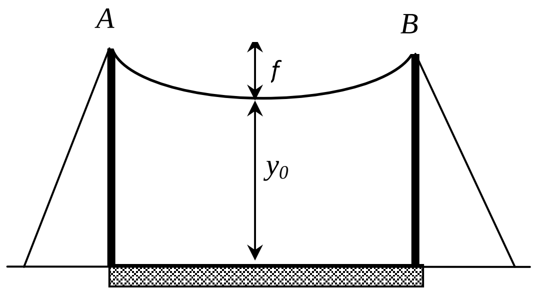
MECÁNICA DE HILOS. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Los puntos A y B del puente colgante representado en la figura distan 40 m. La flecha en su centro es de 5 m. Los cables pueden resistir una tensión máxima de 44,72 kN. Determinar:

a) Tensión mínima y la carga q distribuida uniformemente según la horizontal que puede resistir

b) Componentes vectoriales de la tensión en los puntos A y B



Datos:
$T_A = T_B = 44{,}72\ 10^3$ N
L= 40m; x = L/2=20 m
f = y-y_0 = 5m

RESOLUCIÓN

a) La parábola del puente colgante viene dada por la expresión:

$y - y_0 = \frac{q}{2T_0}\, x^2;\ 5 = \frac{q}{2T_0}(20)^2;$ de donde $T_0 = 40\, q$; cumpliéndose $T_{Ax} = T_{Bx} = T_0$

Cada componente vertical de la tensión soporta la carga de medio puente:

$T_y = q\frac{L}{2} = 20\, q;$ A partir del módulo de la tensión se obtiene la carga:

$$T^2 = T_{Ax}^2 + T_{Bx}^2; \quad 2000 \cdot 10^6 = (400 + 1600)q^2; \quad \rightarrow \quad q = 10^3 N$$

Por lo que $T_0 = 4 \cdot 10^4\, N; \quad T_y = 2 \cdot 10^4\, N$

b) Los vectores de la tensión en los puntos A y B quedan:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{T_A} = -4\ \cdot 10^4\, \vec{\imath} + 2 \cdot\ 10^4 \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{T_B} = 4\ \cdot 10^4\, \vec{\imath} + 2 \cdot\ 10^4 \vec{\jmath} \end{array}\right\}$$

2. La figura representa un tramo de un tendido eléctrico cuyo peso por unidad de longitud es p=50 N/m. La tensión mínima es de 0,4 kN. La distancia entre A y B es 11m. Calcular:

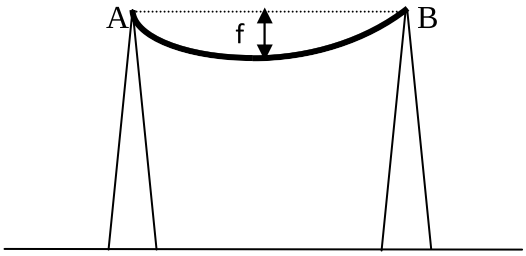
a) Altura de los postes

b) Tensión máxima (módulo y vector)

c) Flecha (f)

d) Longitud del cable entre A y B

RESOLUCIÓN



a) La altura de los postes (y) se obtiene a partir de la ecuación de la catenaria referida a sus propios ejes, calculando previamente el parámetro de la catenaria (a):

$$a = \frac{T_0}{p} = \frac{400}{50} = 8\,m;\ \text{para}\ x = \frac{11}{2} = 5{,}5\,m;\quad y = a\,Ch\frac{x}{a} = 8\,Ch\frac{5{,}5}{8} = 8 \cdot 1{,}25 = 10\,m$$

$$Ch\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} = \frac{1{,}99+0{,}51}{2} = 1{,}25$$

b) EL módulo de la tensión máxima se calcula por la expresión:

$$T_{máx} = T_A = T_B = p \cdot y = 500\,N$$

La tensión mínima coincide con las componentes horizontales y las componentes verticales se obtienen por:

$T_y = \sqrt{T^2 - T_x^2} = \sqrt{25-16} \cdot 10^2 = 300\,N$, por lo que los vectores quedan:

$$\overrightarrow{T_A} = -400\,\vec{\imath} + 300\,\vec{\jmath};\quad \overrightarrow{T_B} = 400\,\vec{\imath} + 300\,\vec{\jmath}\ (N)$$

c) La flecha (f) es: $f = y - a = 10 - 8 = 2\,m$

d) La longitud del cable de cada uno de los tramos simétricos se obtiene a partir de:

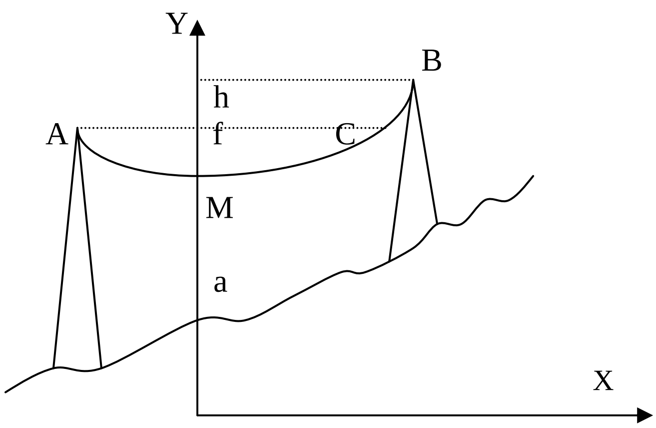
$y^2 = a^2 + s^2;\ s = \sqrt{y^2 - a^2} = 6\,m$; de donde $s_{AB} = 2s = 12\,m$

Se puede comprobar que cada una de las tensiones verticales soporta el peso de medio arco de catenaria ya que se cumple que:

$$T_y = p \cdot s = 50\frac{N}{m} \cdot 6m = 300\,N$$

3. La figura representa una catenaria asimétrica cuyo peso por unidad de longitud es p=40 N/m. Conociendo el parámetro de la catenaria a=20 m, la diferencia de altura entre los puntos A y B h=2m y la tensión en el punto B, $T_B = 10^3$ N. Calcular:

a) Tensión mínima.
b) Flecha del arco simétrico AMC
c) Tensión en los puntos A, B y C (módulo y vector)
d) Longitud de los arcos AM y MB



RESOLUCIÓN

a) La tensión mínima se obtiene de la expresión: $T_0 = p \cdot a = 800\ N$

b) La flecha se obtiene a partir de la altura del punto B

$y_B = \frac{T_B}{p} = 25; \quad y_B = a + f + h = 22 + f; \quad f = 3\ m$

c) El módulo de la tensión en los puntos A y C es el mismo por estar a la misma altura

$T_A = T_C = p(a+f) = 920\ N; \quad T_B = 1000N.$

Las componentes verticales se obtienen por:

$T_{Ay} = \sqrt{T_A^2 - T_x^2} = 454{,}3\ N; \quad T_{By} = \sqrt{T_B^2 - T_x^2} = 600\ N$

Los vectores resultan:

$\overrightarrow{T_A} = -800\,\vec{\imath} + 454{,}3\,\vec{\jmath}; \quad \overrightarrow{T_C} = 800\,\vec{\imath} + 454{,}3\,\vec{\jmath}; \quad \overrightarrow{T_B} = 800\,\vec{\imath} + 600\,\vec{\jmath}$

d) Las componentes verticales permiten obtener la longitud de los arcos,

$y_A = p \cdot s_{AM}; \ s_{AM} = 1{,}36\ m;$ cumpliéndose la relación $y_A^2 = a^2 + s_{AM}^2$

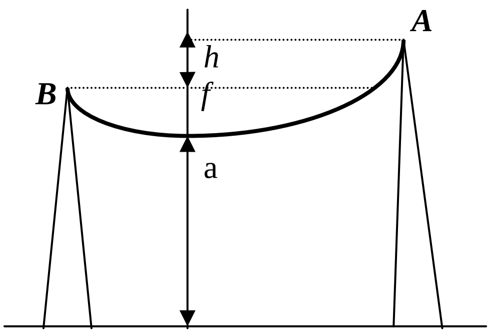
$y_B = p \cdot s_{MB}; \ s_{MB} = 15\ m;$ cumpliéndose la relación $y_B^2 = a^2 + s_{MB}^2$

4. Un cable de una línea de conducción de energía eléctrica pesa 30 N/m y está sujeto a dos torres situadas a uno y otro lado del valle según se indica en la figura. El punto B está 10 m por debajo del punto A. El punto más bajo del cable está 5 m por debajo del punto B. Si la tensión máxima es 900 N, calcular:

a) Parámetro de la catenaria

b) Tensión en los puntos A y B (módulo y vector)

c) Longitud del cable entre los puntos A y B



Datos:
p = 30 N/m
$T_A = T_{máx} = 900$ N
$h = y_A - y_B = 10$m
$f = y_B - a = 5$m

RESOLUCIÓN

a) En una catenaria la tensión es función de la altura, la tensión en el punto A permite obtener el valor del parámetro de la catenaria a:

$T_A = p\,(a + f + h) = 30\,(a + 15) = 900\ N; \quad a = \frac{450}{30} = 15\ m$

b) El módulo de la tensión en el punto B se obtiene a partir de la expresión:

$T_B = p\,(a + f) = 30\,(15 + 5) = 600\ N;$

Las componentes horizontales de las tensiones son:

$T_0 = T_{Ax} = T_{Bx} = p \cdot a = 450\ N$

Las componentes verticales de las tensiones son:

$T_{Ay} = \sqrt{T_A^2 - T_{Ax}^2} = 779{,}4\ N; \quad T_{By} = \sqrt{T_B^2 - T_{Bx}^2} = 396{,}9\ N$

Las tensiones en forma vectorial son:

$$\overrightarrow{T_A} = 450\,\vec{\imath} + 779{,}4\,\vec{\jmath}\ (N); \quad \overrightarrow{T_B} = -450\,\vec{\imath} + 396{,}9\,\vec{\jmath}\ (N)$$

5. Un niño pesa 400 N está sentado en un columpio que pende de una cuerda, la cual pasa por encima de la rama de un árbol. El coeficiente de rozamiento entre cuerda y rama es $\mu = 0{,}5$ y el peso de la cuerda es despreciable. Determinar la mínima fuerza que hay que aplicar al otro extremo de la cuerda para mantener al niño suspendido, cuando:

a) La cuerda está arrollada a la rama media vuelta

b) La cuerda está arrollada a la rama 2 vueltas y media

RESOLUCIÓN

a) Cuando la cuerda está arrollada a la rama media vuelta $n = \frac{1}{2};\ \varphi = 2\pi n = \pi;\ \mu\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$T = T_0\, e^{\mu\varphi}; \quad T_0 = \frac{T}{e^{\mu\varphi}} = \frac{400}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{400}{4{,}81} = 83{,}15\ N$$

b) La cuerda está arrollada a la rama 2 vueltas y media $n = \frac{5}{2};\ \varphi = 2\pi n = 5\pi;\ \mu\varphi = \frac{5\pi}{2}$

$$T = T_0\, e^{\mu\varphi}; \quad T_0 = \frac{T}{e^{\mu\varphi}} = \frac{400}{e^{\frac{5\pi}{2}}} = \frac{400}{2575{,}9} = 0{,}155\ N$$