TEORÍA DE CAMPOS Y OPERADORES DIFERENCIALES

Física Aplicada a la Ingeniería

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AGRÓNOMOS

Dpto. Física y Mecánica de la Ingeniería Agroforestal

Prof. María Victoria Carbonell

Las imágenes de la presentación han sido obtenidas del libro:

Physics for Scientists and Engineers
Paul A. Tipler • Gene Mosca

Campo escalar

Supongamos una función $f = f(x, y, z)$

Con las siguientes condiciones:

- ✓ uniforme
- ✓ continua
- ✓ finita
- ✓ admite derivadas parciales

Esta función es unívoca, asocia a cada punto del espacio un valor único y real $\Rightarrow$ CAMPO ESCALAR.

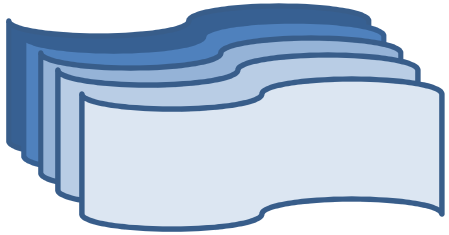
Está definido en una determinada región del espacio

Ejemplos: densidad, presión

Superficies equiescalarares o superficies de nivel

Lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el campo escalar toma un valor constante.

$$f(x, y, z) = C$$



Para cada valor de la constante obtenemos una superficie de la familia.

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= C_1 \\ f(x, y, z) &= C_2 \\ f(x, y, z) &= C_n \end{aligned}\right\} \qquad f(x, y, z) = C$$

Propiedad:

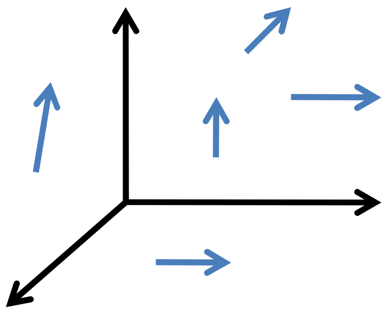
Las superficies de nivel no se cortan aunque pueden estar tan próximas como queramos, es decir, no tienen puntos en común.

Campo vectorial

Consideramos tres funciones escalares y formamos un vector:

$$\vec{v} = v_x\,(x, y, z)\,\vec{i} + v_y\,(x, y, z)\,\vec{j} + v_z\,(x, y, z)\,\vec{k}$$

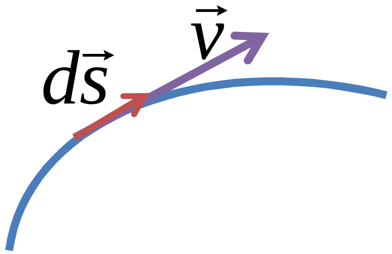
Este campo vectorial es una función unívoca, asocia a cada punto del espacio un único vector.



Ejemplos: velocidad, aceleración, fuerza….

Líneas de Campo

Curvas tales en cada punto del espacio son tangentes al vector asociado a dicho punto. Se cumple:



$$d\vec{s} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Su integración proporciona dos superficies cuya intersección nos da las líneas de campo.

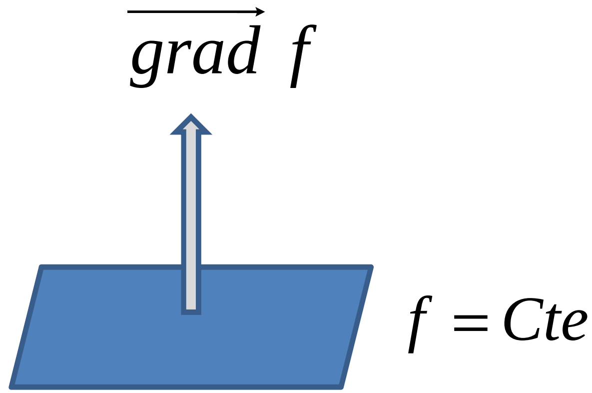
Propiedad: por un punto del espacio pasa una sola línea de campo.

Gradiente de un campo escalar $f = f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Líneas de Gradiente

$$\frac{dx}{\partial f / \partial x} = \frac{dy}{\partial f / \partial y} = \frac{dz}{\partial f / \partial z}$$



El gradiente es perpendicular a la superficie de nivel. Las líneas de gradiente son tangentes al vector gradiente. En consecuencia, las líneas de gradiente son perpendiculares a la superficie de nivel en el punto considerado

Propiedades del Gradiente

$$\overrightarrow{grad}(f_1 + f_2) = \overrightarrow{grad}\, f_1 + \overrightarrow{grad}\, f_2$$

$$\overrightarrow{grad}(f_1 \cdot f_2) = f_2\, \overrightarrow{grad}\, f_1 + f_1\, \overrightarrow{grad}\, f_2$$

$$\overrightarrow{grad}\left({}^{f_1}\!\!\diagup_{f_2}\right) = \frac{1}{f_2^{\,2}}\left(f_2\, \overrightarrow{grad}\, f_1 - f_1\, \overrightarrow{grad}\, f_2\right)$$

$$\overrightarrow{grad}\left({}^{1}\!\!\diagup_{f}\right) = -\frac{1}{f^{\,2}}\, \overrightarrow{grad}\, f$$

Divergencia de un campo vectorial

$$\vec{v} = v_x\,(x,y,z)\,\vec{i} + v_y\,(x,y,z)\,\vec{j} + v_z\,(x,y,z)\,\vec{k}$$

$$div\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

$$Si\ \ div\,\vec{v} = 0 \rightarrow\ \vec{v} : solenoidal\ o\ adivergente$$

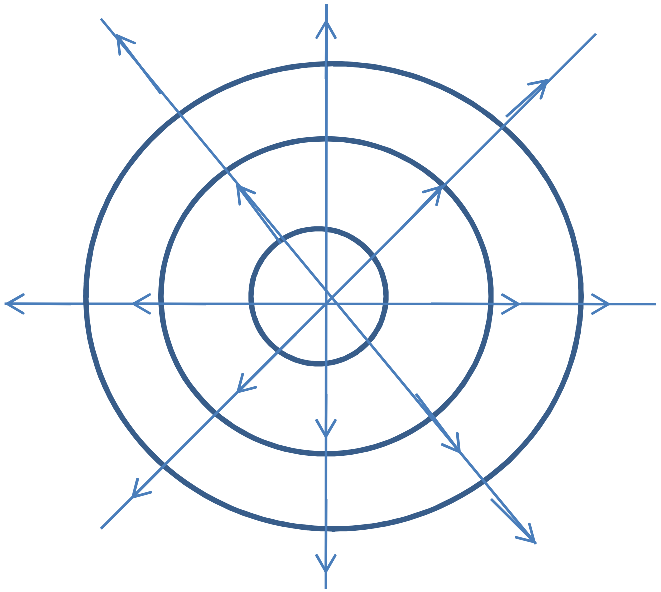
Si la divergencia de $\vec{v}$ en un punto del espacio es:

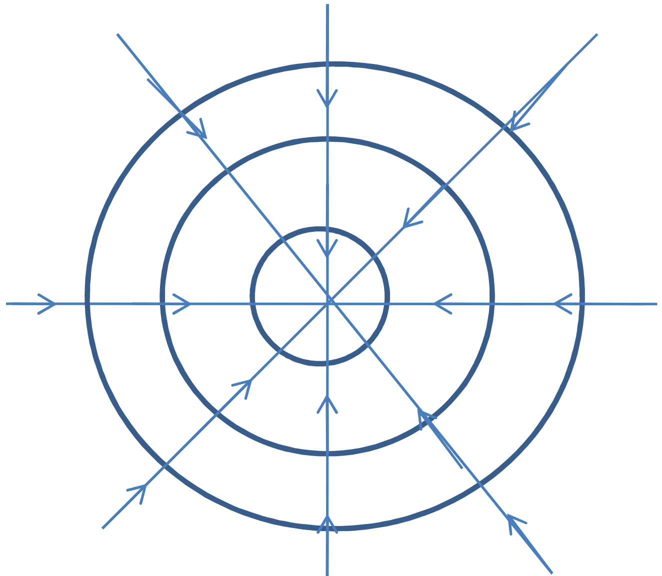
$div\,\vec{v} > 0$ Punto SURGENTE

$div\,\vec{v} < 0$ Punto SUMENTE

$div\,\vec{v} = 0$ Punto de flujo estacionario o conservativo

Divergencia de un punto del espacio





$$div\,\vec{v} \succ 0$$

Flujo positivo o saliente

$$div\,\vec{v} \prec 0$$

Flujo negativo o entrante

Divergencia de un campo vectorial $\vec{v}$ por un campo escalar ρ

$$div(\rho \cdot \vec{v}) = \rho \, div \, \vec{v} + \vec{v} \, \overrightarrow{grad} \, \rho$$

$$\vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = \rho \, \vec{\nabla} \, \vec{v} + \vec{v} \vec{\nabla} \rho$$

Siendo:

ρ: campo de densidades

$\vec{v}$: campo de velocidades

NOTA: Esta expresión aparece en la ecuación de continuidad (Mecánica de fluidos)

Caso particular: Divergencia de un campo de gradientes

$$div(gr\vec{a}d\ f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = lap\ f$$

Laplaciano de un campo escalar

$$Si: \quad lap\ f = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

El campo escalar f es una función armónica ya que cumple la ecuación de Laplace

Operador nabla de Hamilton

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Si se aplica el operador nabla a un campo escalar se obtiene su **gradiente**

$$\vec{\nabla} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Si se aplica el operador nabla a un campo vectorial se obtiene su **divergencia**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Operador Laplaciano

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

✓ Si se aplica el operador laplaciano a un campo escalar se obtiene:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ESCALAR

$$Si \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0;$$

✓ Si se aplica el operador laplaciano a un campo vectorial se obtiene:

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \, \vec{i} + \Delta v_y \, \vec{j} + \Delta v_z \, \vec{k}$$

VECTOR

Laplaciano de un campo escalar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Si el laplaciano de un campo escalar es nulo:

$$Si \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0;$$

El campo escalar f es **armónico,** ya que cumple la ecuación de Laplace

Laplaciano de un campo vectorial

$$\overrightarrow{lap}\,\vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = \Delta \vec{v}$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \,\vec{i} + \Delta v_y \,\vec{j} + \Delta v_z \vec{k}$$

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_x = 0 \\ \Delta v_y = 0 \\ \Delta v_z = 0 \end{array} \right\} \quad v_x, v_y, v_z$$

Son funciones armónicas

Rotacional de un campo vectorial

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Propiedades del rotacional

1. El rotacional de un campo de gradientes es cero

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{grad}\,f\,) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f \;= \vec{0}$$

Los campos de gradientes son irrotacionales

Si $\quad \overrightarrow{rot}\,\vec{v} = 0 \;\Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{grad}\,f$

2. La divergencia del rotacional de un campo vectorial es cero

$$div(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}) = 0$$

Los campos rotacionales son solenoidales

Propiedad del doble rotacional

$$\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{v}) = \overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{v}) - lap\,\vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$$

Casos particulares:

1. Si el campo es solenoidal $\quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\Delta\vec{v}$

2. Si el campo es armónico $\quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{v})$

3. Si el campo es solenoidal y armónico

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0$$

Resumen de operadores diferenciales

	$gr\vec{a}d$	div	$r\vec{o}t$
$gr\vec{a}d$	———	$gr\vec{a}d\,(div)$	———
div	$div\,(gr\vec{a}d) = lap$	———	$div\,(gr\vec{a}d) = 0$
$r\vec{o}t$	$r\vec{o}t\,(gr\vec{a}d) = 0$	———	$r\vec{o}t\,(r\vec{o}t)$

Derivada direccional de un campo escalar según una dirección

Dado un campo escalar $f = f(x,y,z)$

y una dirección dada por el vector $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

La derivada direccional de un campo escalar según una dirección se obtiene a partir de la expresión:

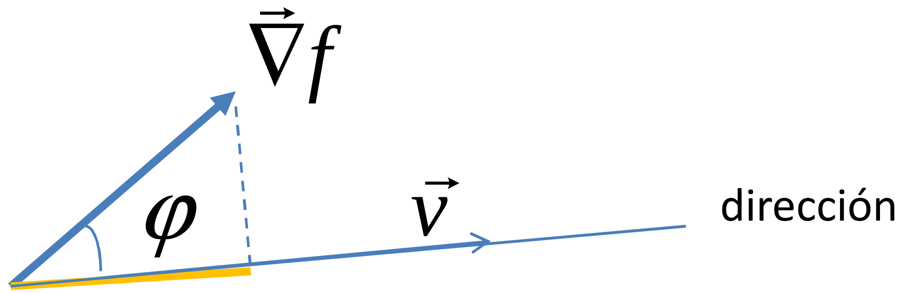
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\vec{\nabla} f \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y \, \frac{\partial f}{\partial z} v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

ESCALAR

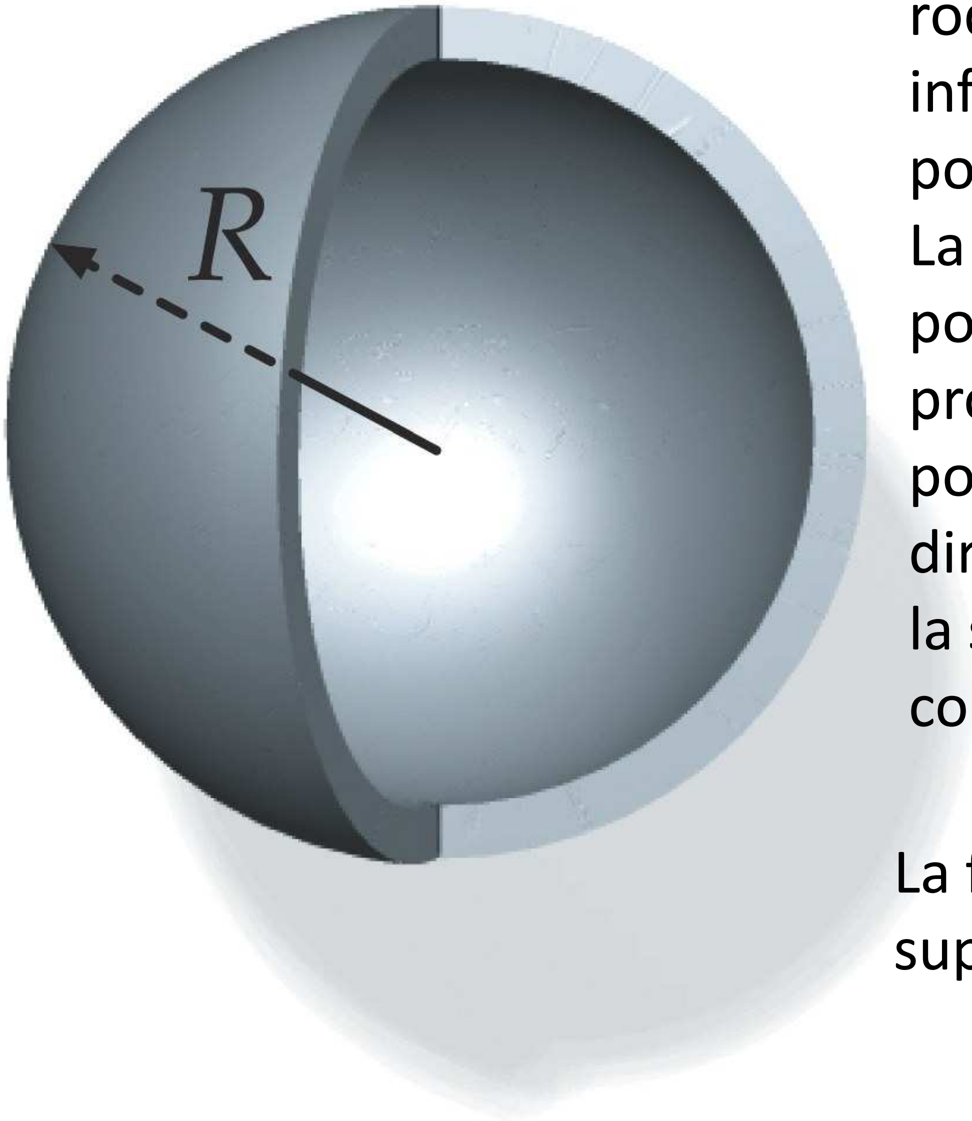
Derivada direccional de un campo escalar según una dirección

La derivada direccional de un campo escalar según una dirección es la **proyección** del gradiente sobre dicha dirección. Es una magnitud escalar que se obtiene multiplicando el vector gradiente por un vector unitario en la dirección dada.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}_v = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos\varphi$$



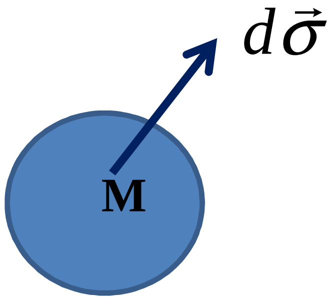
Definiciones intrínsecas



Se considera un punto M rodeado de un volumen infinitesimal delimitado por una superficie cerrada. La superficie se representa por vector, de módulo la propia superficie, sentido positivo hacia el exterior y dirección perpendicular a la superficie en el punto considerado.

La figura representa una superficie esférica.

Definiciones intrínsecas



M: punto del espacio
v: volumen infinitesimal (delimitado por σ)
dσ: superficie infinitesimal cerrada
$d\vec{\sigma}$: vector superficie

$$\overrightarrow{grad}\, f = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \iint f \cdot d\vec{\sigma}$$

$$div\ \vec{v} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \iint \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

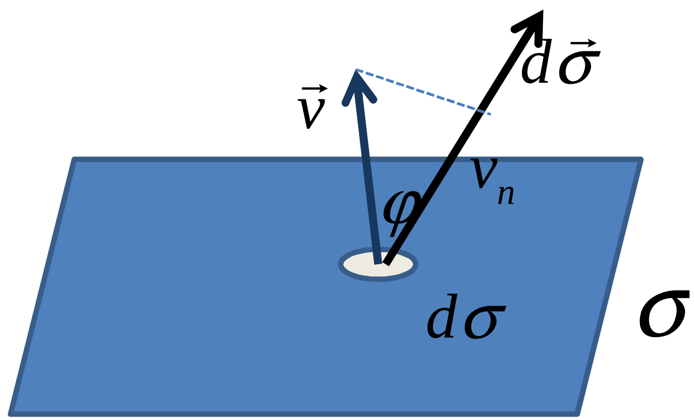
$$\overrightarrow{rot}\, \vec{v} = -\lim_{v \to 0} \frac{1}{v} \iint \vec{v} \wedge d\vec{\sigma}$$

Flujo de un vector a través de una superficie

$$d\Phi = v_n d\sigma;$$ Flujo elemental

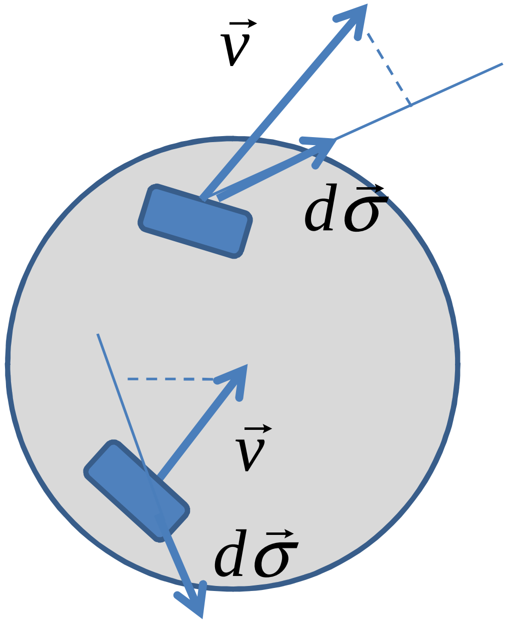
$$v_n = v \cdot \cos\varphi;\ v_n d\sigma = v \cdot \cos\varphi d\sigma = \vec{v}\, d\vec{\sigma}$$

$$\Phi = \iint_\sigma \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$



Para obtener el flujo de un campo vectorial a través de una superficie (σ), tomamos una superficie infinitesimal ($d\sigma$) y el vector que la representa, proyectamos el campo vectorial sobre esa dirección (v_n) se obtiene el flujo elemental y por integración el flujo total.

Caso particular:
Flujo de un vector a través de una superficie cerrada



Flujo saliente (+)

Flujo entrante (-)

$$\Phi_{neto} = \oiint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Phi_{neto} = \Phi_{saliente} - \Phi_{entrante}$$

Casos:

$$\Phi_{sale} > \Phi_{entra} \rightarrow \Phi > 0$$

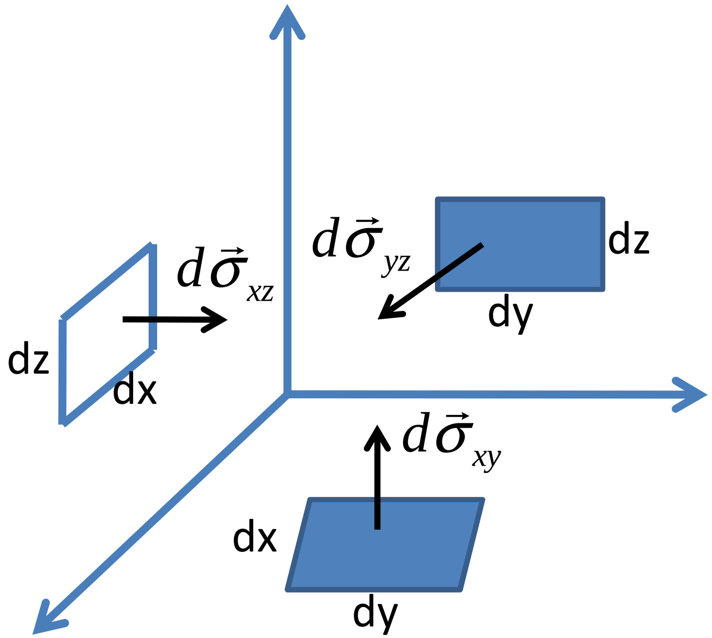
$$\Phi_{sale} = \Phi_{entra} \rightarrow \Phi = 0$$

$$\Phi_{sale} < \Phi_{entra} \rightarrow \Phi < 0$$

Flujo de un vector a través de una superficie

$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\Phi = \iint_{\sigma} v_x \cdot dydz + v_y \cdot dxdz + v_z \, dxdy$$



$$d\vec{\sigma} = d\sigma_{yz}\,\vec{i} + d\sigma_{xz}\,\vec{j} + d\sigma_{xy}\,\vec{k}$$

$$d\vec{\sigma} = dydz\,\vec{i} + dxdz\,\vec{j} + dxdy\,\vec{k}$$

Teorema del gradiente

$$\iint_{\sigma} f \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{v} \overrightarrow{grad}\ f \cdot dv$$

Teorema de la divergencia (Gauss-Ostrogadsky)

$$\iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{v} div\, \vec{v} \cdot dv$$

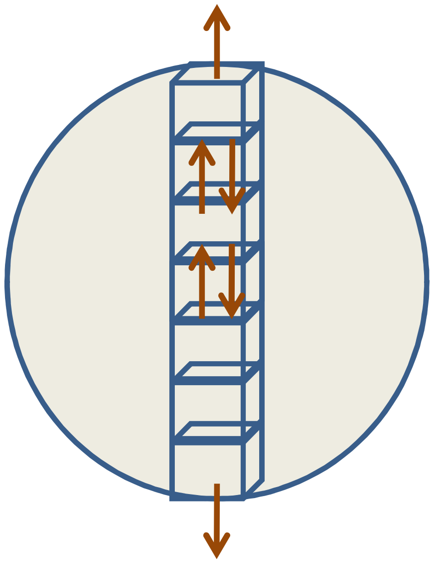
Condición:
Superficie cerrada

Teorema del rotacional

$$-\iint_{\sigma} \vec{v} \wedge d\vec{\sigma} = \iiint_{v} \overrightarrow{rot}\, \vec{v} \cdot dv$$

Flujo de un vector a través de una superficie. Teorema de Gauss-Ostrogadsky, Fórmula de Green

La figura representa un volumen limitado por superficie cerrada, cuyo interior se ha dividido en paralelepípedos infinitesimales contiguos.



Definición de divergencia:

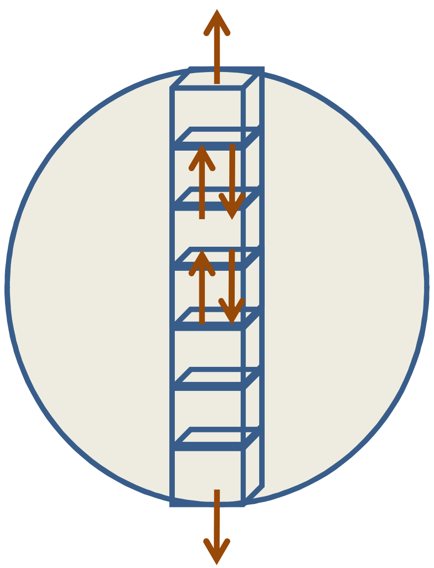
$$div\ \vec{v} = \lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\iint \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}$$

$$(div\ \vec{v})dv = \iint \vec{v}\cdot d\vec{\sigma}$$

$$\sum (div\ \vec{v})\,dv = \vec{v}_1 d\vec{\sigma}_1 + \vec{v}_2 d\vec{\sigma}_2$$

$$\boxed{\Phi = \iint_{\sigma} \vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{v} div\,\vec{v}\cdot dv}$$

Flujo de un vector a través de una superficie.
Teorema de Gauss-Ostrogadsky, Fórmula de Green



El flujo saliente del inferior es el flujo entrante del superior. Los flujos interiores se compensan y se anulan, solo queda el flujo a través de la superficie que limita el volumen.

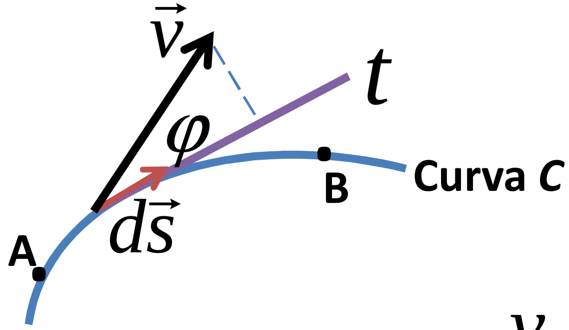
$$\Phi = \iint_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{v} div\, \vec{v} \cdot dv$$

El flujo de $\vec{v}$ a través de la superficie cerrada es equivalente a la integral triple de la divergencia de $\vec{v}$ extendida al volumen limitado por la superficie cerrada.

Circulación de un vector a lo largo de una curva

$$\vec{v} = v_x(x,y,z)\vec{i} + v_y(x,y,z)\vec{j} + v_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$



Circulación elemental

$$dL = v_t \cdot ds$$

$$v_t = v\cos\varphi; \quad dL = v\cos\varphi\, ds = \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

La suma de todas las circulaciones elementales es:

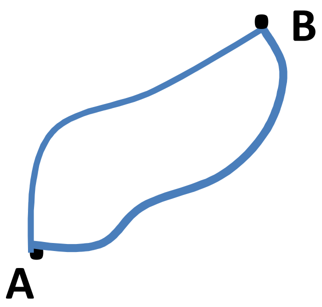
$$L = \int_C \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

Circulación de un vector a lo largo de una curva = Trabajo

$$dL = \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \textit{circulación elemental}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \textit{trabajo elemental}$$



En general:
La circulación (trabajo) entre dos puntos A y B depende del camino seguido.

$$L_{AB(curva1)} \neq L_{AB(curva2)}$$

Circulación de un vector a lo largo de una curva = Trabajo

Caso particular: El campo vectorial es un campo de gradientes (conservativo o irrotacional)

$$\vec{v} = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$dL = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

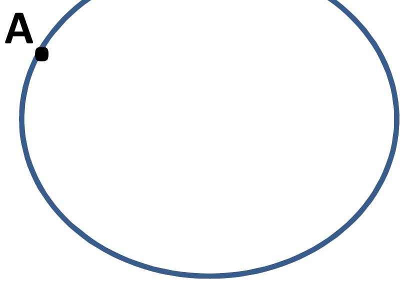
La circulación elemental coincide con la diferencial de f

$$L_{AB} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

La circulación es independiente del camino seguido; solo depende del valor del campo escalar f en los puntos A y B.

Circulación de un vector a lo largo de una curva = Trabajo

Caso particular: El campo vectorial es un campo de gradientes y la curva es cerrada



$$\oint \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_A^A df = f(A) - f(A) = 0$$

Cuando la curva es cerrada, la circulación de un campo de gradientes es cero.

Circulación de v = grad f a lo largo de una curva cerrada
Conclusiones:

1. Si un campo vectorial es irrotacional es condición necesaria y suficiente para que la circulación a lo largo de una curva cerrada sea cero.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} f; \qquad L = \oint \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = 0$$

2. Si la circulación a lo largo de una curva cerrada sea cero es condición necesaria pero no suficiente para que el campo vectorial sea irrotacional.

$$L = \oint \vec{\nabla} f \cdot d\vec{s} = 0 \;\cancel{\rightarrow}\; \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$$

La circulación puede ser cero y el rotacional distinto de cero.

Circulación de un vector a lo largo de una curva
Teorema de Stokes

$$L = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\sigma} (\overrightarrow{rot}\, \vec{v}) \cdot d\vec{\sigma}$$

La circulación de v a lo largo de una curva cerrada es equivalente al flujo del rotacional a través de la superficie limitada por dicha curva cerrada.

Caso particular: campo irrotacional

$$Si\ \overrightarrow{rot}\, \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad L = \oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\sigma} \overrightarrow{rot}\, \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

La circulación de un campo irrotacional (campo de gradientes) a lo largo de una curva cerrada es cero.

Potencial Escalar

Dado un campo vectorial irrotacional

$$\vec{v} = v_x(x,y,z)\,\vec{i} + v_y(x,y,z)\,\vec{j} + v_z(x,y,z)\,\vec{k} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

Es condición necesaria y suficiente para que exista una función escalar f=f(x,y,z) tal que el campo vectorial se exprese como el gradiente de la función escalar

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} f$$

$f = f(x,y,z)$

Potencial escalar matemático

Si el campo vectorial es una magnitud física (velocidad, fuerza…),

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = -\vec{\nabla} f$$

$f = f(x,y,z)$

Potencial escalar físico

Cálculo del Potencial Escalar

Dado un campo vectorial irrotacional $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$$\exists\ f = f(x, y, z) / \vec{v} = \vec{\nabla} f$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = v_x \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = v_y \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = v_z \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}$$

integrando f=f(x,y,z)

$$\mathrm{f} = \int \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \int \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \int \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz} + \mathrm{Cte}$$

Potencial Vector

Dado un campo vectorial solenoidal (adiveregente)

$$\vec{v} = v_x(x,y,z)\vec{i} + v_y(x,y,z)\vec{j} + v_z(x,y,z)\vec{k} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Es condición necesaria y suficiente para que exista un campo vectorial $\vec{A}$ tal que se exprese como:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

Potencial vector

Su divergencia es nula, ya que los campos rotacionales son solenoidales

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$$

Cálculo del Potencial Vector

1. Calculamos una **solución particular** imponiendo tres condiciones

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \longrightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

2. Calculamos una **solución general** añadiendo un campo arbitrario de gradientes

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Phi$$

Se cumple que:

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{\nabla}\Phi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\Phi}_{\text{cero}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Cálculo de la Solución Particular del Potencial Vector

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \qquad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = v_x \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = v_y \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = v_z \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{integrando} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A_x} \\ A_y \\ A_z \end{array} \right.$$