TEORÍA DE CAMPOS Y OPERADORES DIFERENCIALES. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dado un campo vectorial $\vec{v} = -(x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + \varphi(x,y,z)\,\vec{k}$ en donde φ es una función tal que sus derivadas parciales son las funciones $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xz;\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2yz$ con la condición de que la divergencia del campo vectorial $\vec{v}$ sea $div\,\vec{v} = x^2 + y^2$ siendo además la función φ(x,y,z) nula sobre el plano XOY.

Determinar:

a) La componente z del campo $\vec{v}$.

b) El flujo del campo $\vec{v}$ a través de la superficie de un cilindro de radio R y altura h cuya base inferior está situada en el plano coordenado XOY siendo su eje paralelo al coordenado OZ y siendo (x_0y_0) las coordenadas del centro de su base inferior.

c) Indicar la posición que deberá adoptar el eje del cilindro para que el flujo del campo $\vec{v}$ a través del mismo sea mínimo.

RESOLUCIÓN

a) Obtenemos la función φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xz \Rightarrow \varphi = x^2 z + M(y,z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2yz \Rightarrow 2yz = \frac{\partial\left[x^2 z + M(y,z)\right]}{\partial y} = \frac{\partial M(y,z)}{\partial y} \Rightarrow M(y,z) = y^2 z + N(z)$$

$$\varphi = z(y^2 + x^2) + N(z) \Rightarrow \vec{v} = -(x^2+y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} + \left[\left(y^2 + x^2\right)z + N(z)\right]\vec{k}$$

Como $div\,\vec{v} = x^2 + y^2$, necesariamente N(z)=C, y al imponer la condición de que φ(x,y,z) sea nula sobre el plano XOY, N(z)=C=0

$$\vec{v} = -(x^2+y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} + (x^2+y^2)z\vec{k}$$

b) Utilizando conjuntamente la definición de flujo y el teorema de Gaus-Ostrogradski o fórmula de Green:

$$\Phi = \iint_\sigma \vec{v}\cdot d\sigma = \iiint_V (x^2+y^2)\,dV$$

Integral que representa el momento de inercia del cilindro de radio R y altura h respecto al eje OZ. Aplicando el Teorema de Steiner:

$$I_{OZ} = I_{GZ} + V(x_0^2 + y_0^2) = \frac{1}{2}VR^2 + V(x_0^2 + y_0^2)$$

c) Para que el flujo sea mínimo, deben ser cero tanto x_0 como y_0. Por lo que el eje OZ debe coincidir con el eje del cilindro.

2. Exprese si es verdadera (V) o falsa (F) justificando muy brevemente la respuesta

a) Los campos de gradiente son rotacionales

(F) Los campos de gradiente son irrotacionales

b) La circulación de un campo de gradientes a lo largo de una curva cerrada es cero
(V) Ya que son irrotacionales
c) Si la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada es cero podemos afirmar que el campo es irrotacional
(F) La circulación puede ser cero sin ser necesariamente irrotacional
d) Un campo escalar es una función armónica si su laplaciano es cero
(V) Cumple la ecuación de Laplace

3. El rotacional del campo vectorial $\vec{v}(x,y,z) = f_1(z)\vec{i} + f_2(x)\vec{j} + f_3(y)\vec{k}$ es

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 2y\vec{i} + \vec{j} - 3x^2\vec{k} = \vec{v}_1$$

a) Calcular el campo vectorial con la condición de que en el punto (1,2,0) valga $\vec{v}(1,2,0) = \vec{j} + 4\vec{k}$

b) Calcular el flujo del campo vectorial a través de la superficie esférica de ecuación

$$x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

c) Calcular la circulación del campo vectorial a través de la circunferencia situada en un plano paralelo al YOZ, que tiene su centro en C(0,2,1) y de radio 2.

d) Demostrar que el campo vectorial $\vec{v}_1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ admite potencial vector, y calcularlo con las siguientes condiciones:

- El potencial vector $\vec{A}$ es perpendicular al eje OY
- Sus componentes no dependen de la variable z.
- El potencial vector $\vec{A}$ en el punto (1,1,1) vale $\vec{A}(1,1,1) = 3\vec{i}$

RESOLUCIÓN

a) Campo vectorial

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1(z) & f_2(x) & f_3(y) \end{vmatrix} = 2y\vec{i} + \vec{j} - 3x^2\vec{k}$$

$$\frac{\partial f_3(y)}{\partial y} = 2y \quad \rightarrow \; f_3(y) = y^2 + C_1$$

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} = 1 \quad \rightarrow \; f_1(z) = z + C_2$$

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x} = -3x^2 \quad \rightarrow \; f_2(x) = -x^3 + C_3$$

$$\vec{v} = (z + C_2)\vec{i} + (C_3 - x^3)\vec{j} + (y^2 + C_1)\vec{k}$$

$$\vec{v}(1,2,0) = C_2\vec{i} + (C_3 - 1)\vec{j} + (4 + C_1)\vec{k} = \vec{j} + 4\,\vec{k}$$

$$C_2 = 0; \quad C_3 = 2; \quad C_1 = 0;$$

Luego el campo vectorial es: $\vec{v} = (z)\vec{i} + (2 - x^3)\vec{j} + y^2\vec{k}$

Comprobación:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & (2-x^3) & y^2\end{vmatrix}=2y\vec{i}+\vec{j}-3x^2\vec{k};\quad cumple$$

b) El flujo es nulo ya que se trata de un campo vectorial adivergente

$$\Phi=\iint_{\sigma}\vec{v}\cdot d\sigma=\iiint_{v} div\,\vec{v}\cdot dV=0$$

c) Circulación

$$L=\oint\vec{v}\cdot d\vec{s}=\iint_{\sigma}(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})\cdot d\vec{\sigma}=\iint 2y\,d\sigma=2y_G\pi R^2=16\,\pi$$

$$d\vec{\sigma}=d\sigma\vec{\imath};\quad y_G=2;\quad R=2\quad L=\ 16\,\pi$$

d) Admite potencial vector ya que los campos rotacionales son solenoidales

$div\,\overrightarrow{v_1}=0$; $\vec{v}_1=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$; Imponiendo la primera condición $A_y=0$

$$\vec{v}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & 0 & A_z\end{vmatrix}\rightarrow\left\{\begin{matrix}(1)\quad\dfrac{\partial A_z}{\partial y}=2y\ \rightarrow\ A_z=y^2+\alpha(x)\\ (2)\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}=1;\ \rightarrow\quad\dfrac{\partial A_z}{\partial x}=-1\\ (3)\dfrac{\partial A_x}{\partial y}=3x^2\ \rightarrow A_x=3x^2y+\beta(x)\end{matrix}\right\}$$

Imponiendo la segunda condición, al ser las componentes independientes de z $\quad\frac{\partial A_x}{\partial z}=0$

Debe cumplir la ecuación (2) $\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\partial\propto(x)}{\partial x}=1$; integrando:

$\propto(x)=-x+C;\ A_z=y^2-x+C$

$\vec{A}=\ [2x^2y+\beta(x)]\vec{\imath}+(y^2-x+C)\vec{k}$ Imponiendo la tercera condición

$\vec{A}(1{,}1{,}1)=\ [3+\beta(x)]\vec{\imath}+C\vec{k}=3\vec{\imath};\ \rightarrow\beta(x)=0;\ \ C=0$; Por tanto

Solución particular del potencial vector: $\vec{A}=\ (2x^2y)\vec{\imath}+(y^2-x)\vec{k}$

Solución general del potencial vector:

$$\vec{A}'=\ \vec{A}+\vec{\nabla}\emptyset=\ (\frac{\partial\emptyset}{\partial x}+2x^2y)\vec{\imath}+\frac{\partial\emptyset}{\partial y}\vec{\jmath}+(\frac{\partial\emptyset}{\partial z}+y^2-x)\vec{k}$$

4. Dado un campo escalar f(x y z) y un campo vectorial $\vec{G}=\vec{G}(x\ y\ z)$ cuyas componentes son: $G_x=f$; $G_y=2f$; $G_z=3f$, se cumple que $\vec{G}=\ \overrightarrow{grad}f$ y que el campo f toma el valor f(0,0,0)=4.

a) Hallar el campo escalar f(x y z) y el campo vectorial $\vec{G}$.

b) Circulación del campo vectorial $\vec{G}$ a través de la circunferencia $x^2+y^2=R^2$.

c) Comprobar si los campos f y $\vec{G}$ son funciones armónicas

RESOLUCIÓN

a) Teniendo en cuenta que $\vec{G}=\ \overrightarrow{grad}f$, se cumple que:

$$\left.\begin{aligned} G_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f \\ G_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2f \\ G_z &= \frac{\partial f}{\partial z} = 3f \end{aligned}\right\} \qquad df = f(dx + 2dy + 3dz); \qquad \frac{df}{f} = dx + 2dy + 3dz$$

$$ln\ \frac{f}{f_0} = x + 2y + 3z; \qquad f = f_0 \cdot e^{x+2y+3z} = f_0 \cdot e^x e^{2y} e^{3z}$$

Condición $f(0,0,0) = 4;\quad f_0 = 4;\quad f = 4\, e^{x+2y+3z};\quad \vec{G} = 4\, e^{x+2y+3z}(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k})$

b) La circulación es nula ya que los campos de gradiente son irrotacionales

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{s} = \iint_\sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{G}) \cdot d\vec{\sigma} = \iint_\sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

c) Los campos f y $\vec{G}$ no son funciones armónicas ya las segundas derivadas respecto a x, y, z no son nulas

5. Dado el campo vectorial $\vec{v} = y\vec{i} + x\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$. Calcular:

a) Líneas de campo.

b) Flujo del campo vectorial $\vec{v}$ a través de un cilindro de radio R y altura h cuyo eje coincide con el eje OZ.

RESOLUCIÓN

a) Las líneas de campo se obtienen por integración del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{x^2+y^2}; \quad xdx - ydy = 0; \quad x^2 - y^2 = C_1$$

$$\frac{ydx}{y^2} = \frac{xdy}{x^2} = \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2} = \frac{dz}{x^2+y^2}; \quad d(xy) = dz; \quad xy = z + C_2$$

b) El flujo es nulo ya que se trata de un campo vectorial adivergente

$$\Phi = \iint_\sigma \vec{v} \cdot d\sigma = \iiint_v div\,\vec{v} \cdot dv = 0$$

6. Flujo del campo vectorial $\vec{v} = x^2\vec{\imath} + 2y^2\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$ a través de la superficie que delimita un paralelepípedo recto de aristas *a, b, c* centrado en *G(a/2, b/2, c/2).* Exprese el resultado en función de las aristas *a, b, c.*

Si el paralelepípedo estuviera centrado en el origen de coordenadas ¿se mantendría el mismo valor del flujo?

RESOLUCIÓN

Por tratarse de una superficie cerrada, se aplica el teorema de Gauss-Ostrogadsky

$$div\ \vec{v} = 2x + 4y + 2z$$

$$\Phi = \iiint div\ \vec{v} \cdot dv = \iiint (2x + 4y + 2z)dv = (2\, x_G + 4y_G + 2z_G)V$$

$$\Phi = (a + 2b + c)abc$$

Si el paralelepípedo estuviera centrado en el origen de coordenadas el flujo se anularía al ser nulas las componentes del centro de gravedad.

7. Dado el campo vectorial $\vec{v} = z^2\vec{\imath} + 3y\,\vec{\jmath} - 3z\,\vec{k}$. Calcular:

a) Potencial escalar asociado a dicho campo con la condición de ser nulo en el origen de coordenadas.

b) Solución general y solución particular del potencial vector con las siguientes condiciones:

- El potencial vector $\vec{A}$ es perpendicular al eje OX
- La componente A_z solo depende de las variables (x,y): $A_z = A_z(x,y)$
- La componente A_y solo depende de las variables (x,z): $A_y = A_y(x,z)$

c) Laplaciano del campo vectorial $\vec{v}$, indicando si sus componentes son funciones armónicas

d) Circulación del campo vectorial $\vec{v}$ a través de la curva que limita una circunferencia situada en el plano XOZ con centro en C(2,0,3) y radio R=2

RESOLUCIÓN

a) Potencial escalar

Para que exista potencial escalar, el campo vectorial debe ser irrotacional o conservativo. El rotacional del campo es:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 3y & -3z \end{vmatrix} = 2z\vec{j} \neq 0$$

Por tanto, no existe potencial escalar

b) Potencial vector:

Para que exista potencial vector, el campo vectorial debe ser solenoidal o adivergente

$$div\,\vec{v} = 3 - 3 = 0$$

Por tanto, existe potencial vector tal que: $\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

La primera condición (potencial vector $\vec{A}$ es perpendicular al eje OX) implica que $A_x = 0$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

(1) $\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = z^2$

(2) $\frac{\partial A_z}{\partial x} = -3y$ Integrando $A_z = -3yx + \alpha(y,z)$

(3) $\frac{\partial A_y}{\partial x} = -3z$ Integrando $A_y = -3zx + \beta(y,z)$

La segunda condición, $A_z = A_z(x,y)$, implica que la función $\alpha(y,z) = 0$, por lo que

$$A_z = -3yx$$

Para calcular $\beta(y,z)$, obligamos a que se cumpla la ecuación (1):

$$-3x + 3x - \frac{\partial\beta(yz)}{\partial z} = z^2;\ \frac{\partial\beta(yz)}{\partial z} = -z^2, \text{ integrando } \beta(y,z) = -\frac{z^3}{3} + \gamma(y)$$

La tercera condición, $A_y = A_y(x,z)$, implica que la función $\gamma(y) = 0$, por lo que

$$A_y = -3zx - \frac{z^3}{3}$$

La solución particular del potencial vector es: $\vec{A} = (-3zx - \frac{z^3}{3})\vec{j} - 3yx\,\vec{k}$

La solución general del potencial vector se obtiene añadiendo a la solución particular un campo arbitrario de gradientes: $\overrightarrow{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\,\vec{\imath} + (\frac{\partial\emptyset}{\partial y} - 3zx - \frac{z^3}{3})\vec{j} + (\frac{\partial\emptyset}{\partial z} - 3yx)\,\vec{k}$

c) El laplaciano del campo vectorial $\vec{v}$, se obtiene a partir de la expresión:

$$\Delta\vec{v} = \Delta v_x\,\vec{\imath} + \Delta v_y\,\vec{j} + \Delta v_z\vec{k} = 2\vec{\imath}$$

La componente v_x no es armónica, v_y y v_z si son funciones armónicas, ya que sus laplacianos son nulos.

d) Circulación del campo vectorial $\vec{v}$ a través de la curva que limita una circunferencia situada en el plano XOZ con centro en C (2,0,3) y radio R=2

Se aplica el teorema de Stokes, por tratarse de una curva cerrada:

$$L = \oint \vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = \iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})d\vec{\sigma}$$

Teniendo en cuenta que $d\vec{\sigma} = d\sigma\vec{j}$; $\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = 2z\,\vec{j}$; $z_G = 3$; $\sigma = \pi R^2 = 4\pi$, se obtiene:

$$L = \oint \vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = \iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})d\vec{\sigma} = \iint 2z\cdot d\sigma = 2z_G\sigma = 24\pi$$