FÍSICA APLICADA A LA INGENIERÍA

Mecánica de Fluidos

Prof. María Victoria Carbonell

DINÁMICA DE FLUIDOS

Las imágenes de la presentación han sido obtenidas del libro:

Physics for Scientists and Engineers
Paul A. Tipler • Gene Mosca
Copyright © 2004 by W. H. Freeman & Company

Dinámica de Fluidos

- Ecuación general de la dinámica de fluidos. Ecuación de Euler
- Ecuación de continuidad
- Torbellino
- Ecuación general de la dinámica de fluidos en función del torbellino. Ecuación de Helmholtz
- Ecuación de Bernoulli generalizada
- Teorema de la permanencia del Torbellino
- Fluidos reales. Viscosidad. Flujos laminar y turbulento.

Dinámica de Fluidos

Establece las leyes o ecuaciones que determinan el ***movimiento*** de un fluido.

El movimiento de un fluido queda determinado cuando se conoce en cada punto y en cada instante del movimiento, la velocidad de cada una de las partículas que lo constituyen.

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$\vec{v} = v_x(x, y, z, t)\,\vec{i} + v_y(x, y, z, t)\,\vec{j} + v_z(x, y, z, t)\,\vec{k}$$

Al movimiento de un fluido también se le denomina flujo.

Clasificación del movimiento: dinámica de fluidos

➢ En función del tiempo

Movimiento permanente o estacionario $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$

La velocidad (y las condiciones del movimiento) en cualquier punto no cambia con el tiempo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Movimiento variable (no permanente) $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

La velocidad (y las condiciones del movimiento) en cualquier punto cambia con el tiempo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0$$

Clasificación del movimiento: dinámica de fluidos

➢ En función de la posición

Movimiento uniforme $\vec{v} = \vec{v}(t) \qquad s = s(x, y, z)$

La velocidad (y las condiciones del movimiento) en un instante dado no cambia con la posición. Solo depende del tiempo.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Movimiento variable (no uniforme) $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

La velocidad (y las condiciones del movimiento) en un instante dado no cambia con la posición. Solo depende del tiempo.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \neq 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} \neq 0; \quad \frac{\partial P}{\partial s} \neq 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial s} \neq 0$$

Líneas de corriente

Curvas tales que en cada punto y en cada instante son tangentes al vector velocidad. Para $t=t_0$, se cumple:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, t_0, C_1) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z, t_0, C_2) = 0 \end{cases}$$

La integración del sistema de ecuaciones diferenciales permite obtener dos superficies cuya intersección proporciona las líneas de corriente en el instante $t=t_0$.

Son líneas imaginarias que muestran la dirección instantánea del movimiento de cada partícula. Las líneas de corriente no pueden cortarse.

Líneas de corriente

En general, la configuración del movimiento cambia con el tiempo, y las líneas de corriente difieren de un instante a otro. Por tanto, las líneas de corriente son curvas que cambian de forma con el tiempo y no coinciden con las trayectorias de la partículas. *Excepto*:

- ❖ Movimiento permanente $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$
- ❖ Movimiento variable de la forma $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)\, f(t)$

En estos casos, cada partícula de fluido que pasa por un punto en un instante sigue la misma trayectoria (la de la línea de corriente que pasa por dicho punto)

Trayectorias

La integración del sistema de ecuaciones diferenciales proporciona la ecuación de la trayectoria en paramétricas.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dz}{dt} &= v_z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= x(t, C_1) \\ y &= y(t, C_2) \\ z &= z(t, C_3) \end{aligned}$$

Las trayectorias no coinciden con las líneas de corriente cuando el movimiento es variable.

Ecuación fundamental de la dinámica de fluidos

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{a}$$

Ecuación de Euler

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Ecuación de Helmholtz

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{a} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Ecuación fundamental de la dinámica de fluidos

Ecuación de Euler, movimiento variable

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}v_z}_{\vec{a}_{convectiva}} + \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{\vec{a}_{local}}$$

Ecuación de Euler, movimiento permanente o estacionario

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}v_z}_{\vec{a}_{convectiva}}$$

Ecuación de Euler

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{a}; \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

Ecuación de Euler en forma tensorial

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Torbellino

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

El **torbellino** es un medio del rotacional del campo de velocidades.

Físicamente, el torbellino representa una **rotación**, siendo ambos vectores equivalentes: $\vec{\xi} = \vec{w}$

Componentes del torbellino:

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \xi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \xi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \xi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{array} \right.$$

Ecuación de Helmholtz

Ec. de Helmholtz en función del torbellino

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\xi \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Ec. de Helmholtz en función del rotacional del campo de velocidades

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Comparación: Ec. de Euler y de Helmholtz

Ec. de Euler:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}v_z}_{a.\ convectiva} + \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{a.\ local}$$

Ec. de Helmholtz

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}}_{a.\ convectiva} + \underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{a.\ local}$$

Ecuación de Helmholtz: caso particular

✓Si las fuerzas derivan de un potencial y el fluido es barotrópico

$$-\vec{\nabla} H = -\left[\vec{\nabla} U + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right]$$

H: función de Helmholtz $\quad H = U + \int \frac{dP}{\rho} + \left(\frac{v^2}{2}\right)$

La ecuación de Helmholtz en función de H, se expresa:

$$-\vec{\nabla} H = (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Ecuación de Helmholtz: casos particulares

✓Si las fuerzas derivan de un potencial y el fluido es barotrópico

$$-\vec{\nabla} H = (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

✓Si además el movimiento es permanente: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$-\vec{\nabla} H = (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

✓Si además el movimiento es irrotacional $(\nabla \wedge \vec{v}) = 0$

$$-\vec{\nabla} H = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

✓Si además el movimiento es permanente e irrotacional

$$-\vec{\nabla} H = 0 \;\rightarrow\; H = Cte.$$

Teorema de Bernoulli.

Ecuación de Helmholtz $$-\vec{\nabla} H = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Función de Helmohltz $$H = \frac{v^2}{2} + U + \int \frac{dP}{\rho}$$

Caso particular:

Fuerzas conservativas, Potencial gravitatorio U = gz

Movimiento permanente e irrotacional H = Cte.

Fluido ideal (incompresible, sin viscosidad)

$$\boxed{H = \frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = Cte}$$

Teorema de Bernoulli.

(Principio de Conservación de la energía)

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+gz=C$$

Energía/masa (J/kg), (m^2/s^2)

$\frac{P}{\rho}$ Energía de presión

$\frac{1}{2}v^2$ Energía cinética por unidad de masa

gz Energía potencial por unidad de masa (potencial gravitatorio)

C Energía total = Constante

Teorema de Bernoulli.

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H$$

Altura (m)

$\dfrac{P}{\rho g}$ Altura de presión, altura de columna de líquido que mide la presión P

$\dfrac{v^2}{2g}$ Altura de velocidad, altura desde la que debería caer el líquido en el vacío para adquirir la velocidad v

z Cota geométrica

H Altura total (m) = Constante

Teorema de Bernoulli.

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \Pi$$ **Presión** (Pa)

P Presión hidrostática

$\frac{1}{2}\rho v^2$ Presión de velocidad

$\rho g z$ Presión de posición

Π Presión total constante (Pa)

Aplicación: Teorema de Bernoulli entre dos puntos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2} + \rho g z_2$$

Presión absoluta (Pa)

$$(P_1 - P_0) + \frac{1}{2}\rho v_1^{\,2} + \rho g z_1 = (P_2 - P_0) + \frac{1}{2}\rho v_2^{\,2} + \rho g z_2$$

Presión manométrica (Pa)

$$\frac{P_1 - P_0}{\rho g} + \frac{v^2{}_1}{2g} + z_1 = \frac{P_2 - P_0}{\rho g} + \frac{v^2{}_2}{2g} + z_2$$ Altura (m)

Bernoulli se aplica entre dos puntos de una misma línea de corriente.
Si el movimiento es irrotacional, se puede aplicar a dos puntos cualesquiera.

Teorema de Bernoulli. Ecuación de Continuidad

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \Pi$$ Presión (Pa)

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g z = C$$ Energía/masa (J/kg), (m^2/s^2)

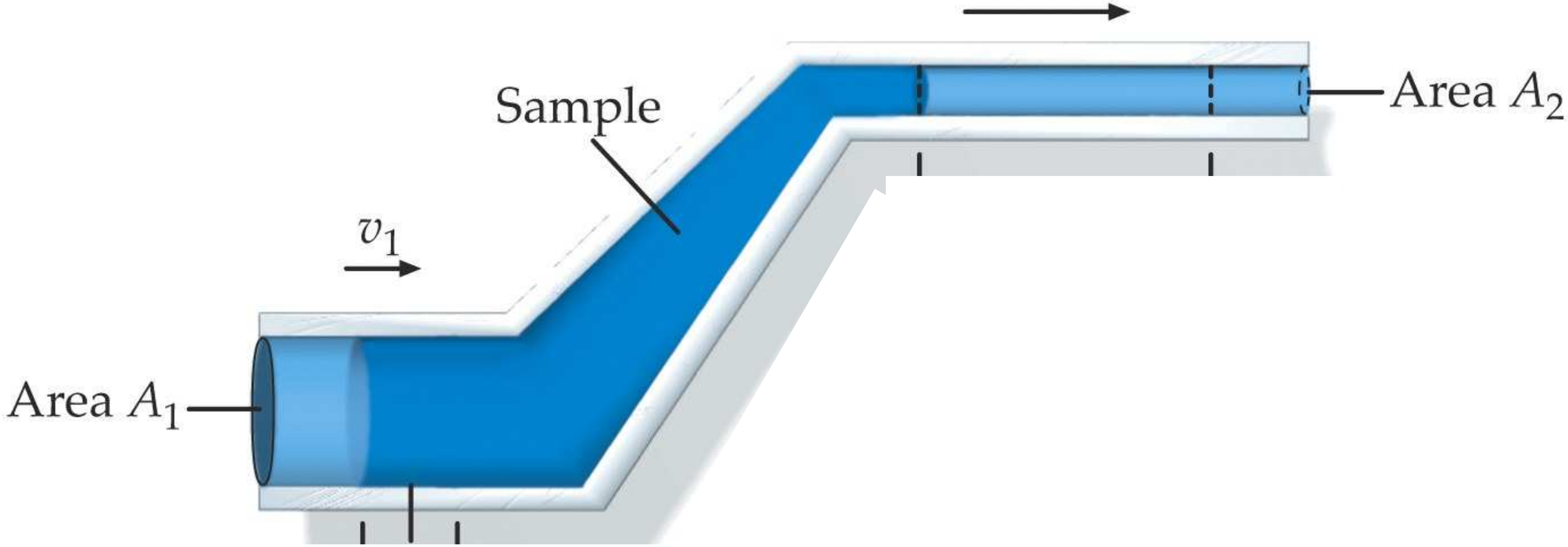
$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H$$ Altura (m)

$$\left.\begin{array}{l} v \cdot S = Q = cte \\ v_1 S_1 = v_2 S_2 = cte \end{array}\right\} \quad (m^3/s)$$

$z_1 = z_2$

$v_1 < v_2$

$P_1 > P_2$

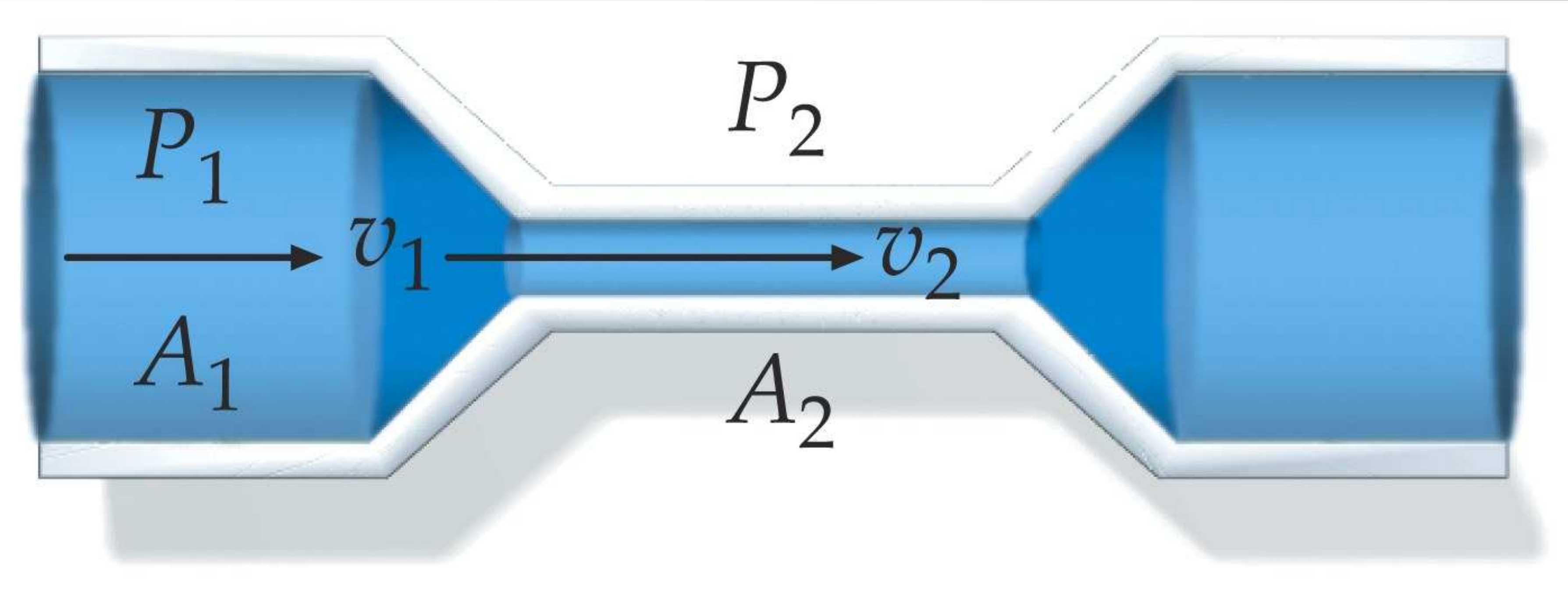


$z_1 < z_2$

$v_1 < v_2$

$P_1 > P_2$

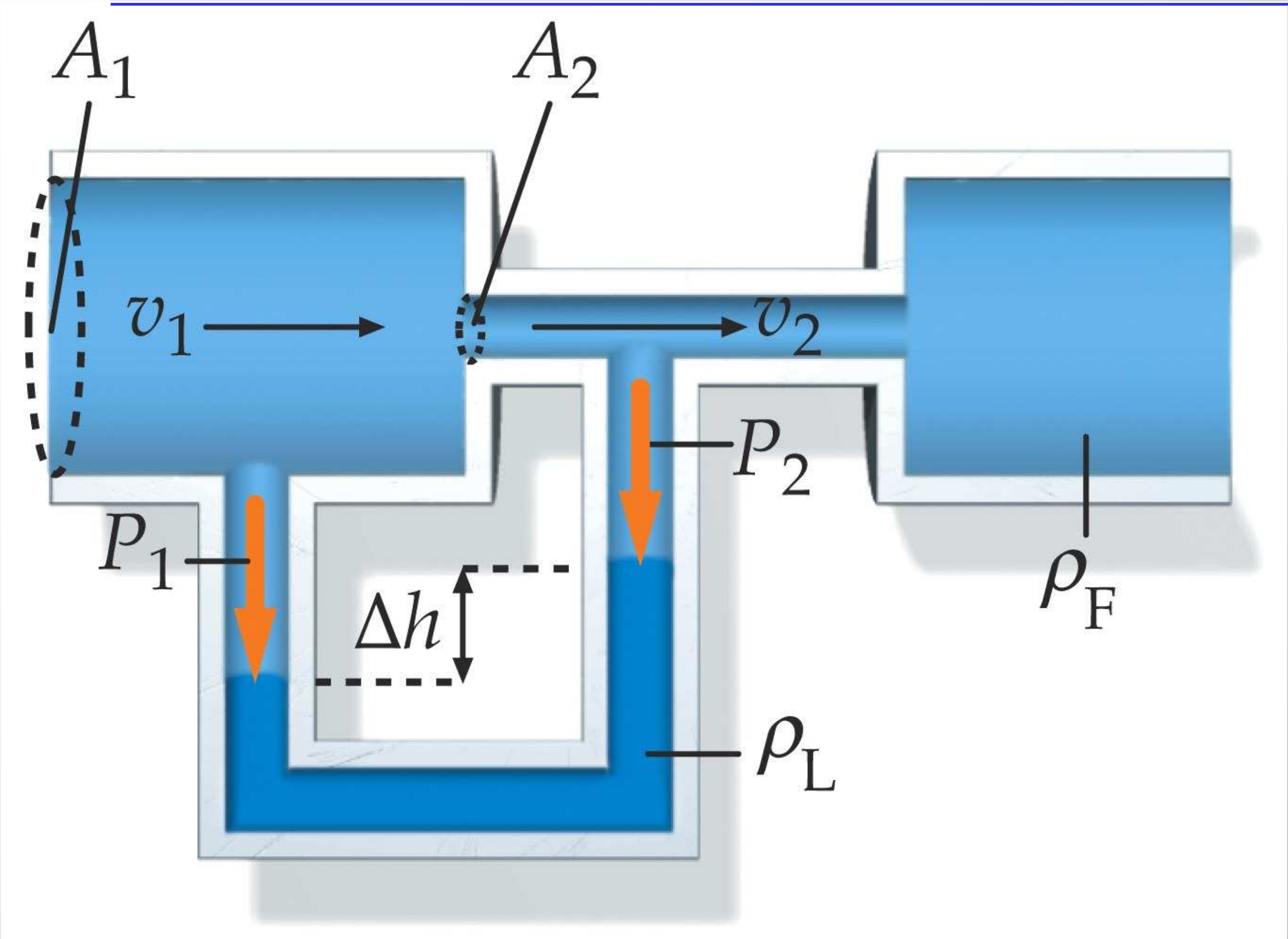
Efecto Venturi



Al aumentar la velocidad disminuye la presión

Aplicaciones

Venturímetro: permite medir el caudal



Datos:
Secciones A_1 y A_2
Densidades

La diferencia de altura permite obtener la diferencia de presión.

$$P_2 - P_1 = \rho_L g \, \Delta h$$

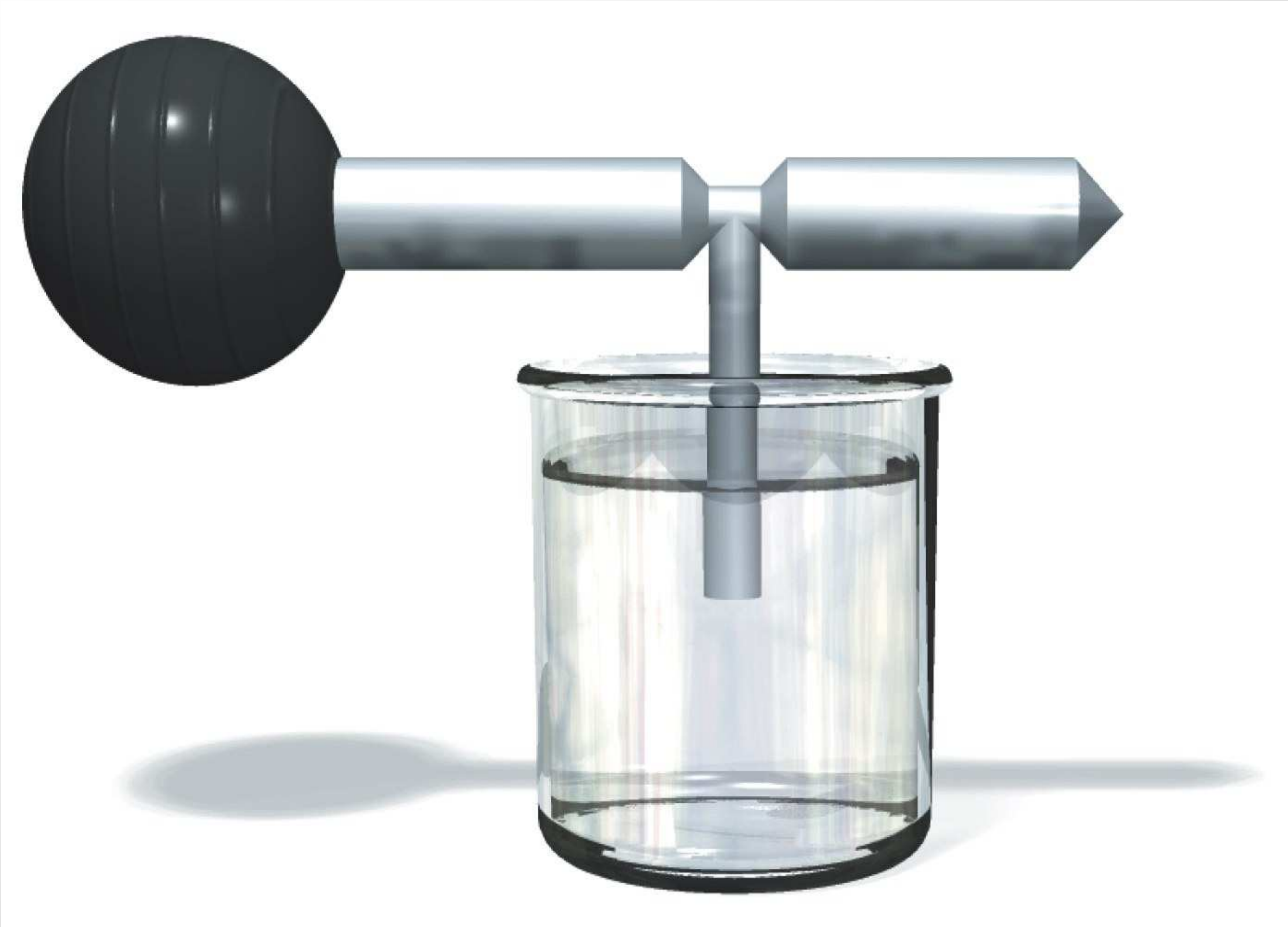
Ec. Continuidad

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Th. Bernoulli (z_1=z_2)

$$P_1 + \frac{v_1^2}{2g} = P_2 + \frac{v_2^2}{2g} \Longrightarrow v \Longrightarrow Q = v \cdot A$$

Pulverizador

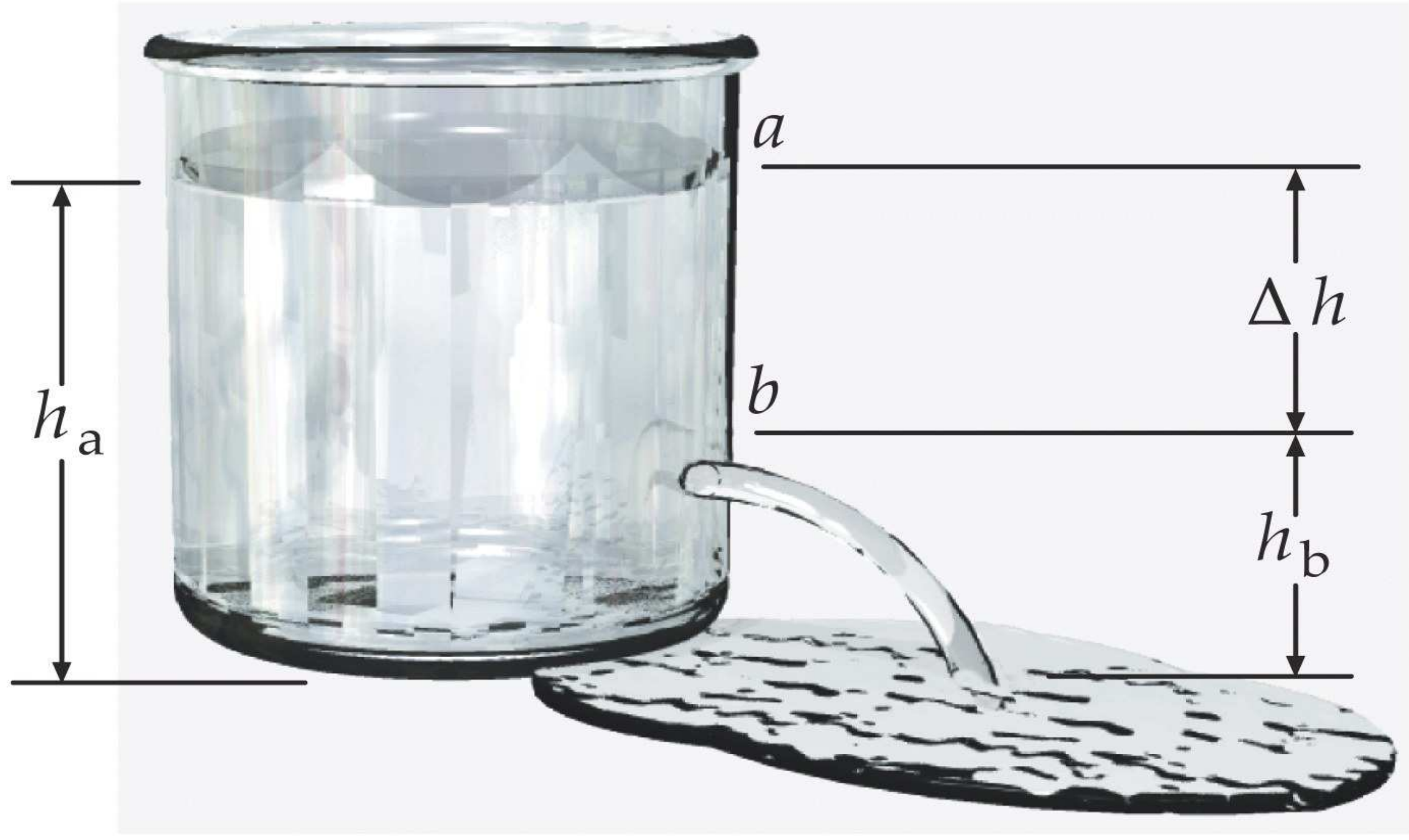


El aire atraviesa la sección estrecha, como la presión allí es menor que la atmosférica. El líquido se ve forzado a introducirse en la corriente de aire a través del tubo vertical produciendo una lluvia fina de gotas.

El agua de la manguera puede fluir a distinta velocidad en función de la sección de la boquilla pero siempre vierte a la misma presión: Presión atmosférica

Ecuación de Torricelli

$$v = \sqrt{2g\Delta h}$$



La velocidad de vertido de un fluido depende de la altura de la columna de líquido que tiene sobre él, siendo independiente de su cota geométrica

Representación Teorema de Bernoulli

Línea de Altura Total (LAT)

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H = cte$$

Línea de Altura Piezométrica (LAP)

$$h_p = \frac{P}{\rho g} + z = H - \frac{v^2}{2g}$$

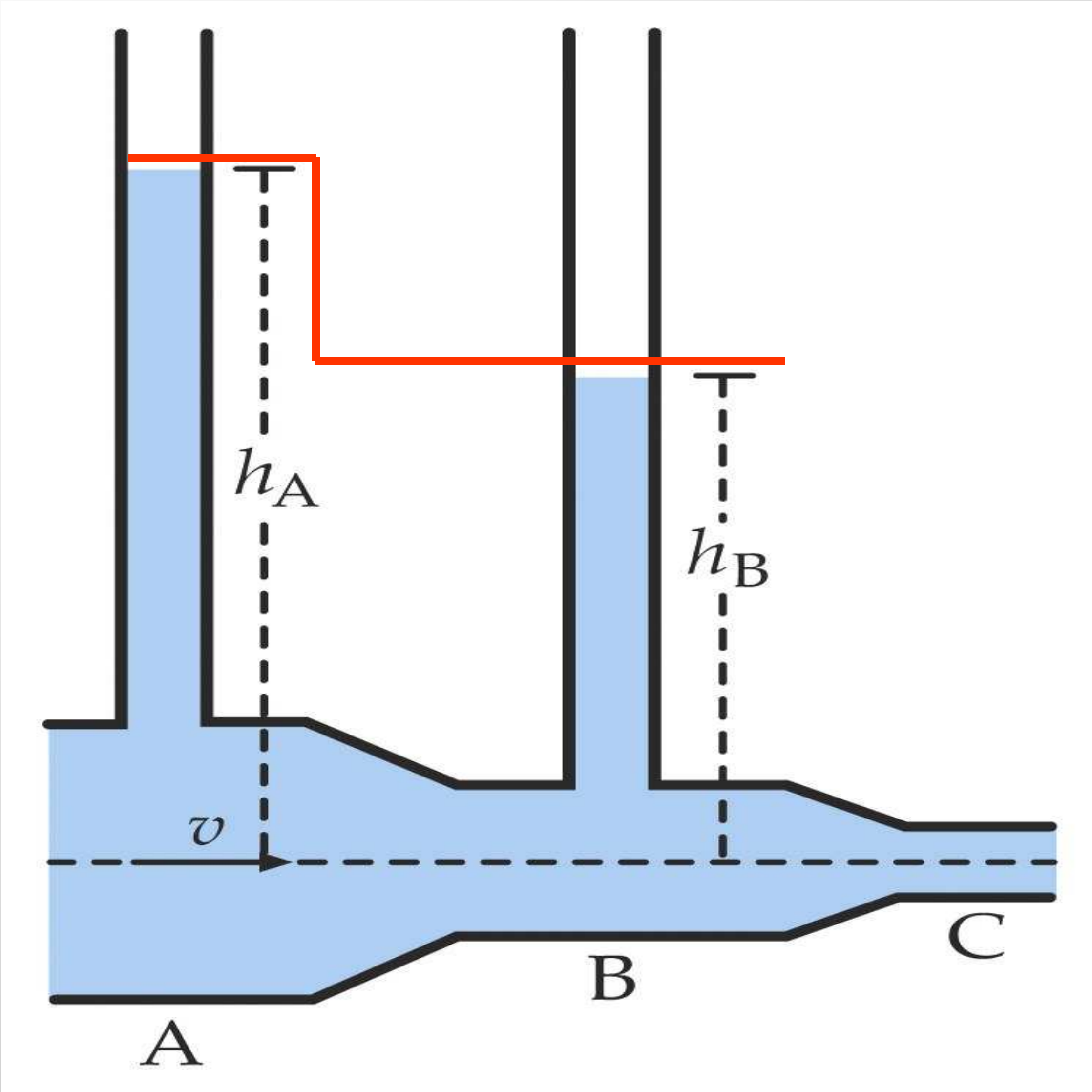
Piezómetro. Altura Piezométrica

$P_A > P_B$

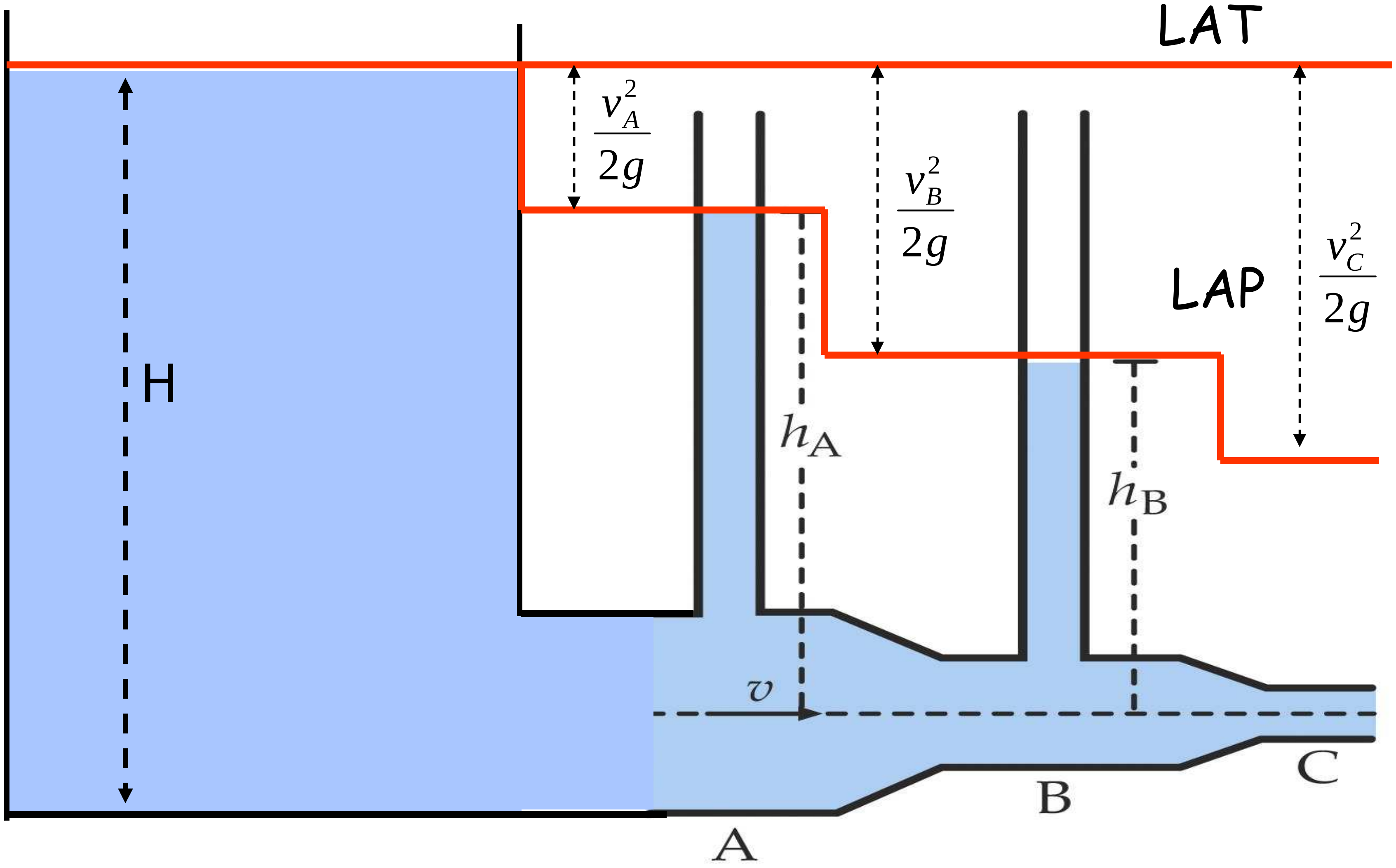
$h_A > h_B$

$z_A = z_B$

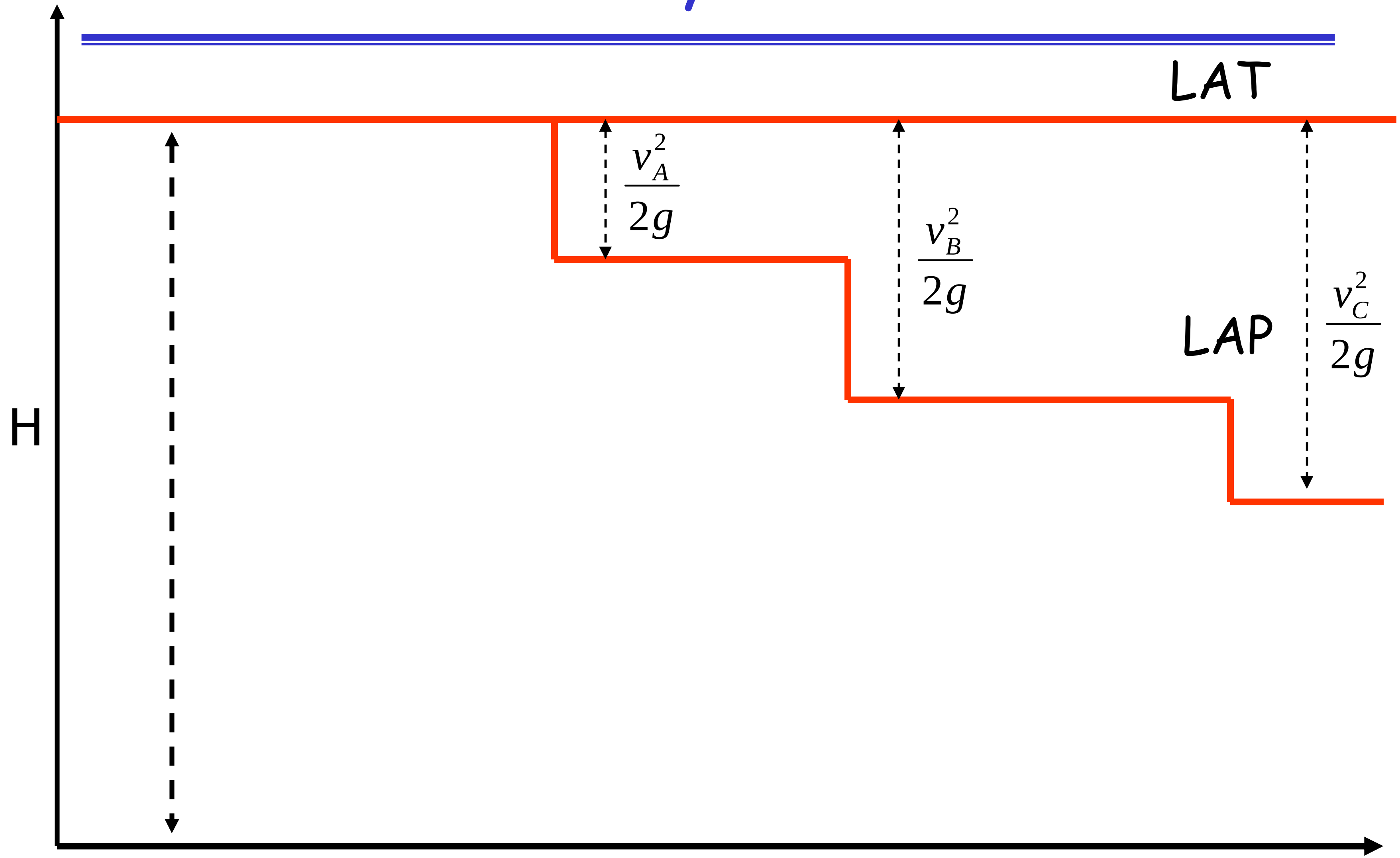
$v_A < v_B$



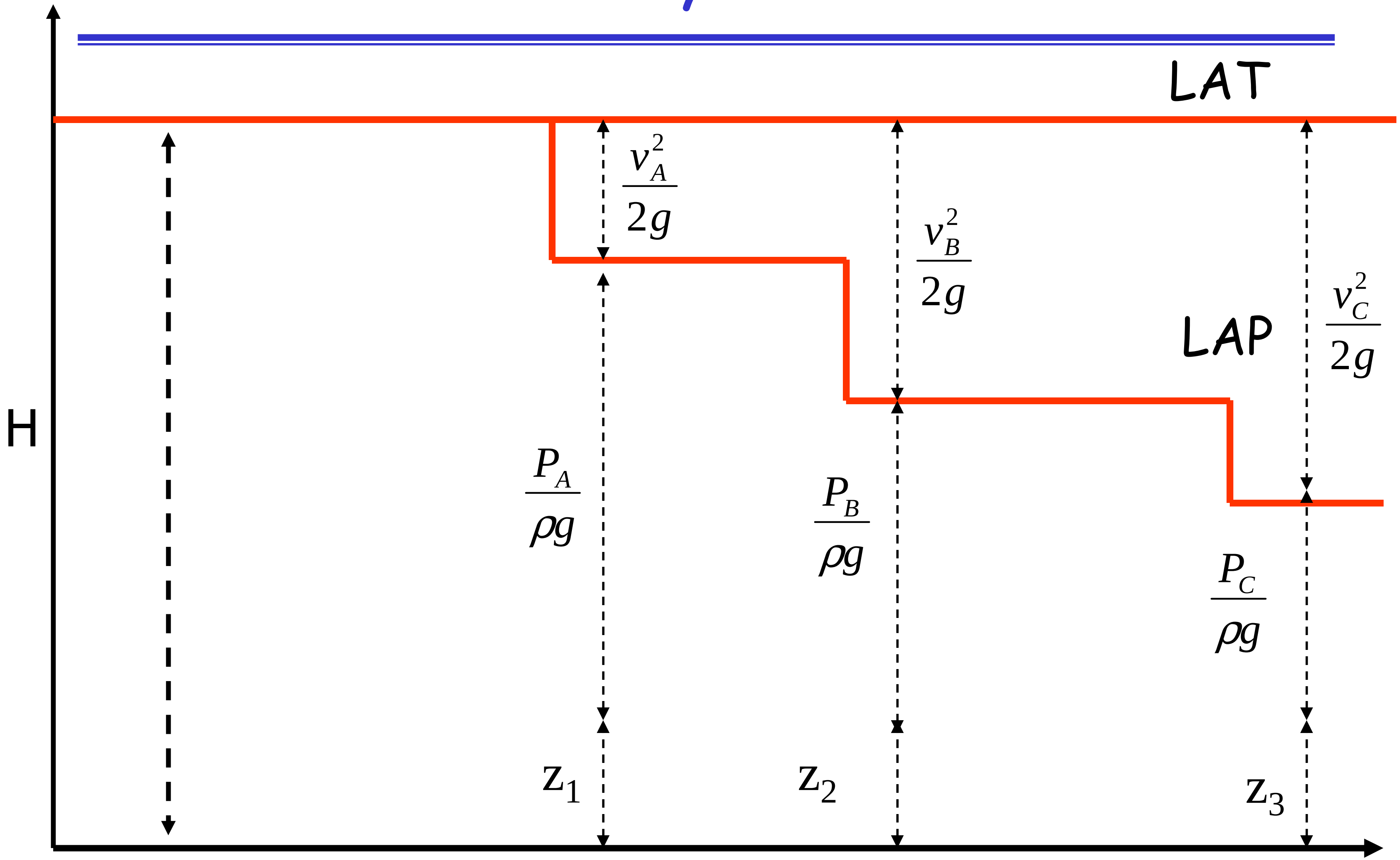
Línea de Altura Total y Línea Altura Piezométrica



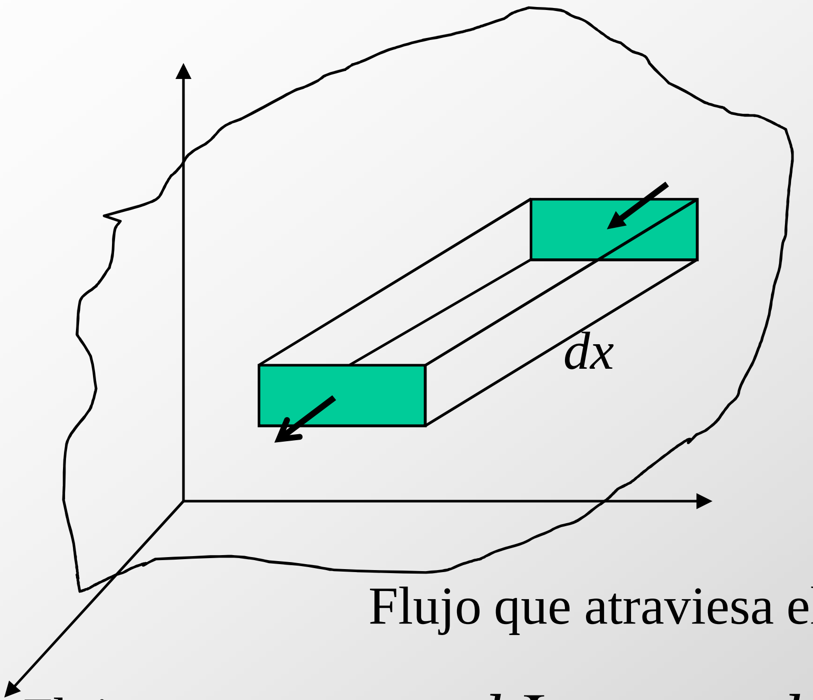
Línea de Altura Total y Línea Altura Piezométrica



Línea de Altura Total y Línea Altura Piezométrica



Ecuación de Continuidad (general)



Se considera un fluido en movimiento bajo la acción de un campo de velocidades.

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t);$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Por estar en movimiento, se establece un flujo a través de las caras del paralelepípedo que está en reposo.

Flujo que atraviesa el paralelepípedo según OX (masa).

Flujo que entra: $$d\Phi_x = \rho v_x dydzdt$$

Flujo que sale: $$d\Phi_{x+dx} = (\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx) dydzdt$$

Restando

$$d\Phi_{dx} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dxdydzdt$$

Ecuación de Continuidad (general)

Análogamente, flujo que atraviesa el paralelepípedo según los tres ejes:

$$d\Phi_{dx} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dxdydzdt$$

$$d\Phi_{dy} = -\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dxdydzdt$$

$$d\Phi_{dz} = -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dxdydzdt$$

sumando

equivalente

$$d\Phi_t = -\left[\underbrace{\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}}_{div(\rho\vec{v})}\right] dxdydzdt = \frac{\partial\rho}{\partial t} dtdxdydz$$

La variación de masa en el intervalo de tiempo dt, es equivalente a la variación de la densidad respecto al tiempo en dt, multiplicada por el volumen dv.

Ecuación de Continuidad (general)

Es un principio de conservación de masa

$$div(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho \, div \, \vec{v} + \vec{v} \, gr\vec{a}d \, \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ecuación de Continuidad (Casos particulares)

$$\boxed{\rho \, div \, \vec{v} + \vec{v} \, gr\vec{a}d \, \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

- **Movimiento estacionario** $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\boxed{div(\rho \vec{v}) = 0}$$

- **Fluido incompresible** $gr\vec{a}d \, \rho = 0; \ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\boxed{div \vec{v} = 0}$$

- **Movimiento uniforme** $div \, \vec{v} = 0$

$$\boxed{\vec{v} \, gr\vec{a}d \, \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Ecuación de Continuidad (expresión en forma integral o finita)

Consideramos un volumen de fluido limitado por una superficie cerrada.

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0; \quad \vec{\nabla}(\rho\vec{v})dv = -\frac{\partial\rho}{\partial t}dv \qquad \text{integrando}$$

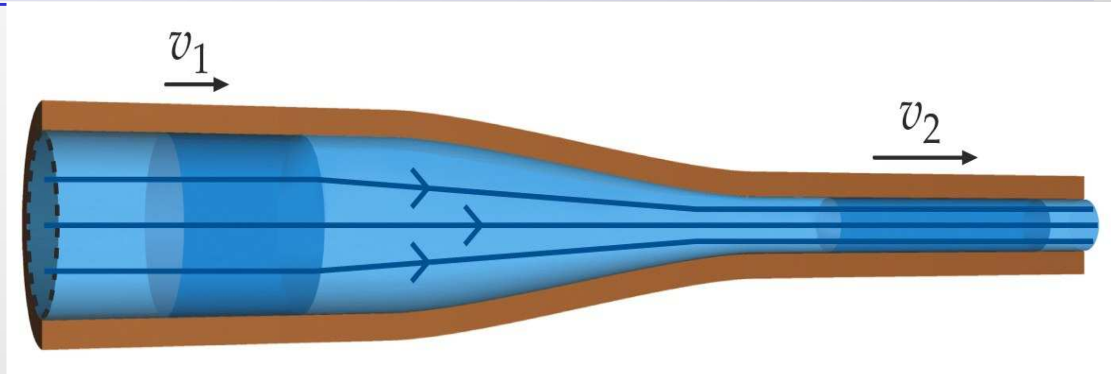
$$\iiint \vec{\nabla}(\rho\vec{v})dv = -\iiint \frac{\partial\rho}{\partial t}dv = -\frac{d}{dt}\iiint \rho dv = -\frac{d}{dt}\iiint dM = -\frac{dM}{dt}$$

$$\boxed{\iiint \vec{\nabla}(\rho\vec{v})dv = \iint (\rho\vec{v})d\vec{\sigma} = -\frac{dM}{dt}}$$

"El flujo del vector $(\rho\vec{v})$ a través de la superficie que limita el volumen corresponde a la variación de masa por unidad de tiempo en el interior del volumen".

Ecuación de Continuidad para un fluido que circula por una tuberia de sección variable

$$div(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$



- 1ª cond: movimiento estacionario $$div(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\iiint div(\rho\vec{v})dv = \iint (\rho\vec{v})d\vec{\sigma} = 0$$

$$\iint \rho v_1\, d\sigma_1 = \iint \rho v_2\, d\sigma_2$$

- 2ª cond: fluido incompresible $$\rho\iint v_1\, d\sigma_1 = \rho\iint v_2\, d\sigma_2$$

- 3ª cond: movimiento uniforme $$v_1\iint d\sigma_1 = v_2\iint d\sigma_2$$

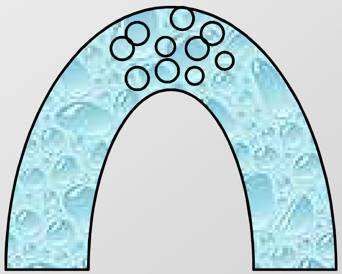
$$v_1\sigma_1 = v_2\sigma_2 = Q = Cte$$

Teorema de la permanencia del torbellino

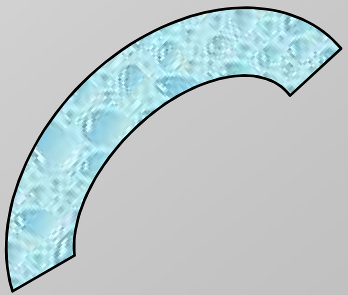
Si el movimiento de un fluido es irrotacional $\Longrightarrow$ tiene lugar en ausencia de torbellinos, además el campo de velocidades se puede expresar como el gradiente de un potencial.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\xi} = \vec{0} \\ \vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi \end{array} \right\}$$

Si el movimiento de un fluido en un instante dado es irrotacional (ausencia de torbellino) se demuestra que para cualquier instante posterior al considerado el movimiento sigue teniendo lugar en ausencia de torbellinos.



El torbellino no se puede destruir si no se modifica la geometría de la tubería.



El torbellino no se puede crear.

Paul A. Tipler • Gene Mosca

Physics for Scientists and Engineers

Fifth Edition

Chapter 13:

Fluids

Copyright © 2004 by W. H. Freeman & Company