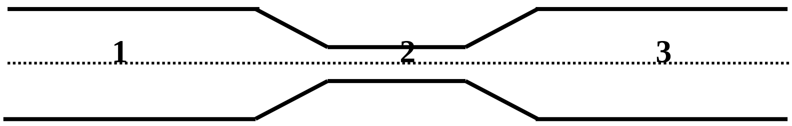
MECÁNICA DE FLUIDOS. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Por la tubería horizontal representada en la figura circula agua. El diámetro de las secciones 1 y 3 es Ø = 20 cm, reduciéndose en la sección 2 a la mitad. Considere g = 10m/s^2.



a) Ordenar presiones y velocidades en los puntos 1,2,3 de mayor a menor
b) Calcular el caudal, expresado en litros por segundo, si la diferencia de presiones entre ambas secciones es 0,3 kp/cm^2
c) Representar la línea de altura total y la línea de altura piezométrica cuando la presión en la sección ancha es 1kp/cm^2

RESOLUCIÓN

a) Considerando el agua como un fluido ideal, se cumple: $P_1=P_3>P_2$; $v_1=v_3<v_2$

b) Considerando la diferencia de presión: $P_1 - P_2 = 0{,}3kp/cm^2 (atm.técnica);$
Teniendo en cuenta que: 1,033 atm. técnica = 10,33 m.c.a, resulta $\frac{P_1-P_2}{\rho g} = 3\ m.c.a$

Ecuación de continuidad $Q = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$, de donde: $v_2 = 4v_1$
Teorema de Bernoulli para tubería horizontal $z_1 = z_2 = z_3 = 0{,}1$ m

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2;$$

$$\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \quad ; \quad 3 = \frac{15}{20}v_1^2 \quad v_1 = 2m/s; \quad v_2 = 8m/s$$

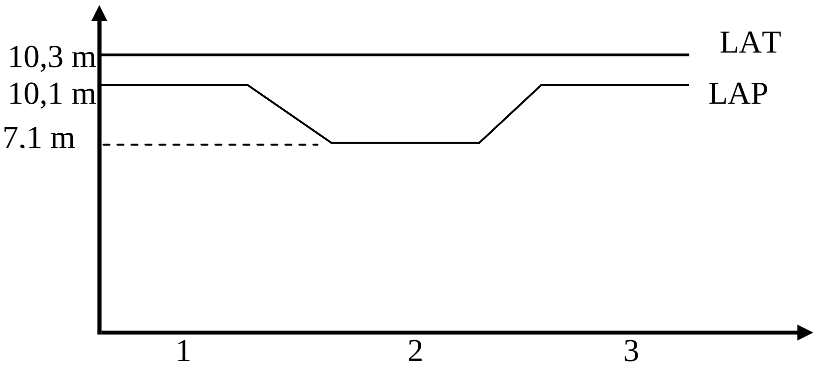
El caudal es: $Q = 2\ m/s \cdot 0{,}01\pi\ m^2 = 0{,}0628\ m^3/s = 62{,}8\ l/s$

c) Línea de Altura Total, teniendo en cuenta que $P_1 = 0{,}1\ kp/cm^2$; $\frac{P_1}{\rho g} = 10m$; $\frac{P_2}{\rho g} = 7m$;

$$H = \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = 10 + 0{,}2 + 0{,}1 = 10{,}3\ m; \quad H = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = 7 + 3{,}2 + 0{,}1 = 10{,}3m$$

Línea de Altura Piezométrica

$$h_{p1} = \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = H - \frac{v_1^2}{2g} = 10{,}1m; \quad h_{p2} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = H - \frac{v_2^2}{2g} = 7{,}1\ m;$$



2. En la pared lateral de un depósito de agua para riego hay una compuerta circular de radio r= 20cm, situada a un metro del fondo. Calcular la fuerza de empuje sobre la compuerta y la coordenada del centro de empuje,

a) cuando el agua alcanza una altura de 8 m,

b) cuando el agua alcanza una altura de 6 m,

RESOLUCIÓN

a) cuando el agua alcanza una altura de 8 m,

$F = \rho g x_G \sigma = 10^4 \cdot 6{,}8 \cdot 0{,}04\pi = 8545\ N$

$x_E = x_G + \frac{I_{GZ}}{\sigma x_G} = 6{,}8 + \frac{0{,}01}{6{,}8} = 6{,}801\ m$

b) cuando el agua alcanza una altura de 6 m,

$F = \rho g x_G \sigma = 10^4 \cdot 4{,}8 \cdot 0{,}04\pi = 6031{,}8\ N$

$x_E = x_G + \frac{I_{GZ}}{\sigma x_G} = 4{,}8 + \frac{0{,}01}{4{,}8} = 4{,}801\ m$

3. El movimiento de un fluido incompresible se realiza bajo la acción de un campo de velocidades $\vec{v} = xt\vec{i} + 2yt\vec{j} + zt\vec{k}$ y un campo de fuerzas $\vec{F} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$. Determinar:

a) La familia de líneas de corriente y las trayectorias de las partículas, indicando si coinciden o no.

b) Campo de presiones.

RESOLUCIÓN

a) Las líneas de corriente coinciden con las trayectorias ya que el campo de velocidades variable se puede expresar como: $\vec{v} = f(t)\ \vec{v}(x,y,z)$. Para obtener las líneas de corriente se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{xt} = \frac{dy}{2yt} = \frac{dz}{zt}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{z}$$

$ln\ x = \frac{C_1}{2} ln\ y \quad \rightarrow \quad x^2 = C_1 y$

$ln\ x = ln\ z \quad \rightarrow \quad x = C_2 z$

Para obtener las trayectorias se integran las componentes de la velocidad:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = xt; \quad \frac{dx}{x} = tdt \rightarrow \quad ln\ \frac{x}{K_1} = \frac{t^2}{2}; \quad \frac{x}{K_1} = e^{\frac{t^2}{2}} \\ \frac{dy}{dt} = 2yt; \quad \frac{dy}{y} = 2tdt \rightarrow \quad ln\ \frac{y}{K_2} = t^2; \quad \frac{y}{K_2} = e^{t^2} \\ \frac{dz}{dt} = zt; \quad \frac{dz}{x} = tdt \rightarrow \quad ln\ \frac{z}{K_3} = \frac{t^2}{2}; \quad \frac{z}{K_3} = e^{\frac{t^2}{2}} \end{array}\right\} x = \frac{K_1}{K_3} z; \quad x^2 = \frac{K_1}{K_2} y$$

b) Aplicando la ecuación de Euler en forma tensorial se obtiene el campo de aceleraciones

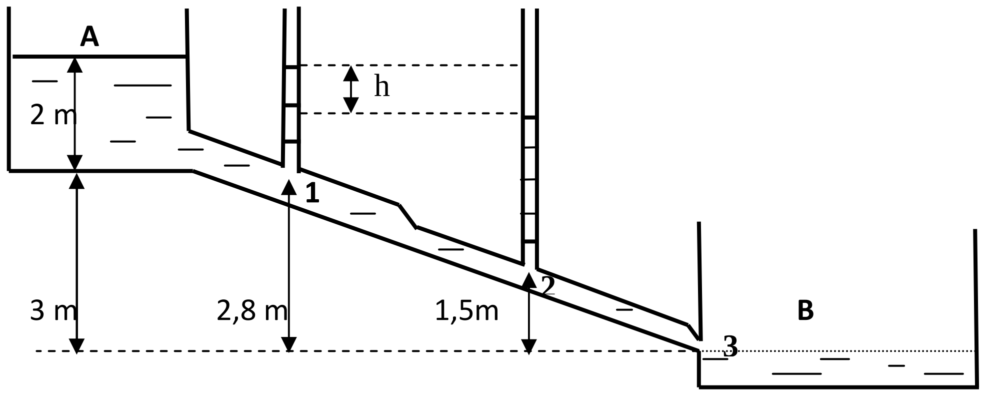
$\vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = \vec{a}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xt \\ 2yt \\ 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ z \end{pmatrix} = (xt^2)\vec{i} + (4yt^2 + 2y)\vec{j} + (zt^2 + z)\vec{k}$

$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = -(xt^2)\vec{i} - (4yt^2)\vec{j} - (zt^2)\vec{k}; \quad dP = -\rho t^2(xdx + 4ydy - zdz)$

$P = -\rho t^2(\frac{x^2}{2} + 2y^2 + \frac{z^2}{2}) + Cte$

4. Los depósitos A y B, de grandes dimensiones, están conectados por una tubería de sección variable. El nivel de agua en el depósito A es de 2m y el desnivel entre ambos depósitos es de 3m. El radio en el tramo de tubería 1 es 3 cm, reduciéndose a la mitad en el punto 2 y a un tercio en el punto 3. Considere $g=10 m/s^2$; $z_1 = 2{,}8 m$; $z_2 = 1{,}5$ m; $z_3=0$ m y $P_3 = P_0$. Calcular:



a) Presión manométrica en el fondo del depósito A, expresada en pascales y m.c.a.
b) Velocidad con que vierte el agua en el depósito B (punto 3) y caudal expresado en l/s.
c) Velocidad en los puntos 1 y 2.
d) Representar la línea de altura total y línea de altura piezométrica
e) Diferencia de altura h entre los piezómetros situados en los puntos 1 y 2.

RESOLUCIÓN

a) La presión manométrica en el fondo del depósito coincide con la altura de agua del mismo
$\frac{P_A - P_0}{\rho g} = 2\ m.c.a;\ P_A - P_0 = 2 \cdot 10^4\ Pa$

b) Para obtener la velocidad en el punto 3, velocidad con el agua vierte al depósito B, se aplica la ecuación de Torricelli, considerando la diferencia de altura 5 metros. El caudal se obtiene aplicando la ecuación de continuidad.
$v_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = 10 m/s;\quad Q = v_3\ S_3 = \pi\ l/s$

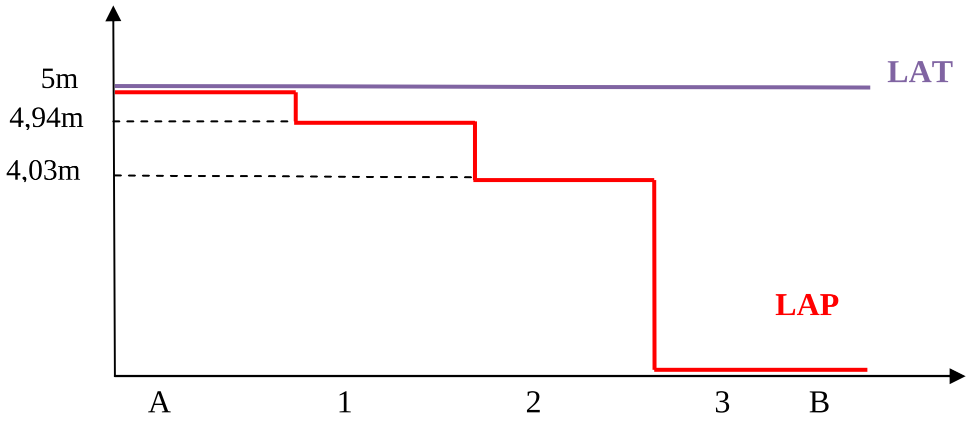
c) Aplicando la ecuación de continuidad, se obtienen las velocidades en los puntos 1 y 2.
$v_1 = \frac{v_3}{9} = 1{,}11\ m/s;\ v_2 = \ 4v_1 = \frac{v_3}{2{,}25} = 4{,}4\ m/s;$

d) La línea de altura total se mantiene constante e igual a 5 m para todos los puntos $H = cte = 5\ m$;
La línea de altura piezométrica se obtiene restando a la altura total la componente de la velocidad:
$h_{pA} = H_A = 5m;\quad h_{p1} = H - \frac{v_1^2}{2g} = 4{,}94\ m;\ h_{p2} = H - \frac{v_2^2}{2g} = 4{,}03\ m;\ h_{p3} = h_{pB} = 0\ m$
La altura piezométrica del punto 3 es nula ya que se ha considerado como plano de referencia la superficie libre del depósito B.

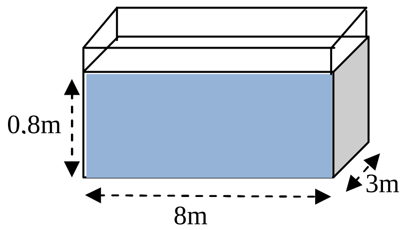
e) La diferencia de altura h entre los piezómetros situados en los puntos 1 y 2, se calcula por diferencia de altura piezométrica.

$h = h_{p1} - h_{p2} = 4{,}94 - 4{,}03 = 0{,}91\ m$

Representación de la Línea de Altura Total y Línea de Altura Piezométrica



5. Un depósito de agua para riego tiene una anchura de 3m, una longitud de 8m y una profundidad de 1m. Cuando el agua alcanza una altura de 80cm, determinar la fuerza que ejerce el agua sobre el fondo del depósito y sobre las paredes laterales, así como las distancias de los respectivos centros de empuje a la superficie libre del agua.



La fuerza sobre el **fondo del depósito**, siendo $x_G = 0{,}8m;\quad \sigma = 24\ m^2$ es:

$F_E = \rho g x_G \sigma = 19{,}2 \cdot 10^4 N$

En el fondo el centro de gravedad y el centro de empuje coinciden por lo que la distancia es nula.

La fuerza sobre las **paredes laterales izquierda y derecha**, siendo $x_G = 0{,}4m;\quad \sigma = 2{,}4\ m^2$ es:

$F_E = \rho g x_G \sigma = 1{,}92 \cdot 10^4 N$

La coordenada del centro de empuje o distancia del respectivo centro de empuje a la superficie libre del agua en dichas paredes se obtiene a partir de la expresión:

$$x_E = x_G + \frac{I_{GY}}{x_G \sigma} = 0{,}4 + \frac{\frac{1}{12}\sigma l^2}{x_G \sigma} = 0{,}4 + 0{,}0\hat{6} = 0{,}4\hat{6}\ m;$$

La fuerza sobre las **paredes laterales anterior y posterior**, siendo $x_G = 0{,}4m;\quad \sigma = 6{,}4\ m^2$ es:

$F_E = \rho g x_G \sigma = 2{,}56 \cdot 10^4 N$

La coordenada del centro de empuje o distancia del respectivo centro de empuje a la superficie libre del agua en dichas paredes coincide con la anterior ya que x_G y el lado sumergido l son los mismos,

$$x_E = x_G + \frac{I_{GY}}{x_G \sigma} = 0{,}4 + \frac{\frac{1}{12}\sigma l^2}{x_G \sigma} = 0{,}4 + 0{,}0\hat{6} = 0{,}4\hat{6};$$