > 0$

$c > 0$

$k > 0$

Planteamiento del problema

Hipótesis:

- La masa principal tiene un guiado vertical, sin rozamiento, que permite únicamente desplazamientos **verticales**
- El muelle tiene una masa despreciable frente a la masa principal del sistema y su **fuerza** recuperadora **elástica** es proporcional a la deformación (x)

$$F_e = -kx$$

- El dispositivo amortiguador tiene sus masas móviles despreciables frente a la masa principal del sistema y su **fuerza amortiguadora** (también recuperadora) es opuesta a la velocidad y proporcional a ella (x')

$$F_a = -cx'$$

- El sistema se supone en el **vacío**

Clasificación de las vibraciones

$$mx'' + cx' + kx = F$$

Vibraciones libres $F=0$

- sin amortiguamiento $mx'' + kx = 0$
- con amortiguamiento $mx'' + cx' + kx = 0$

Vibraciones forzadas $F \neq 0$

- sin amortiguamiento $mx'' + kx = F$
- con amortiguamiento $mx'' + cx' + kx = F$

Vibraciones libres sin amortiguamiento

Ecuación diferencial del movimiento

$$mx'' + kx = 0$$

Ecuación característica $mr^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i$

Raíces imaginarias conjugadas $r = \alpha \pm \beta i$

$$x = Ae^{\alpha t} \text{sen}(\beta t + \varphi)$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$$

Solución general:

$$x = a \text{sen}(\omega_n t + \varphi)$$



Movimiento armónico

Vibraciones libres sin amortiguamiento

a : amplitud (A)

ω_n : frecuencia

φ : fase inicial

a, φ : ctes

$$x = a \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad} / \text{s})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (\text{s})$$

ω_n Frecuencia natural, frecuencia propia o autofrecuencia (ANGULAR)

■ Al aumentar la rigidez elástica k , (resortes duros o rígidos) aumenta su frecuencia natural. Análogamente, al disminuir la rigidez elástica k , (resortes blandos o muy elásticos) disminuye su frecuencia natural.

■ Al aumentar la masa m , disminuye la frecuencia natural. Análogamente, al disminuir la masa m , aumenta la frecuencia natural.

Vibraciones libres sin amortiguamiento

Determinación de las constantes

$$x = a \operatorname{sen}(w_n t + \varphi)$$

$$x' = a w_n \operatorname{cos}(w_n t + \varphi)$$

$$t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_o = a \operatorname{sen} \varphi \\ x'_o = a w_n \operatorname{cos} \varphi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \operatorname{sen} \varphi = x_o \\ a \operatorname{cos} \varphi = \frac{x'_o}{w_n} \end{array} \right.$$

Dividiendo

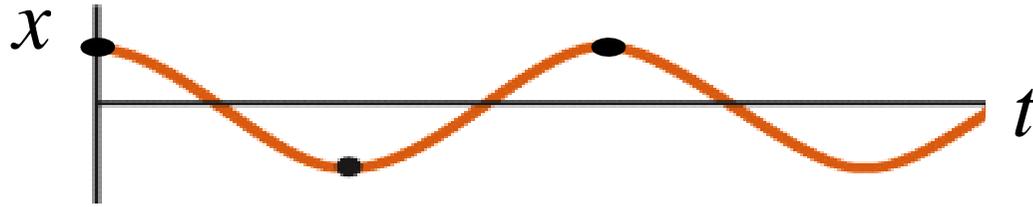
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_o w_n}{x'_o}$$

Elevando al cuadrado y sumando

$$a = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{x'_o}{w_n} \right)^2}$$

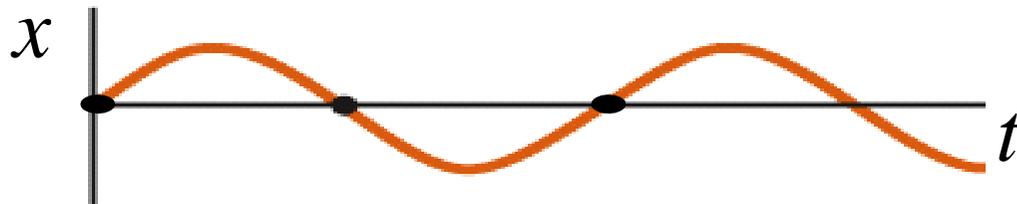
Vibraciones libres sin amortiguamiento

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) = a \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



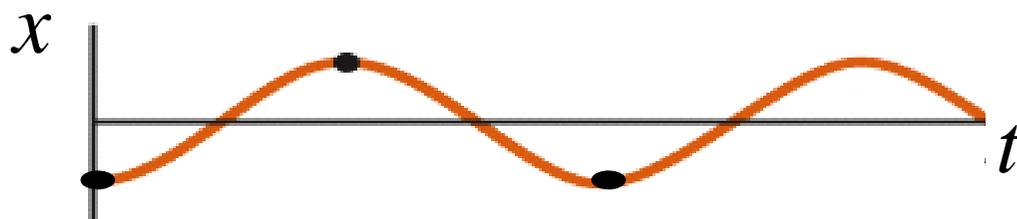
$$x = a$$

$$\cos 0 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$



$$x = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi = 0$$



$$x = -a$$

$$\cos \pi = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$$

Vibraciones libres sin amortiguamiento

Posición:

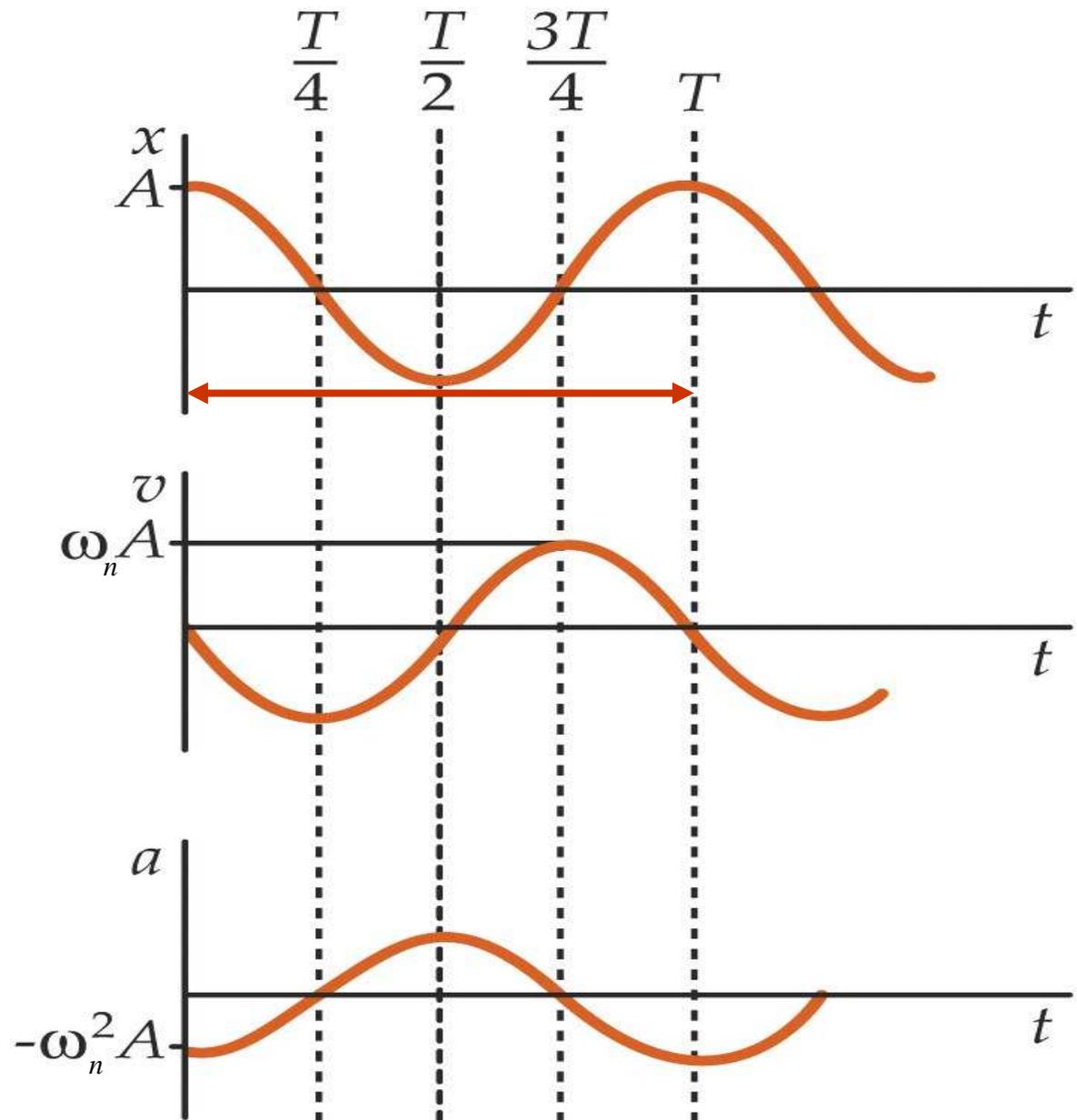
$$x = a \operatorname{sen}(w_n t + \varphi)$$

Velocidad:

$$x' = a w_n \cos(w_n t + \varphi)$$

Aceleración

$$x'' = -a w_n^2 \operatorname{sen}(w_n t + \varphi)$$



Vibraciones libres sin amortiguamiento

Cuando una partícula se mueve con **trayectoria circular** uniforme (velocidad constante), su componente x describe un movimiento armónico simple

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

a : *amplitud*

ω : *frecuencia angular*

$\omega t + \varphi$: *fase*

φ : *fase inicial*

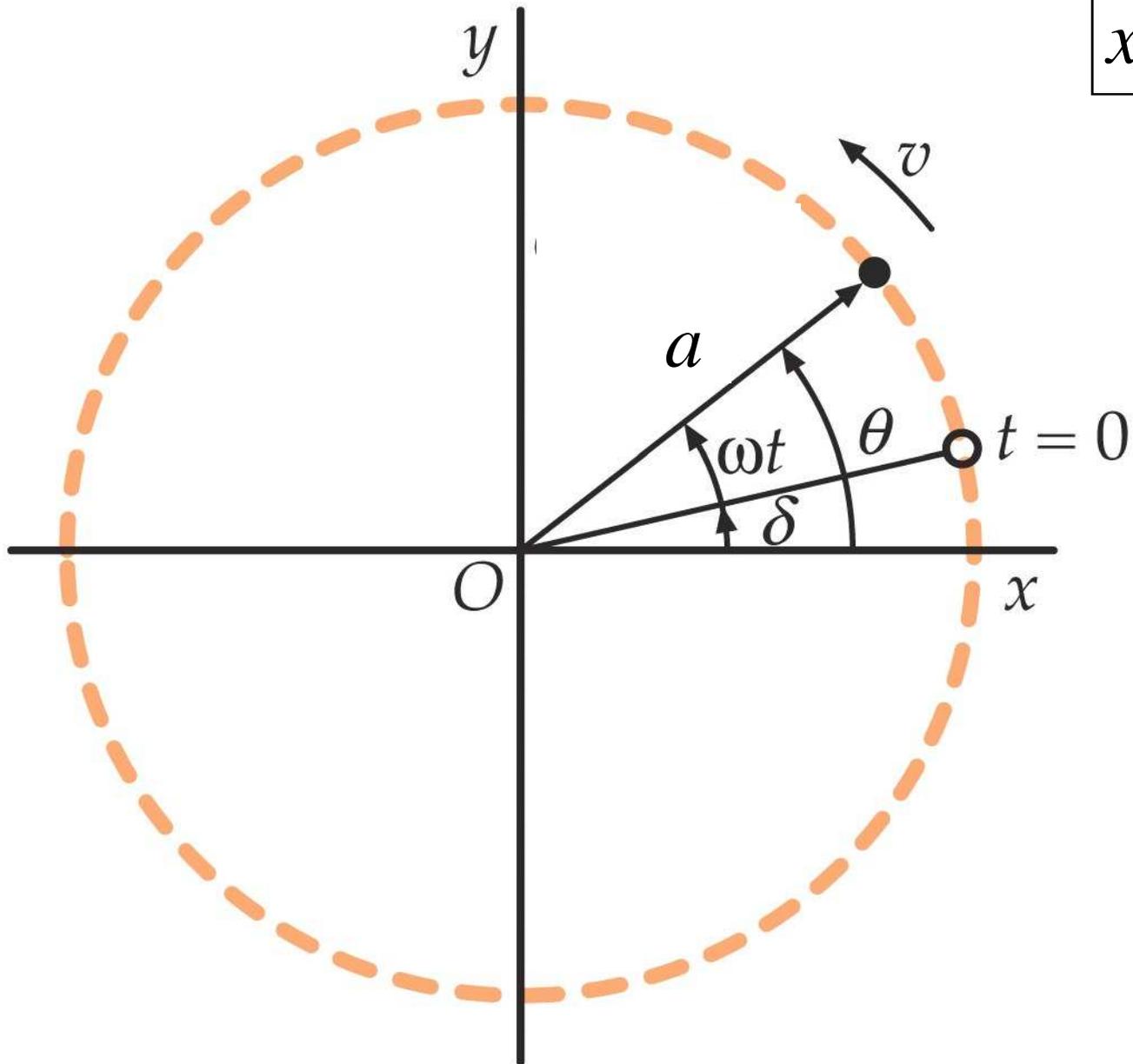
Periodo : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s)

Frecuencia : $\nu = \frac{1}{T}$ (Hz)

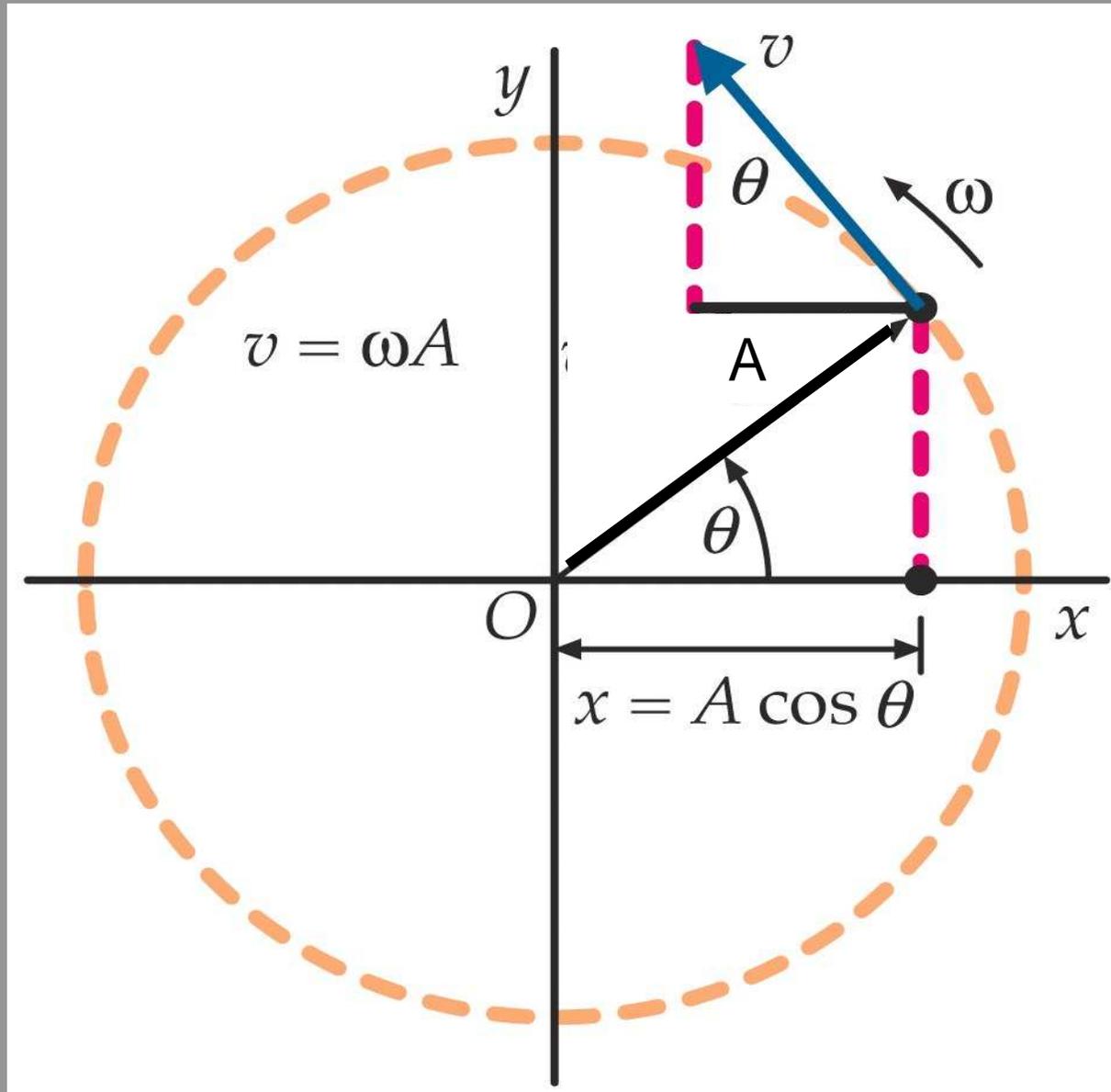
ω : (rad / s)

Vibraciones libres sin amortiguamiento

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$



Vibraciones libres sin amortiguamiento



Vibraciones libres sin amortiguamiento

Se cumple:

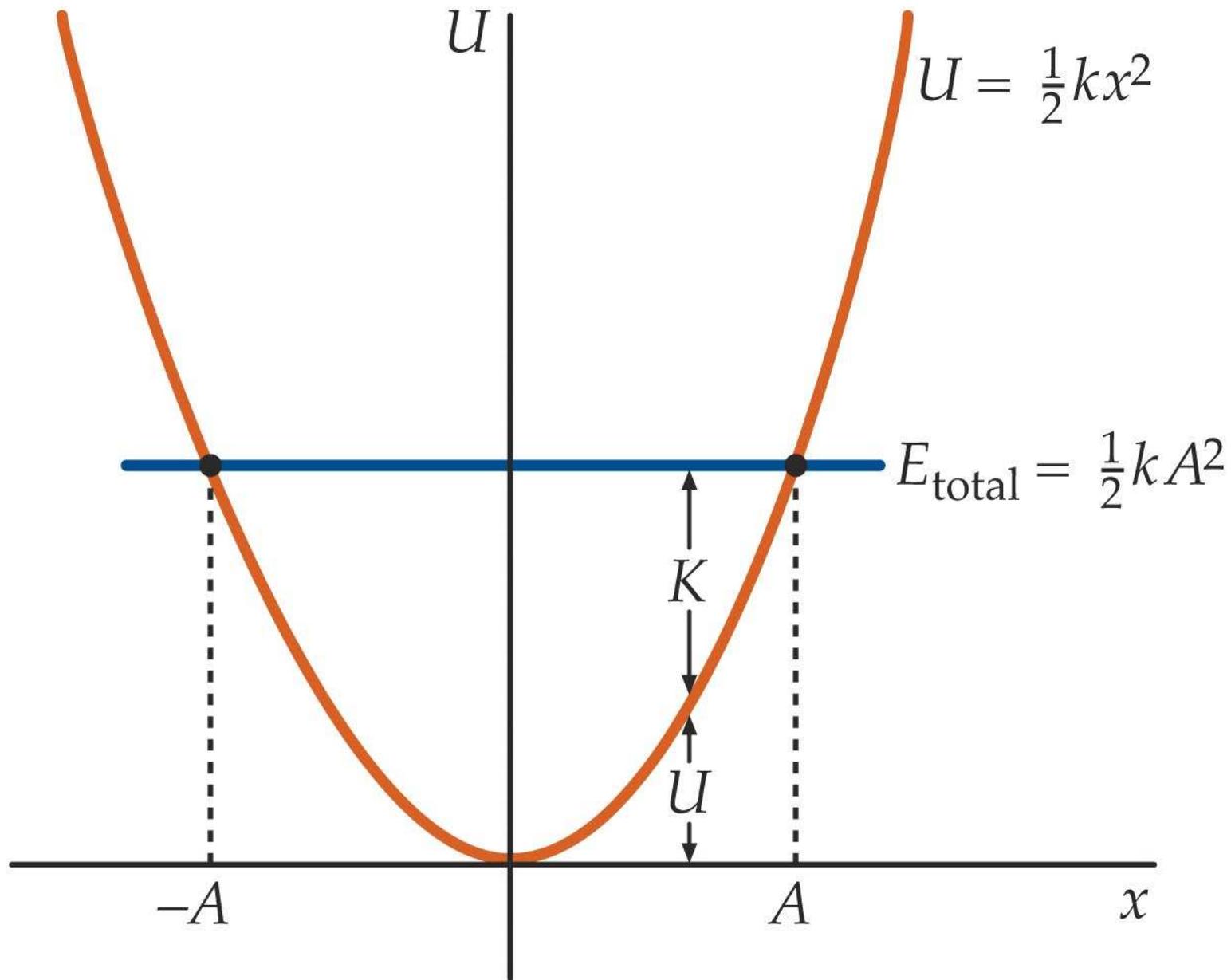
- ✓ Principio Conservación de la **Energía Total**
- ✓ Principio Conservación de la **Energía Mecánica**

$$mx'' + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{m}{2} x'^2}_{E. \text{ cinética}} + \underbrace{k \frac{x^2}{2}}_{\text{Potencial elástico}} = Cte$$



$$Cte = \frac{1}{2} kA^2 : E. \text{ Mecánica} = E. \text{ Total}$$

Principio de Conservación de la energía



A: amplitud

k: constante
elástica

U: potencial
elástico

K: energía
cinética

Principio de Conservación de la energía

Posición

● $X=A$

● $X=0$

● $X=-A$

Potencial

● $U=1/2kA^2$

● $U=0$

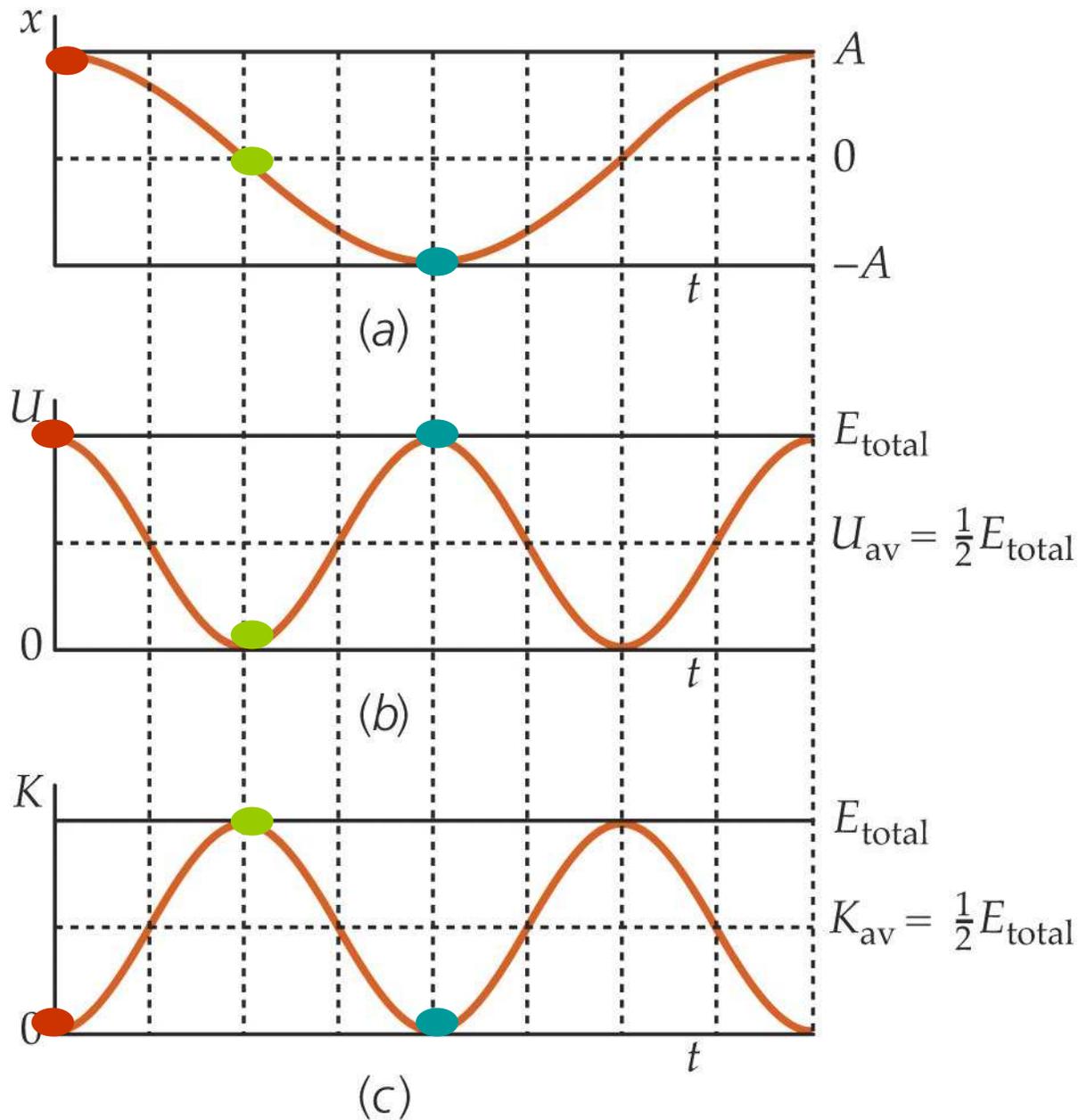
● $U=1/2kA^2$

E. cinética

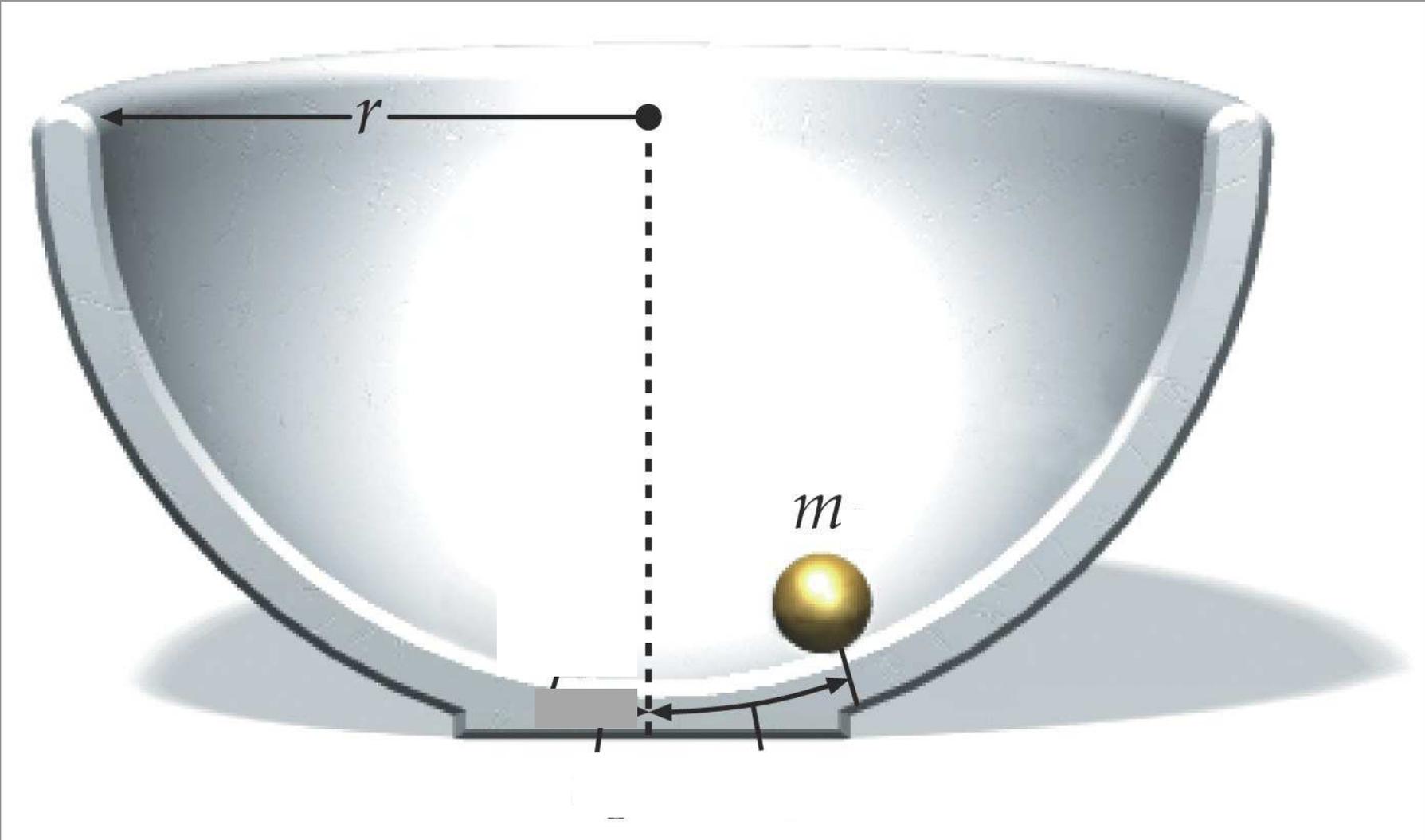
● $E_c=0$

● $E_c=1/2kA^2$

● $E_c=0$



Principio de Conservación de la energía



Vibraciones libres con amortiguamiento



$$mx'' + cx' + kx = 0$$

Ecuación diferencial del movimiento

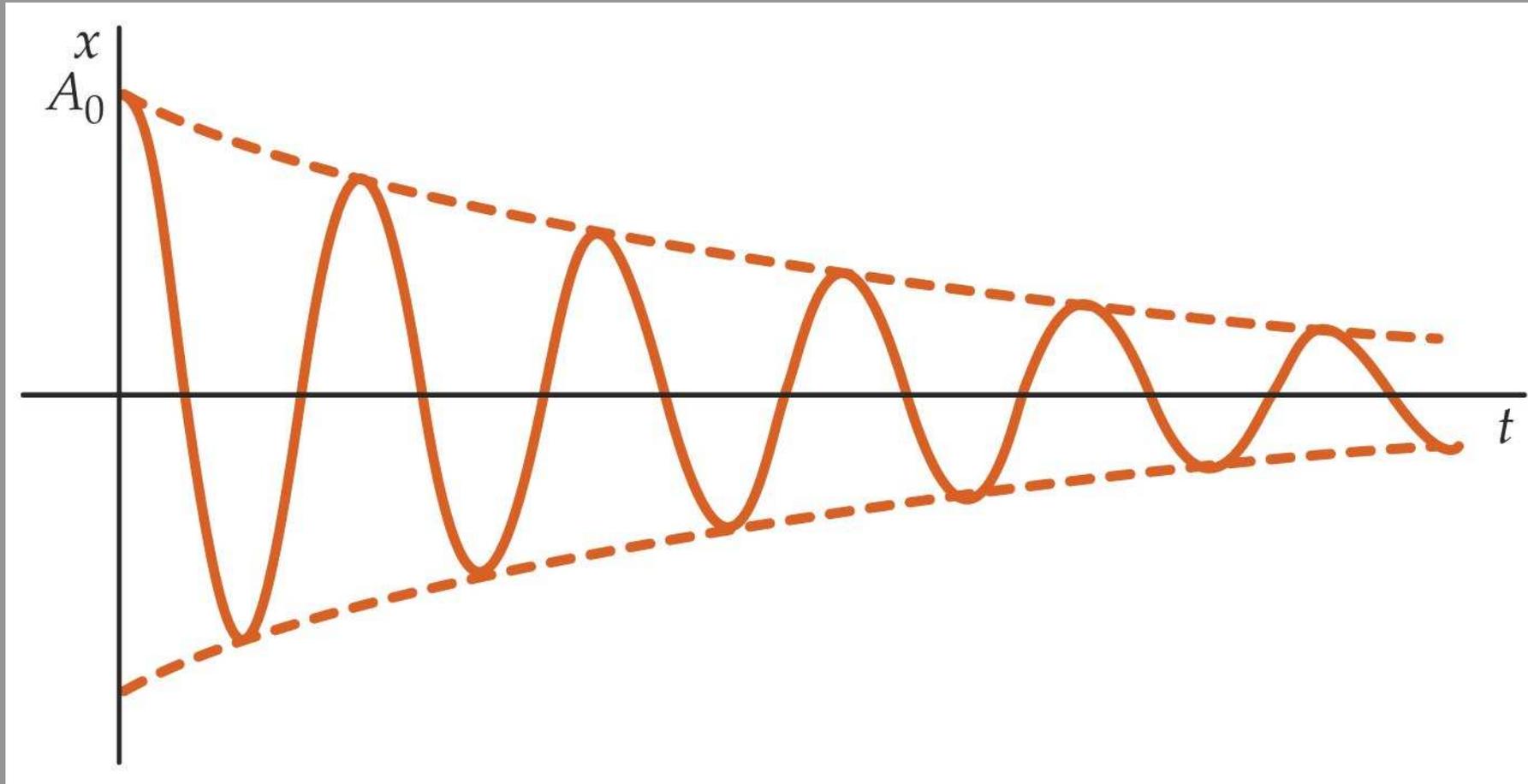
$$\left. \begin{array}{l} m > 0 \\ c > 0 \\ k > 0 \end{array} \right\}$$

Ecuación característica

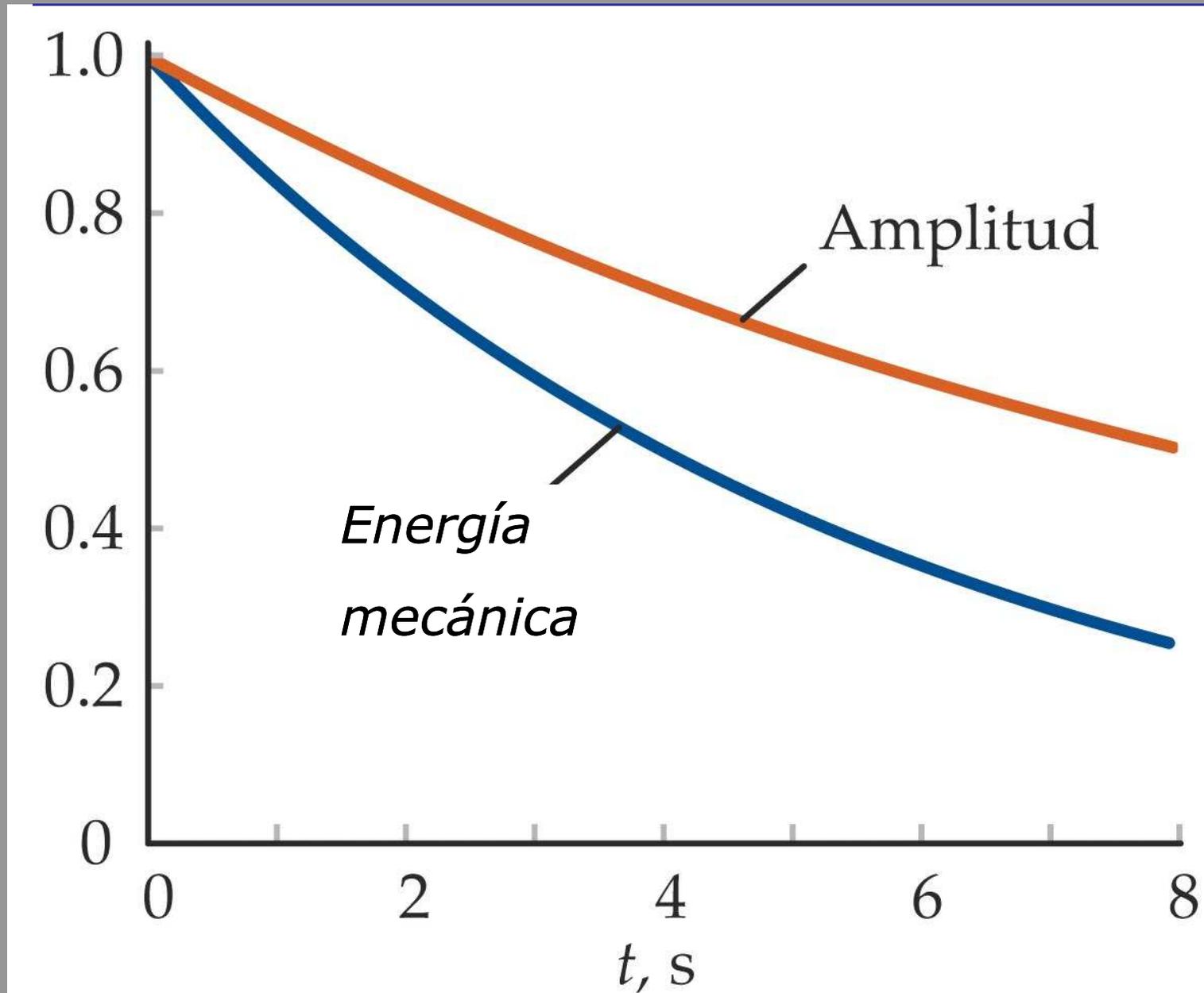
$$mr^2 + cr + k = 0$$

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Vibraciones libres con amortiguamiento



Vibraciones libres con amortiguamiento



Vibraciones libres con amortiguamiento

En todos los **movimientos oscilantes reales** se disipa energía **mecánica** debido a algún tipo de fricción o rozamiento.

Abandonado libremente a sí mismo un muelle o péndulo finalmente se para, es decir, deja de oscilar.

En el planteamiento de nuestro problema suponíamos, por hipótesis, el sistema situado en el vacío despreciando, por tanto, el rozamiento con el aire.

En un **oscilador amortiguado**, el movimiento de la masa se ralentiza por la acción de un émbolo sumergido en un líquido. La pérdida de energía mecánica por unidad de tiempo puede variarse modificando el tamaño del émbolo o la viscosidad del líquido.

La fuerza amortiguadora está siempre dirigida en sentido opuesto a la dirección del movimiento, el trabajo realizado por la fuerza es siempre negativo, por lo que la energía mecánica disminuye.

Vibraciones libres con amortiguamiento

Ecuación del movimiento

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Solución general

■ Amortiguamiento supercrítico $c > 2\sqrt{km}$

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

■ Amortiguamiento crítico $c = 2\sqrt{km}$

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{c_{cr}}{2m} t}$$

■ Amortiguamiento subcrítico $c < 2\sqrt{km}$

$$x = A e^{-\frac{c}{2m} t} \text{sen}(w'_n t + \varphi)$$

Vibraciones libres con amortiguamiento

■ Amortiguamiento supercrítico

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$r_1 \neq r_2$ (raíces reales y distintas)

Solución amortiguada pero no armónica $r_1 < 0$; $r_2 < 0$

El sistema regresa a la posición de equilibrio

■ Amortiguamiento crítico

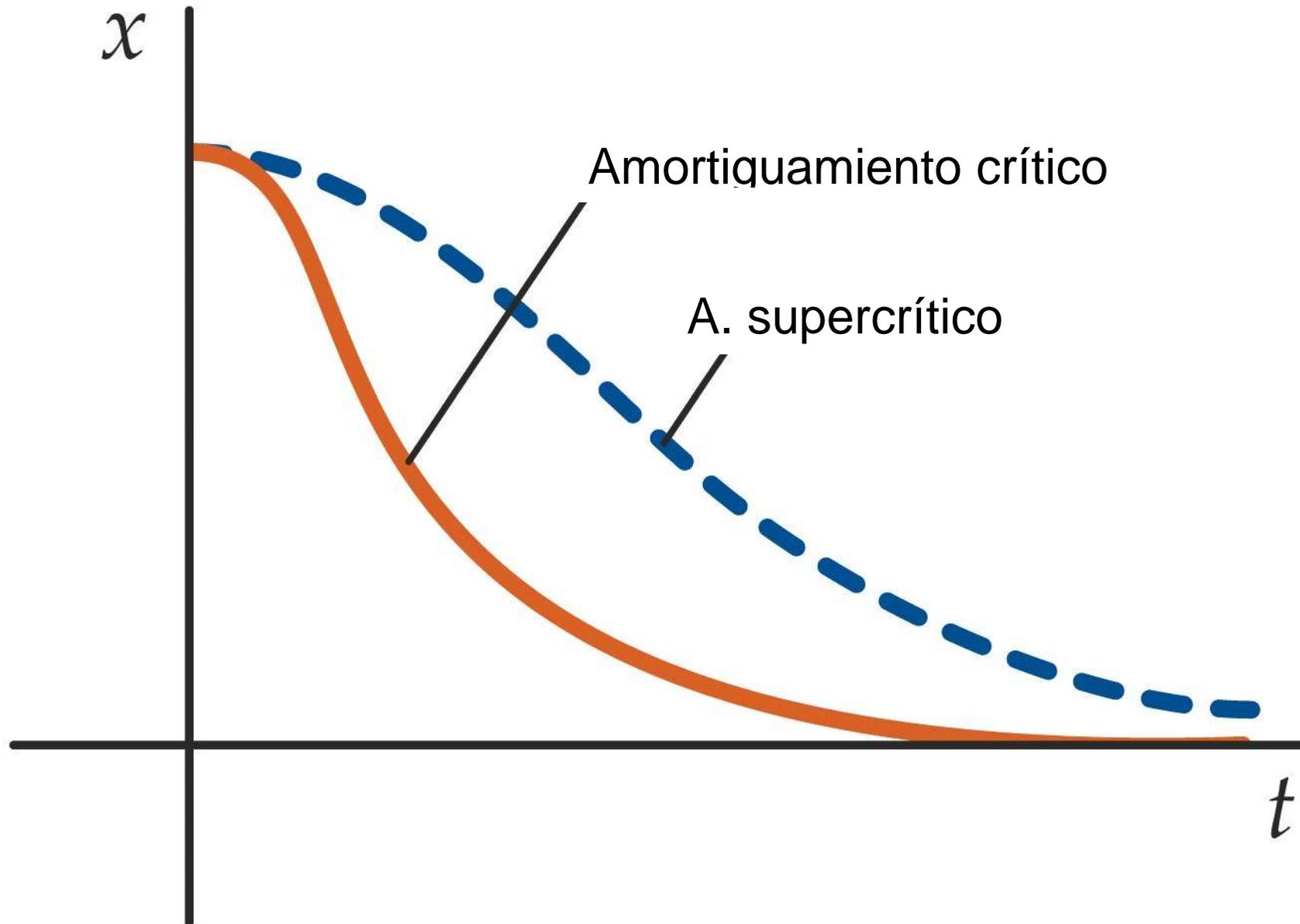
$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{c_{cr}}{2m} t}$$

$r_1 = r_2$ (raíz doble)

Separa los movimientos aperiódicos (no oscilatorios) de los oscilatorios amortiguados

Es la menor cantidad de amortiguamiento para que no oscile el sistema

Vibraciones libres con amortiguamiento



Amortiguador



En muchas aplicaciones prácticas se utiliza un amortiguamiento

- crítico
- ligeramente inferior al crítico

para evitar oscilaciones y que el sistema alcance el equilibrio rápidamente.

Amortiguador



En las llantas de las ruedas de los coches se colocan pesos para equilibrarlos. El objetivo es evitar las vibraciones que producirían las oscilaciones de la dirección del vehículo.

Vibraciones libres con amortiguamiento

Amortiguamiento subcrítico

$$x = a e^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}(w'_n t + \varphi)$$

$$r = \alpha \pm \beta i \text{ (raíces imaginarias conjugadas)}$$

El sistema oscila con amplitud decreciente con el tiempo

Frecuencia de la vibración amortiguada $w'_n = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = w_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{cr}^2}}$

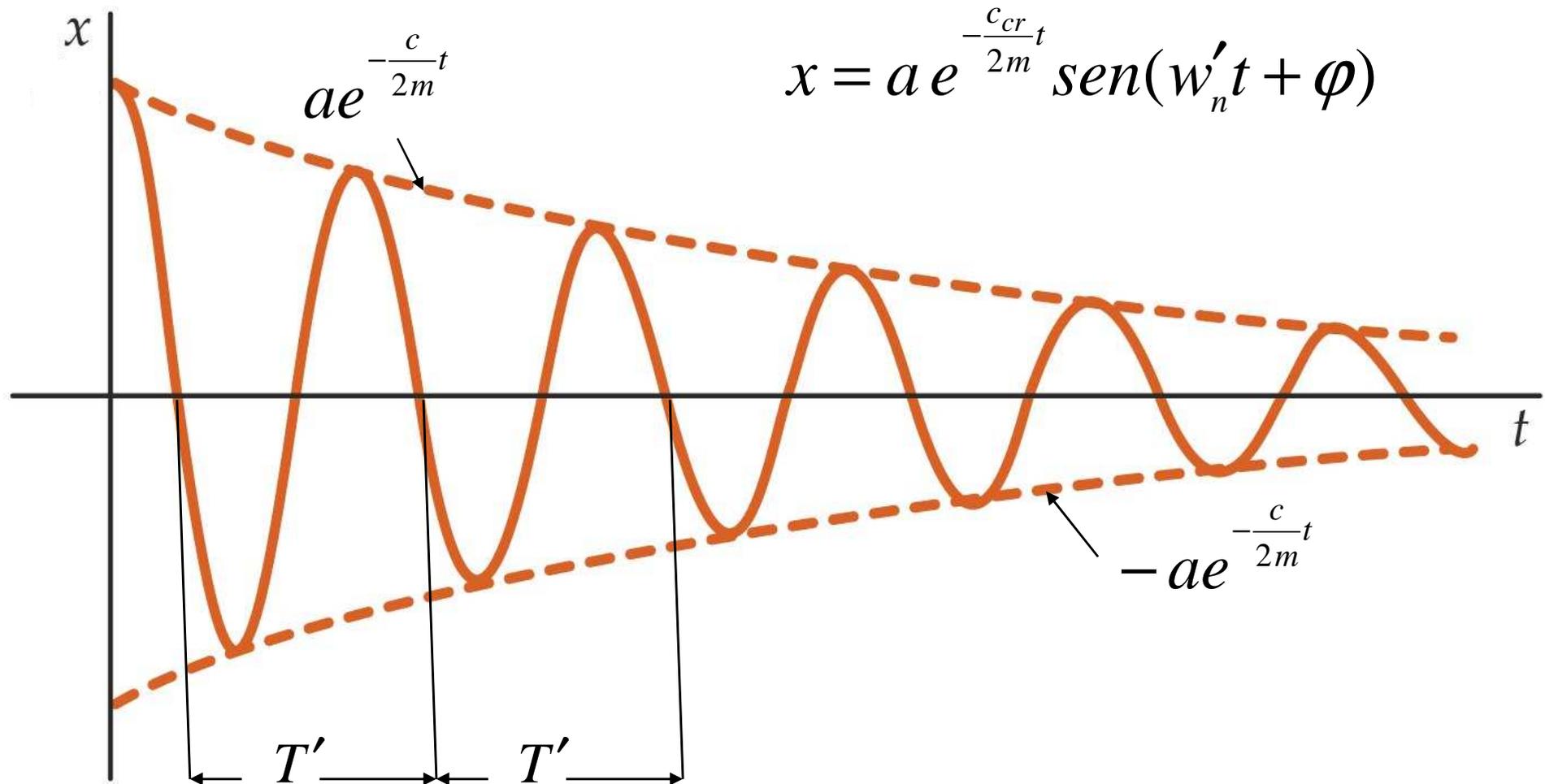
Pseudoperiodo

$$T' = \frac{2\pi}{w'_n} = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}}$$

$$T' > T$$

El pseudoperiodo de la vibración amortiguada es mayor que el periodo correspondiente a la vibración libre.

Vibraciones libres con amortiguamiento



Vibraciones libres con amortiguamiento

Factor de frecuencias $\Omega = \frac{w'_n}{w_n}$

Factor de amortiguación $f = \frac{c}{c_{cr}}$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega = \frac{w'_n}{w_n} \\ f = \frac{c}{c_{cr}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{w_n'^2}{w_n^2} + \frac{c^2}{c_{cr}^2} = 1$$

Relación entre ambos factores:

$$\Omega^2 + f^2 = 1$$

Vibraciones libres con amortiguamiento

Se cumple:

✓ Principio Conservación de la **Energía Total**

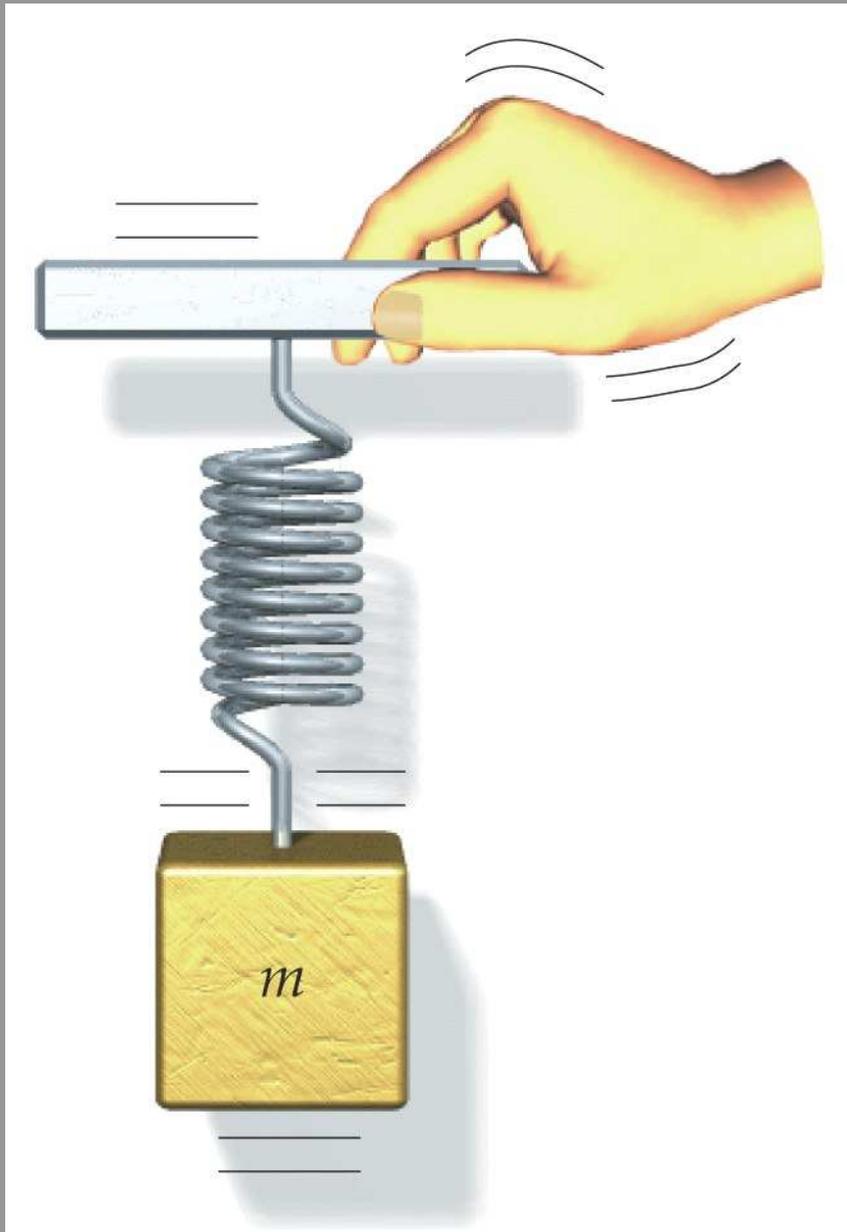
No se cumple

✓ Principio Conservación de la **Energía Mecánica**

$$\underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2}_{E. \text{ cinética}} + \underbrace{c \int \dot{x}^2 dt}_{E. \text{ disipada}} + \underbrace{k \frac{x^2}{2}}_{\substack{\text{Potencial} \\ \text{elástico}}} = \text{Cte} \quad \swarrow \text{E. Total}$$

A lo largo del tiempo hay una transformación de Energía mecánica en Energía que se disipa en forma de calor, cumpliéndose sólo el principio de conservación de la energía total.

Vibraciones forzadas



Para mantener un sistema oscilando, es necesario suministrar alguna forma de **energía** al sistema.



Vibración forzada

Una forma de suministrar **energía** al sistema es mover el soporte hacia arriba y hacia abajo.

Si esos desplazamientos se realizan con movimiento armónico simple, de pequeña amplitud y frecuencia ω el sistema empezará a oscilar y finalmente alcanzará el estado estacionario.

$$F = F_0 \cos \omega t$$

Vibraciones forzadas

Resumen notación frecuencias

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Frecuencia natural (vibración libre sin amortiguamiento)}$$

$$w'_n = w_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2} \quad \text{Frecuencia vibración libre amortiguada}$$

$$W \quad \text{Frecuencia de la fuerza exterior (vibración forzada)}$$

Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad \text{Ecuación diferencial completa}$$

Solución general

$$x = x_h + x_p \quad \begin{cases} x_h = a \cos(\omega_n t + \varphi) \\ x_p = A \cos \omega t \end{cases}$$

Amplitud

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0 / k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

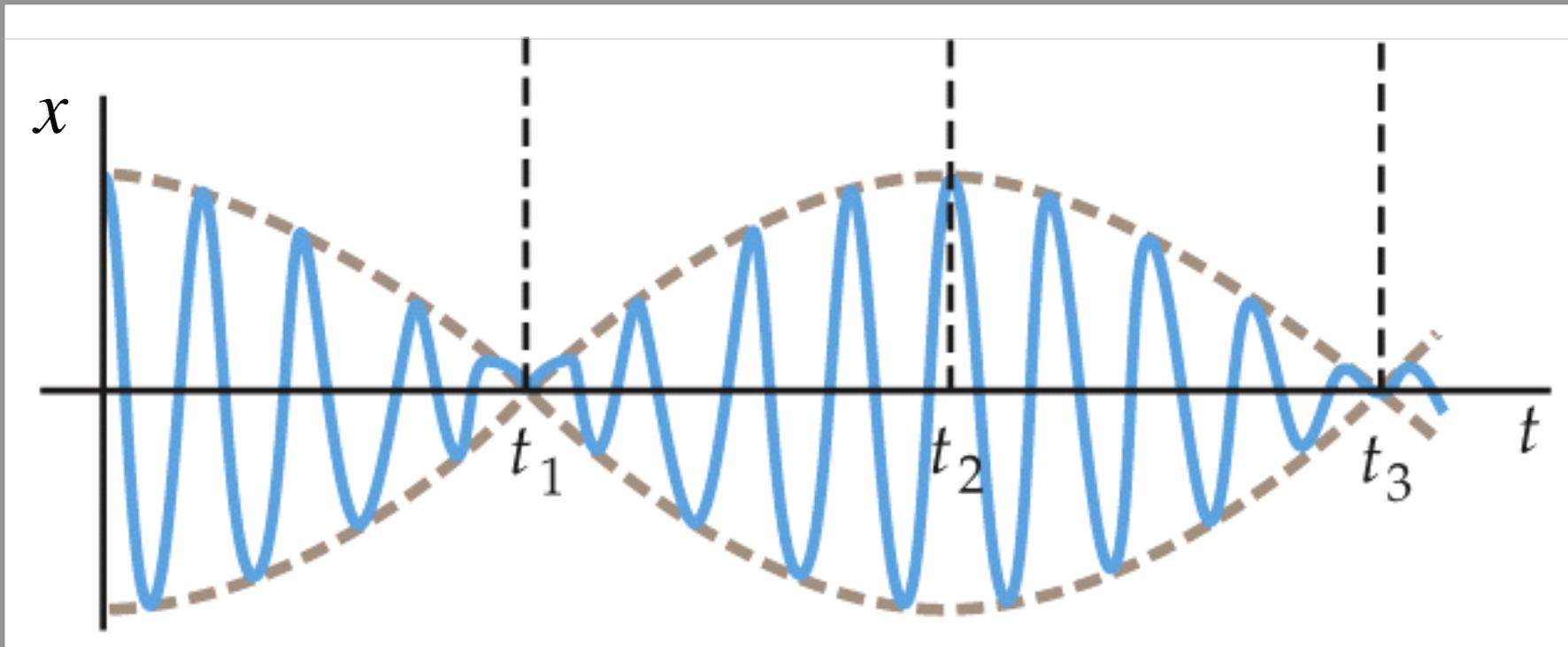
Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

Batimiento Se produce cuando la frecuencia de la fuerza exterior (ω) y la frecuencia natural (ω_n) son próximas

$$\omega_n = \omega + \Delta\omega$$

La amplitud es una función también armónica

$$x = \frac{F_0 \omega_n}{k \Delta\omega} \overbrace{\text{sen} \frac{\Delta\omega}{2} t}^{\text{amplitud}} \text{sen} \omega_n t$$



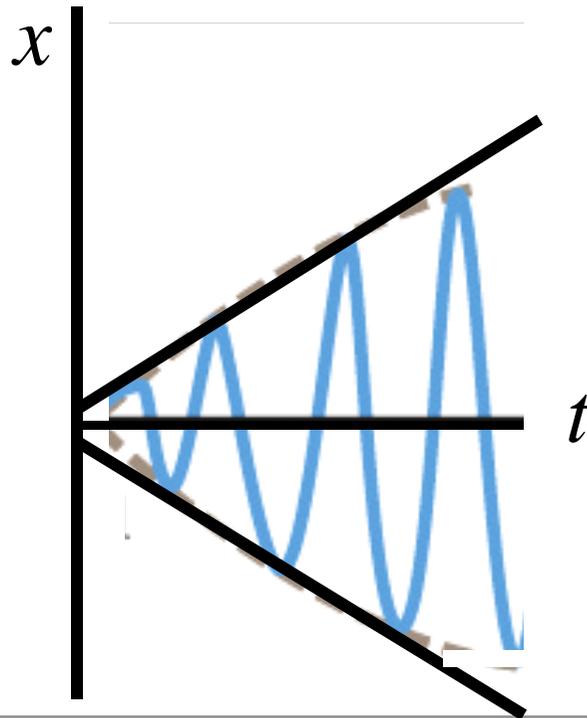
Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

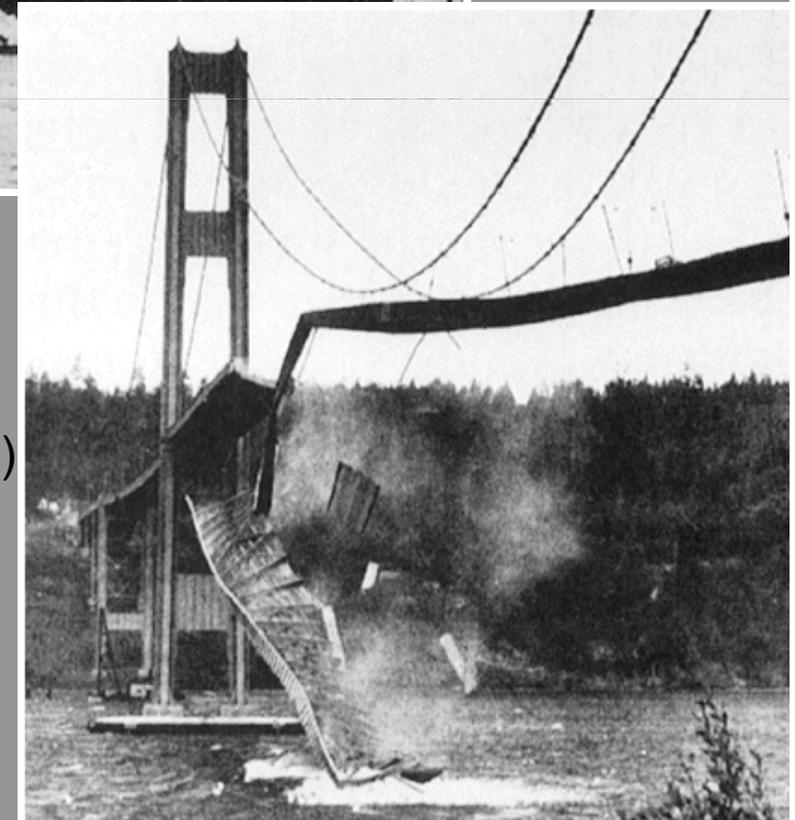
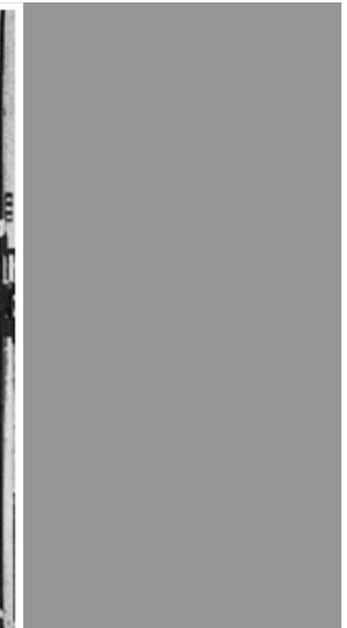
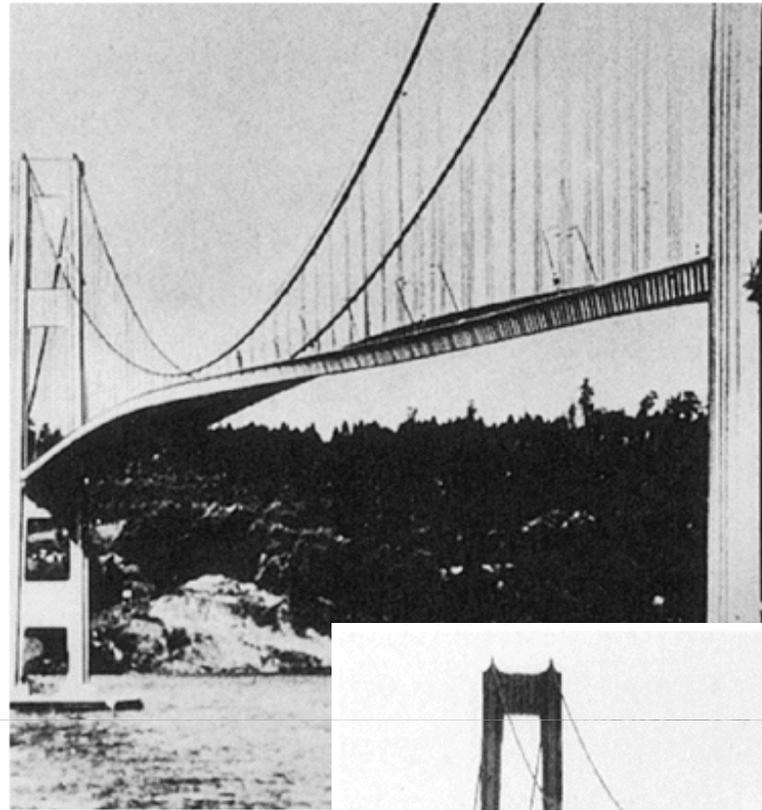
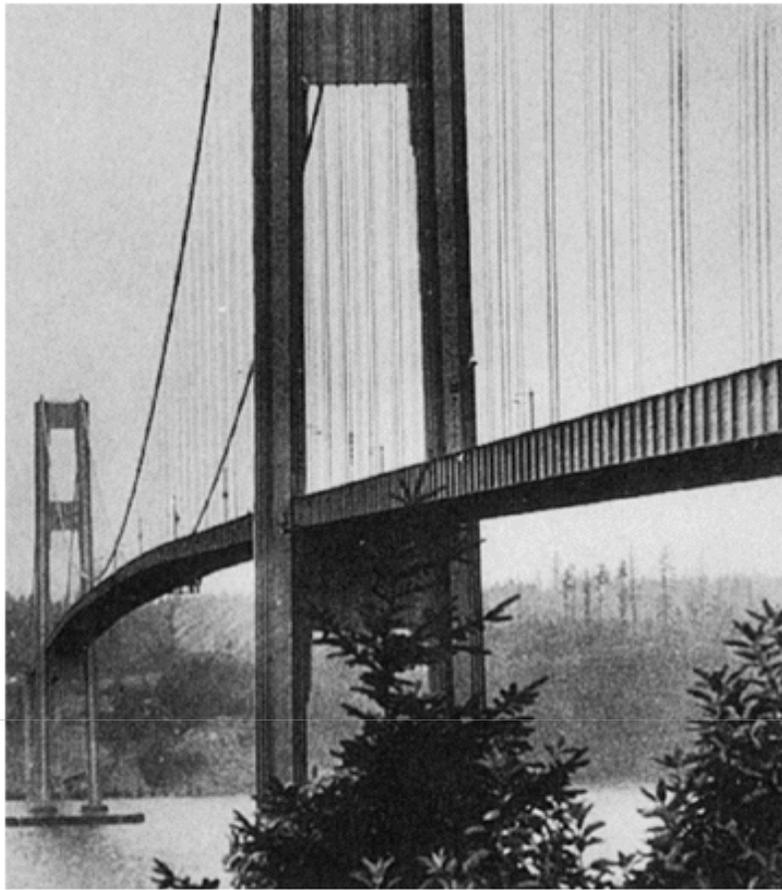
Resonancia Se produce cuando la frecuencia de la fuerza exterior (w) y la frecuencia natural (w_n) se igualan

$$w_n \rightarrow w; \quad \Delta w \rightarrow 0$$

La amplitud es una función creciente con el tiempo

$$x = \overbrace{\frac{F_0 w_n}{2k} t}^{\text{amplitud}} \operatorname{sen} w_n t$$





Resonancia

El viento turbulento produjo ondas estacionarias en el puente colgante de Tacoma Narrows (Washington) produciendo su derrumbamiento el 7-nov-1940, cuatro meses después de su inauguración.

Su longitud era de 1600 con una distancia entre soportes de 850 m (el tercero más grande del mundo en la época en que fue construido).

Vibraciones forzadas con amortiguamiento

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos wt \quad \text{Ecuación del movimiento (ec. diferencial completa)}$$

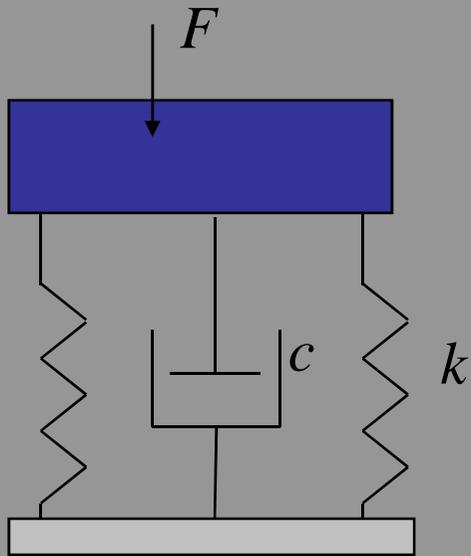
Solución general $x = ae^{-\frac{c}{2m}t} \text{sen}(w'_n t + \varphi) + A \text{sen}(wt' - \theta)$

Amplitud $A = \frac{F_0 / k}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{w_n}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{w}{w_n}\right)^2}}$

Caso de desequilibrio rotatorio: $F_0 =$ fuerza centrífuga

$$F_0 = \mu w^2 r \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu : \text{masa del desequilibrado} \\ r : \text{distancia al eje} \end{array} \right.$$

Transmisión de vibraciones



Fuerza transmitida

$$f = F - mx'' = kx + cx'$$

$$x = A \operatorname{sen}(wt - \theta)$$

$$f = f_0 \operatorname{sen}(wt - \theta)$$

Coeficiente de
transmisibilidad

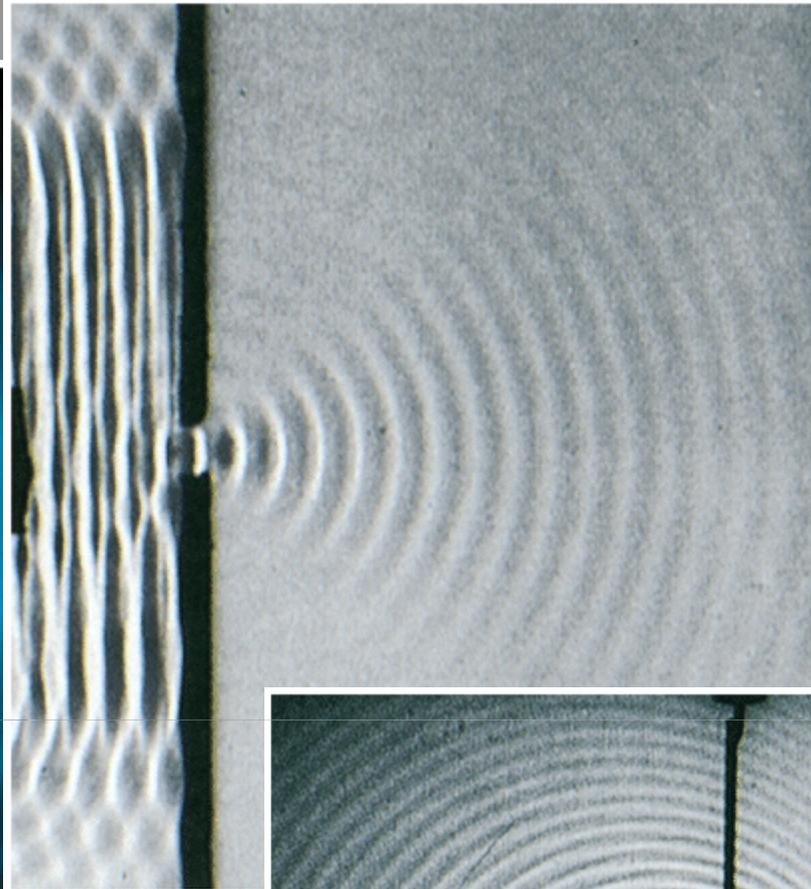
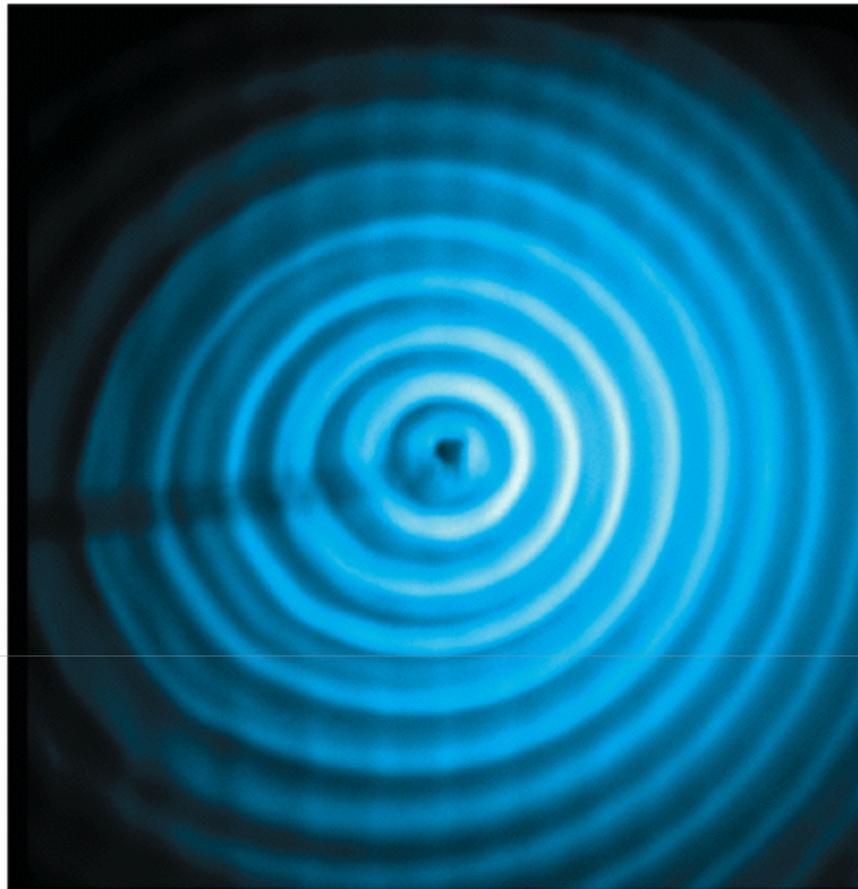
$$\tau = \frac{f_0}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{w}{w_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_{cr}} \frac{w}{w_n}\right)^2}}$$

Movimiento ondulatorio

Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento a través del espacio sin transportar materia. En las ondas mecánicas este proceso tiene lugar mediante una perturbación del medio.

Una propiedad general de las ondas es que su velocidad depende de las propiedades del medio y que es independiente del movimiento de la fuente de las ondas.

Las ondas armónicas poseen una sola frecuencia y longitud de onda (distancia recorrida en el espacio hasta que la función de la onda se repite).



Frentes de onda circulares alejándose de un foco puntual en una cubeta de ondas

Ejemplos de ondas



La oscilación del listón (arriba y abajo) produce frentes de ondas que son líneas rectas

Ejemplos de ondas sonoras

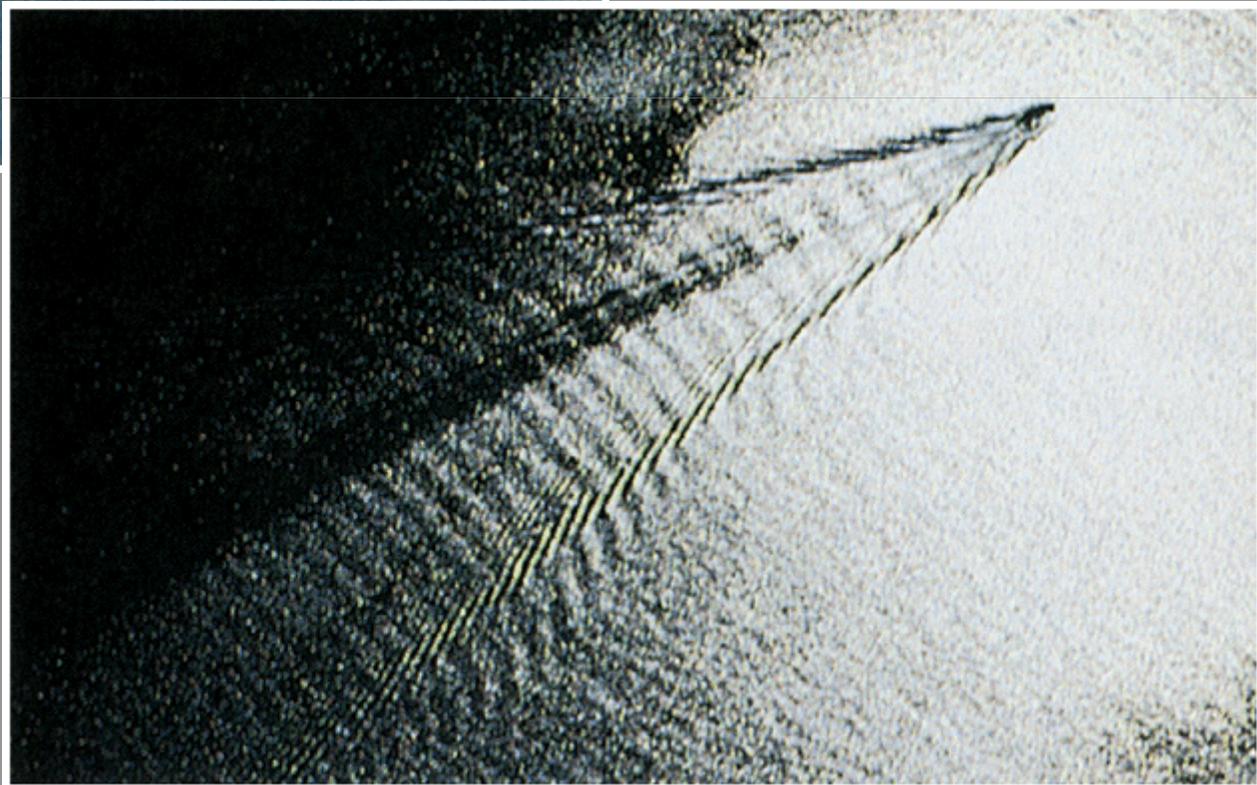




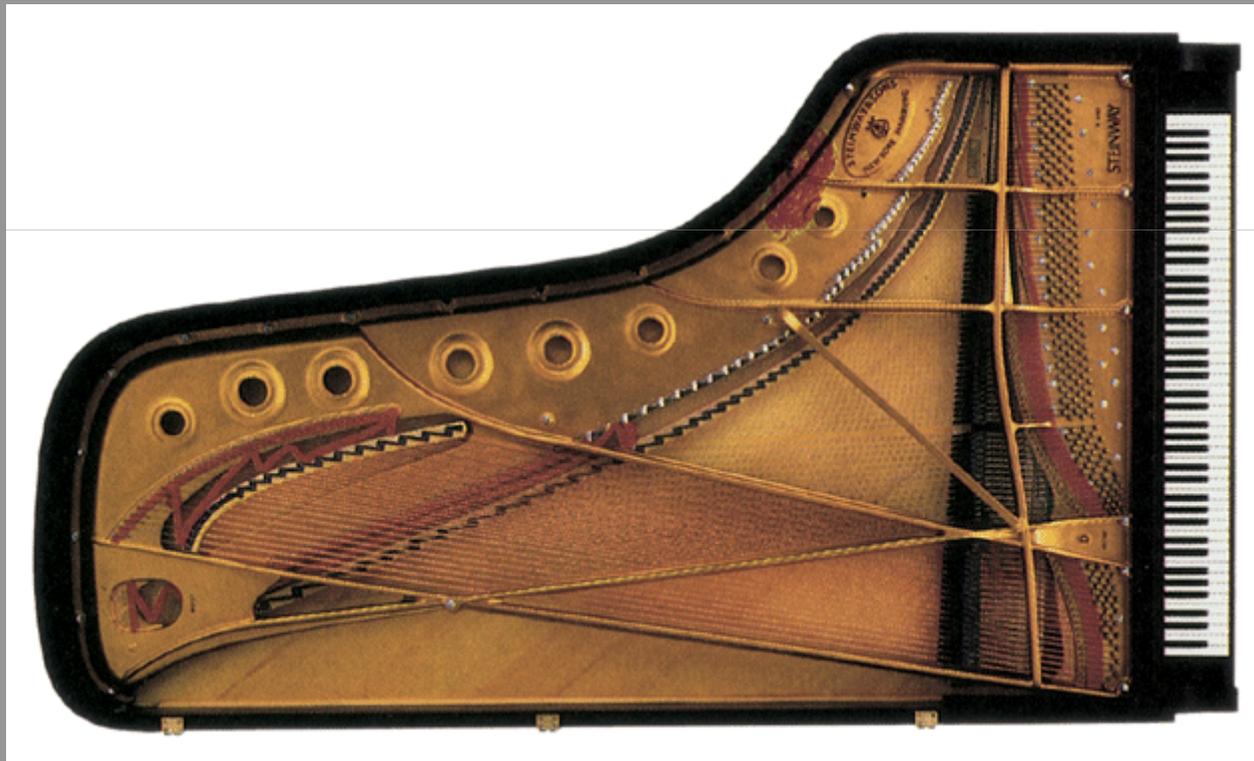
Ejemplos de ondas

Ondas de choque
producidas por un
avión supersónico

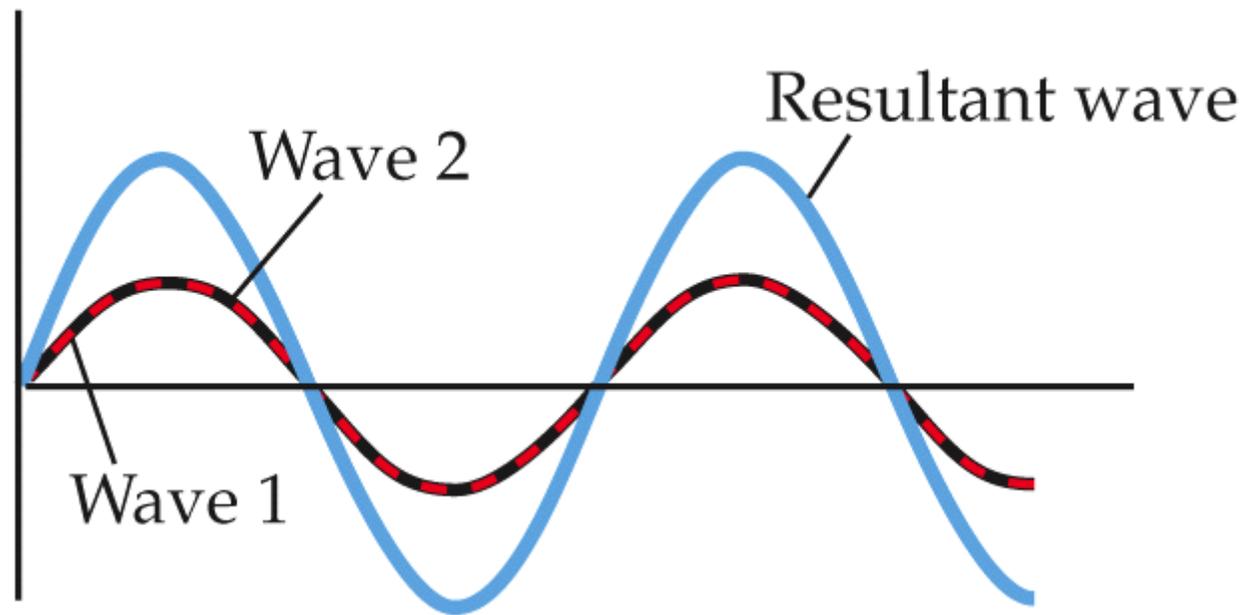
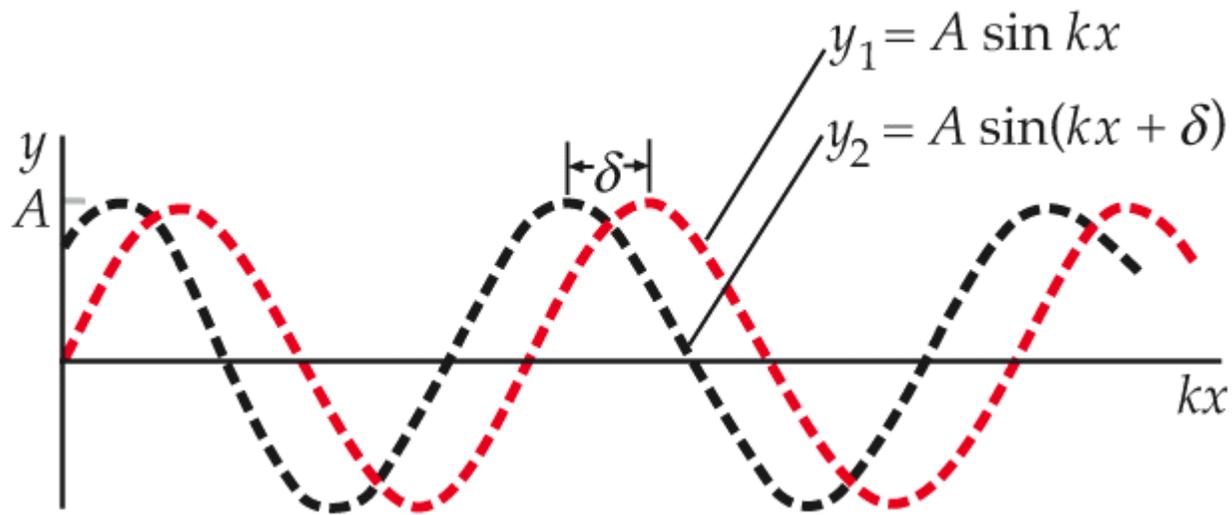
Ondas de proa
producidas por
un buque



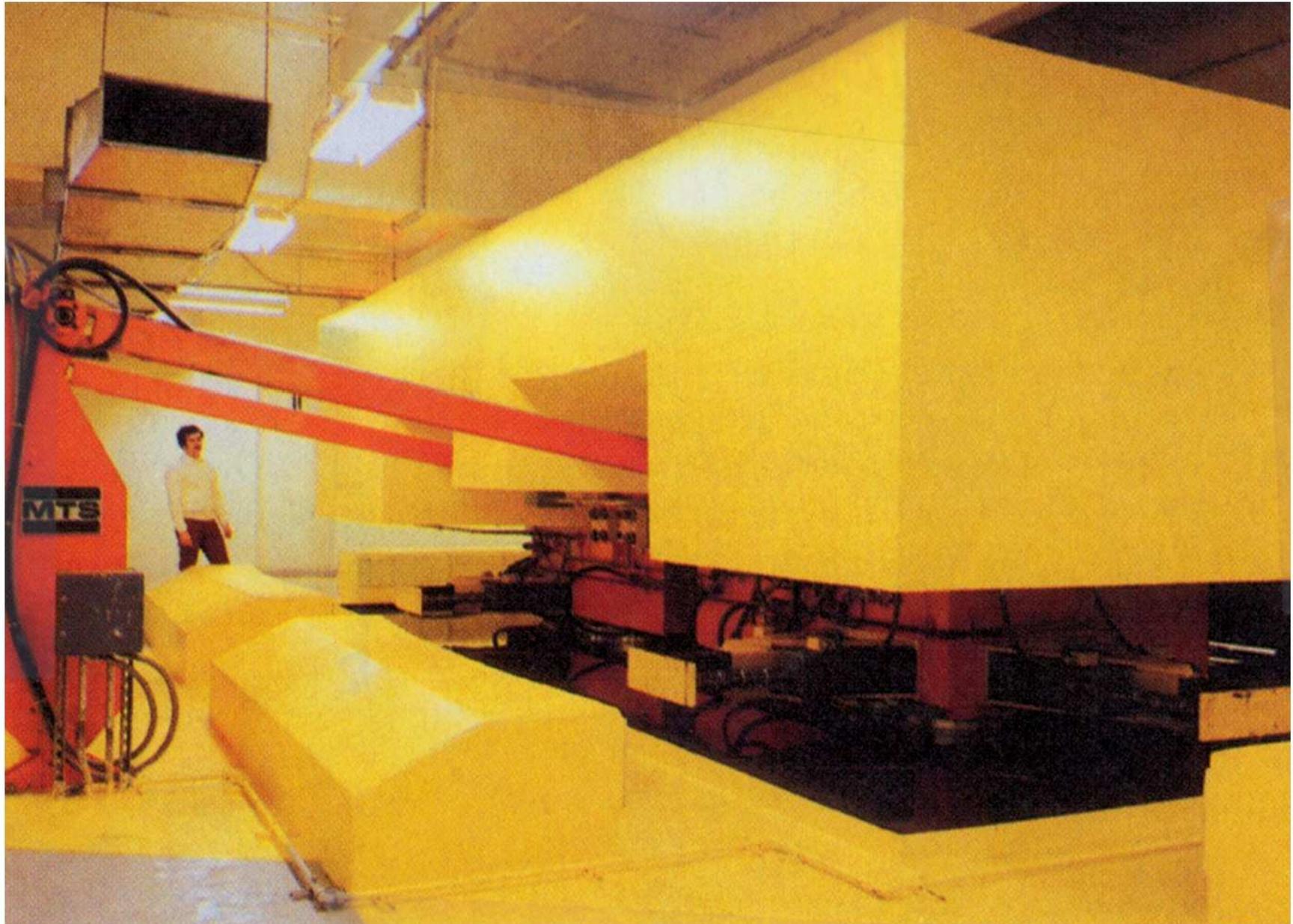
Las cuerdas vibran cuando son golpeadas por los macillos, que se controlan mediante las teclas. Las cuerdas más largas (izquierda) vibran con frecuencias menores que las más cortas (derecha)



Superposición de ondas



Ejemplo sistema amortiguador



Ejemplo sistema amortiguador

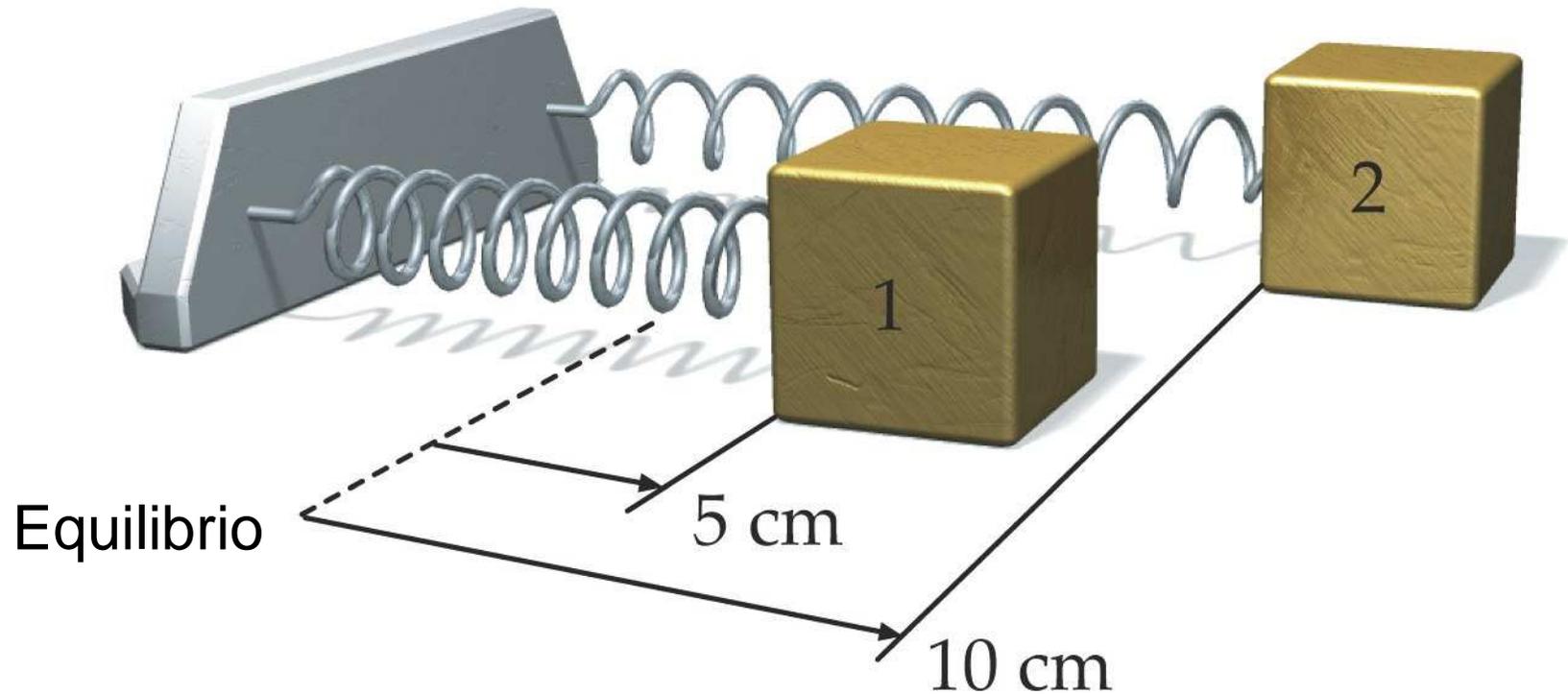
Para reducir las oscilaciones de un gran edificio durante la acción de vientos fuertes se utiliza el sistema amortiguador de la figura anterior, instalado en un piso superior.

Consta de un bloque deslizante conectado al edificio por un muelle. La constante del muelle se elige de modo que la frecuencia natural del sistema muelle-bloque coincida con la frecuencia natural de oscilación del edificio.

Cuando el edificio oscila por la acción del viento, el amortiguador oscila con la misma frecuencia, pero con un desfase de 180° entre sí, con lo cual se reducen grandemente las oscilaciones.

*Ejemplos y problemas
de vibraciones mecánicas*

Ejemplo resortes



Dos masas idénticas (m) sujetas a muelles iguales (k) descansan sobre una superficie sin rozamiento, un muelle se estira 10 cm y el otro 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo. ¿Cuál de los dos alcanza antes el equilibrio? ¿Qué principio de conservación de la energía se cumple?

Aplicación: $k= 200 \text{ N/m}$; $m=0,5 \text{ kg}$

Ejemplo resortes: solución

En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

Como K y m son los mismos para ambos sistemas, los periodos son iguales. Por tanto, los dos sistemas alcanzan la posición de equilibrio **al mismo tiempo**.

El segundo sistema tiene que recorrer una distancia doble a la del primero para alcanzar el equilibrio, pero también posee una velocidad media doble.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad} / \text{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0,314 \text{ s}$$

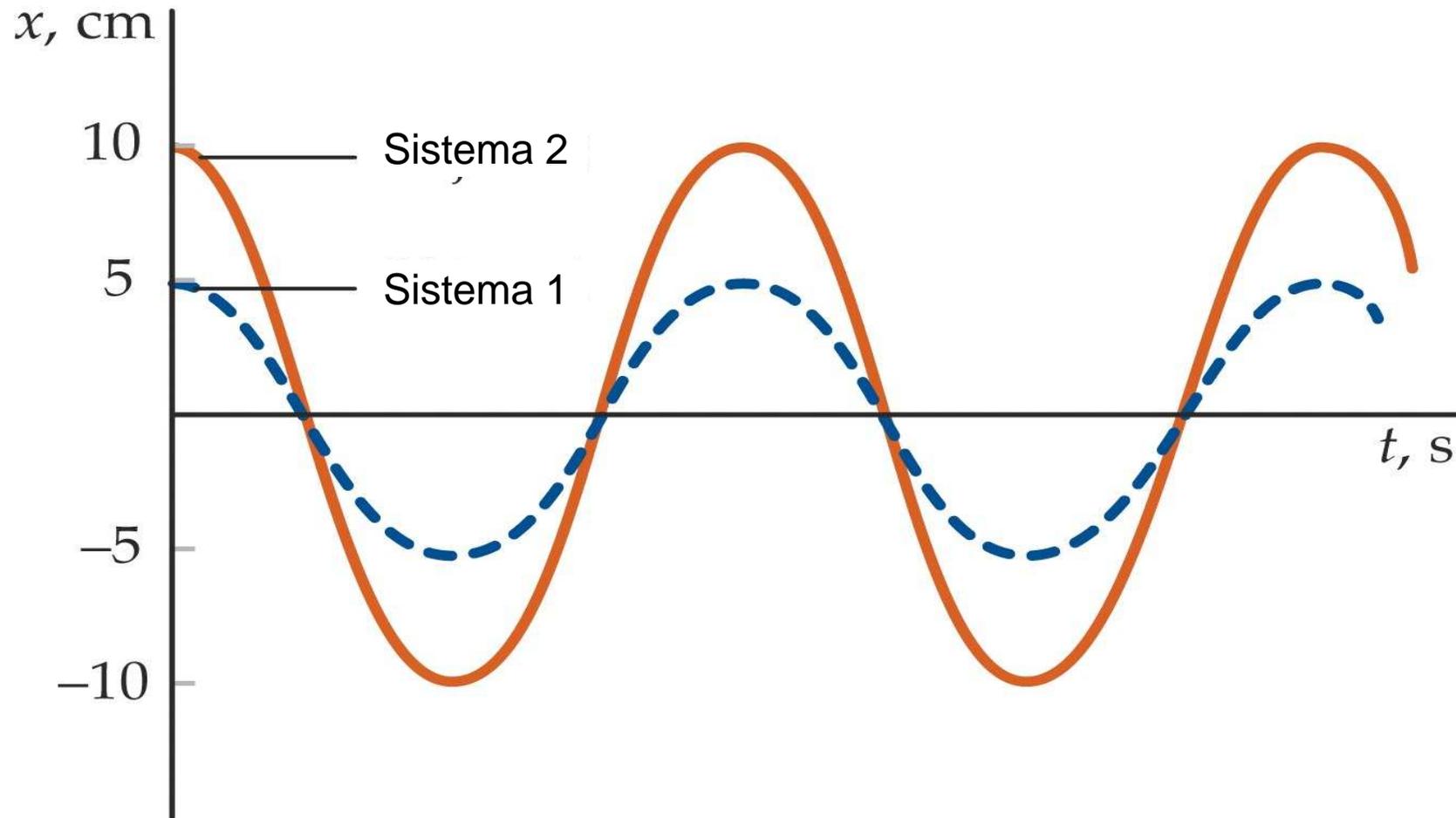
$$\nu = \frac{1}{T} = 3,185 \text{ Hz}$$

Sólo se diferencian en las velocidades

$$x'_1 = a_1 \omega_n = 10 \text{ m} / \text{s}$$

$$x'_2 = a_2 \omega_n = 20 \text{ m} / \text{s}$$

Ejemplo resortes



Los dos sistemas oscilan con la misma frecuencia y el mismo periodo.

El sistema 2, al tener que recorrer el doble de amplitud, lo hace al doble de velocidad.

Ejemplo resortes

Por tratarse de vibraciones libres sin amortiguamiento, en ambos sistemas, se cumple:

- ✓ Principio de conservación de la **Energía Total**
- ✓ Principio de conservación de la **Energía Mecánica**.

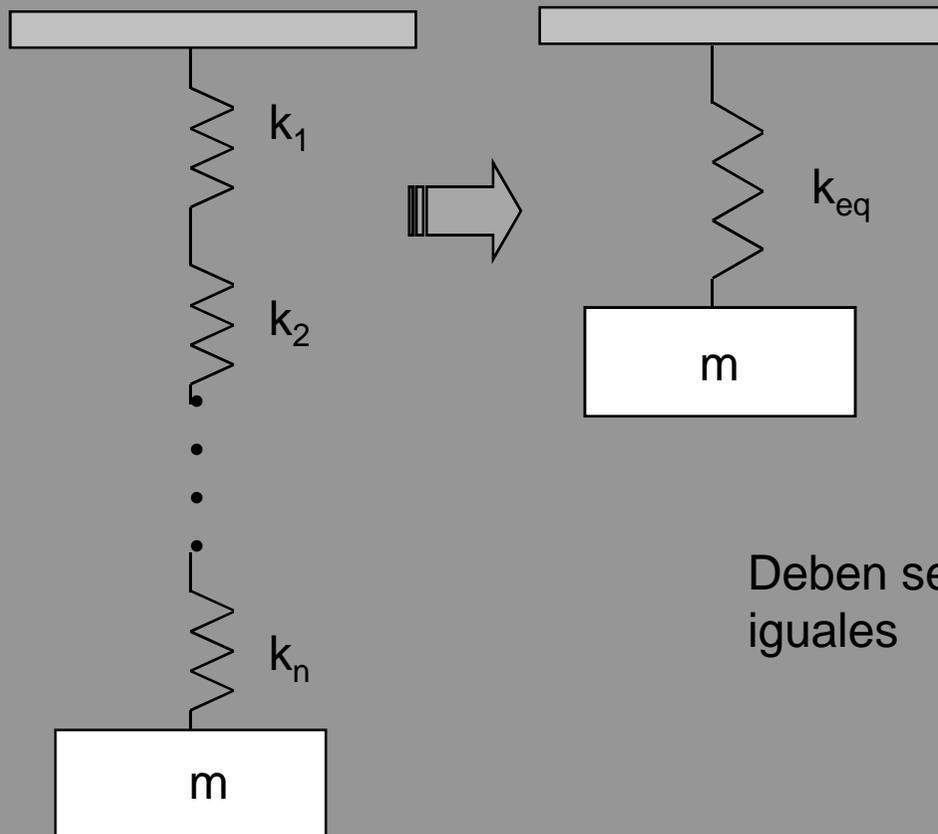
En cada sistema, la energía total comunicada inicialmente al sistema se mantiene constante aunque hay un intercambio energético (cinética-potencial) en el transcurso del movimiento.

La energía del sistema 2 es mayor que la energía del sistema 1

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}ka_1^2 \\ E_2 &= \frac{1}{2}ka_2^2 = \frac{1}{2}k(2a_1)^2 \end{aligned} \right\} E_2 > E_1$$

Asociación de resortes en serie

La elongación total es la suma de las elongaciones de cada muelle; la fuerza elástica es la misma.



$$x = x_1 + x_2 + \dots x_n$$

$$x_1 = \frac{F}{k_1}; \quad x_2 = \frac{F}{k_2}; \quad x_n = \frac{F}{k_n}$$

Deben ser iguales

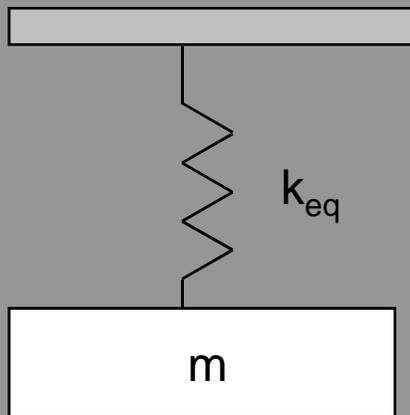
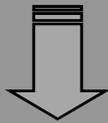
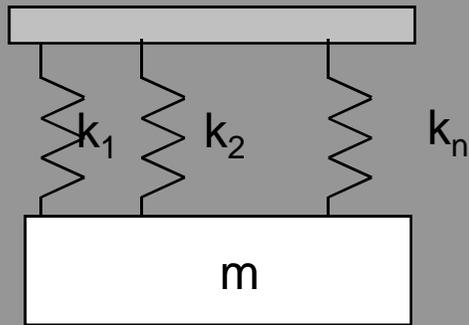
$$x = F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots \frac{1}{k_n} \right)$$

$$x = \frac{F}{k_{eq}}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots \frac{1}{k_n}$$

Constante equivalente
(SERIE)

Asociación de resortes en paralelo



La elongación es la misma para cada muelle, la fuerza elástica se reparte entre ellos.

$$F = k_1 x + k_2 x + \dots k_n x$$

$$F = k_{eq} x$$

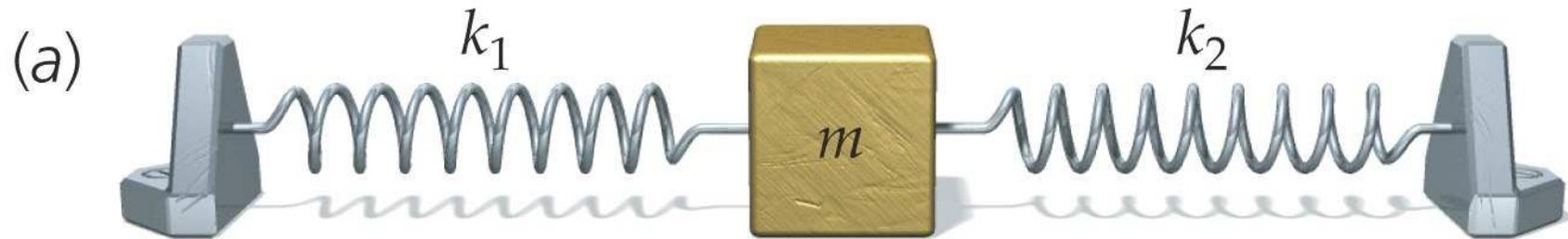
Deben ser iguales

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

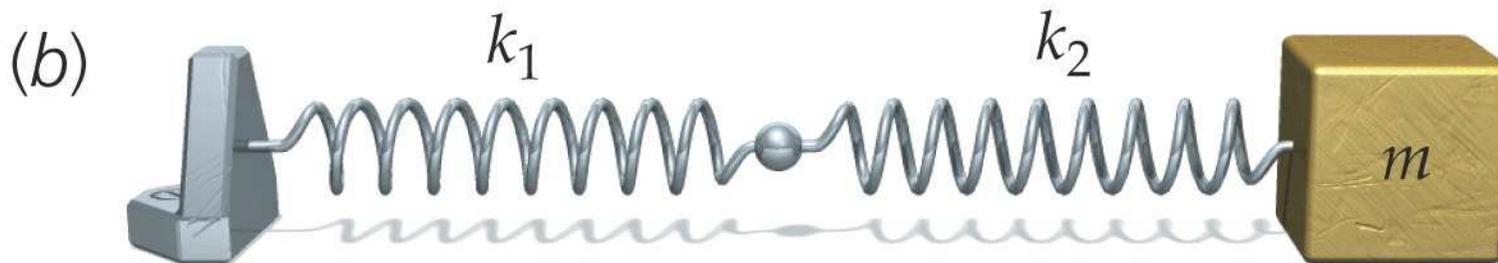
Constante equivalente
(PARALELO)

Asociación de resortes

paralelo



serie



Legislación. Riesgo de las vibraciones

INGENIERÍA E INDUSTRIA (DYNA) Vol 82,N 9, 499-505. Diciembre 2007.
Maite Rikondo Iriondo

Desde la entrada en vigor del Real Decreto 1311/05 de 4 de noviembre sobre disposiciones mínimas de **Seguridad y Salud** relativas a la exposición de los trabajadores a los riesgos derivados de los agentes físicos (vibraciones), el empresario está obligado a realizar la *evaluación de riesgo por exposición a vibraciones*.

Los **Riesgos Laborales** en función de la naturaleza de los mismos en la salud de los trabajadores se clasifican en:

- ❖ Seguridad en el trabajo
- ❖ Higiene Industrial y Ergonomía
- ❖ Psicología Aplicada

Tanto las vibraciones como el ruido se sitúan dentro de la **higiene industrial física**. Desde este punto de vista, las *vibraciones* son *aquellos agentes físicos generados por una energía mecánica transmitidos al cuerpo humano capaces de producir un daño, efecto nocivo o molestia al mismo*.

Legislación. Riesgo de las vibraciones

La **peligrosidad** de las vibraciones viene marcada por la frecuencia, la amplitud, dirección de la vibración y tiempo de exposición.

Las diferentes partes del cuerpo tienen unas determinadas *frecuencias de resonancia*. La resonancia es un fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración coincide con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo.

Ante este fenómeno de resonancia es fundamental que el cuerpo sea capaz de vibrar ya que, si no lo fuera, existiría riesgo de rotura.

En el cuerpo humano se diferencian las vibraciones de:

- ✓ cuerpo completo, (conductores)
- ✓ mano-brazo, (equipo vibrante con empuñadura)

Riesgo de las vibraciones: consecuencias

Las **frecuencias** que afectan al organismo se diferencian en:

- ❑ Muy baja frecuencia (hasta 1 Hz); barcos, aviones, etc.
- ❑ Baja frecuencia (1 Hz - 20 Hz): maquinaria agrícola, vehículos, etc.
- ❑ Alta frecuencia (20 Hz - 1.000 Hz): herramientas manuales, etc.

Las principales alteraciones y/o **patologías** en función de la frecuencia son:

- ❑ Muy baja frecuencia: originan sensaciones de mareo.
- ❑ Baja frecuencia: ejercen su acción sobre la columna vertebral, aparato digestivo, visión, función respiratoria, función cardio-vascular. Producen lumbalgias, hernias, pinzamientos discales...
- ❑ Alta frecuencia: al estar relacionadas con las máquinas portátiles producen trastornos como: artrosis del codo, lesiones de muñeca, afecciones de la mano, calambres, etc.

Las vibraciones se transmiten en las tres direcciones ortogonales.

Riesgo de las vibraciones: evaluación

Evaluación de las vibraciones: Etapas.

1. Identificación de operaciones con riesgo a exposición a vibraciones: muestreo de los diferentes equipos de trabajo y punto de entrada de la vibración.
2. Medición de las vibraciones mediante vibrómetros, constan de acelerómetro e identificador de frecuencias.
3. Evaluación del tiempo de exposición a cada una de las diferentes exposiciones.
4. Estimación de la exposición diaria, normalizado para un periodo de 8 horas.
5. Evaluación por exposición a vibraciones comparándolos con los límites establecidos (RD 1311/2005).

Control y reducción de las vibraciones: Recomendaciones

- Definición de otros métodos de trabajo que reduzcan la necesidad de exponerse a las vibraciones mecánicas.
- Elegir el equipo de trabajo adecuado, bien diseñado desde el punto de vista ergonómico y generador del menor nivel de vibraciones.
- Aislar el equipo vibrante o el trabajador de la zona vibrante.
- Colocar sistemas de amortiguación en equipos de trabajo a fin de disminuir la emisión y propagación de las vibraciones.
- Suministro de equipo auxiliar que reduzca los riesgos de lesión por vibraciones (asientos, amortiguadores, mangos recubiertos, guantes anti-vibración, etc.)
- Realizar programas de mantenimiento de equipos.
- Informar y formar adecuadamente a los trabajadores sobre el manejo correcto del equipo de trabajo.
- Limitación de la duración e intensidad de la exposición.

FIN