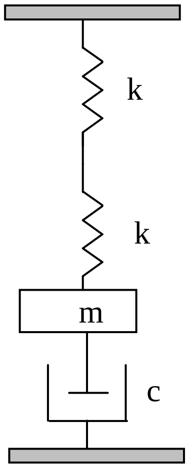
TEORÍA DE LAS VIBRACIONES MECÁNICAS. PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un objeto de 10 kg está suspendido por dos muelles idénticos de constante elástica K=500 N/m asociados en serie, y un amortiguador de tipo viscoso de constante c=90 N·s/m. Calcular:



a) Coeficiente de amortiguamiento crítico
b) Factor de frecuencias (Ω)
c) Valor del pseudoperiodo justificando su existencia
d) Si, inicialmente, se separa de su posición de equilibrio estable 5cm, calcular la energía total en ese instante
e) Indicar el principio de conservación de la energía que cumple

RESOLUCIÓN

a) Constante equivalente (serie)

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{500} + \frac{1}{500} = \frac{2}{500}; \quad K_{eq} = 250\ N/m$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2 \cdot \sqrt{2500} = 100\ \frac{N \cdot s}{m}; \quad w_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = 5\,\frac{rad}{s}; \ f = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{90}{100} = 0{,}9$$

b) Factor de frecuencias

$$\Omega^2 = 1 - f^2 = 0{,}19; \ = 0{,}527; \ \Omega = 0{,}436; \quad \Omega = \frac{w_n'}{w_n} = \frac{2{,}18}{5} = 0{,}436;$$

Comprobación: $w_n' = w_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2} = 5\sqrt{1 - \left(\frac{90}{100}\right)^2} = 2{,}18\ rad/s$

c) Pseudoperiodo, existe por ser un amortiguamiento subcrítico

$$T' = \frac{2\pi}{w'_n} = \frac{2\pi}{2{,}18} = 2{,}88\ s$$

d) Cumple el principio de conservación de la energía total, el principio de conservación de la energía mecánica no lo cumple por existir fuerza amortiguadora disipadora de energía

2. VIBRACIONES MECÁNICAS

a) Escribir la ecuación diferencial general de las vibraciones indicando qué tipo de fuerza representa cada término.
b) Clasificación de la vibraciones estableciendo, para cada caso, su ecuación diferencial
c) Indicar cuándo se producen los denominados efectos resonantes y citar un ejemplo
d) Un sistema está formado por una masa m suspendida de dos muelles cuyas constantes elásticas son K_1=1 kN/m y K_2=0,5 kN/m y vibra libremente con amplitud *A*. Indicar en cuál de los casos (asociación en serie o en paralelo) el sistema vibra con mayor frecuencia y posee mayor energía total, justificando su respuesta.

RESOLUCIÓN

a) La suma de la fuerza de inercia, fuerza amortiguadora y fuerza recuperadora elástica es igual a la resultante de las fuerzas exteriores: $mx'' + cx' + kx = F$, siendo $F = F_0 sen\ wt$

b) Clasificación de la vibraciones

Vibración libre sin amortiguamiento $mx'' + kx = 0$

Vibración libre con amortiguamiento $mx'' + cx' + kx = 0$

Vibración forzada sin amortiguamiento $mx'' + kx = F$

Vibración forzada con amortiguamiento $mx'' + cx' + kx = F$

c) Los efectos resonantes se producen cuando la frecuencia natural w_n se iguala a la frecuencia de la fuerza exterior w. Ejemplos: rotura de cristales por el paso de un avión, rotura de una copa por una determinada voz; paso acompasado de soldados en un puente; un viento armónico puede producir el derrumbamiento de un puente colgante.

d) Valor de la constante en serie:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{0,5} = 3; \quad K_s = 0,3\hat{3}\ kN/m = 333,33N/m;$$

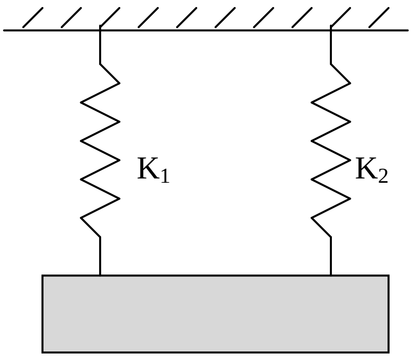
Valor de la constante en paralelo:

$$K_p = K_1 + K_2 = 1500\frac{N}{m} = 1,5\ kN/m = 1500\ N/m$$

$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}; \qquad E = \frac{1}{2}KA^2$$

Asociación en paralelo: a mayor constante, mayor frecuencia y mayor energía

3. Un bloque de 4 kg. de masa se mueve entre guías verticales suspendido por dos muelles iguales de constante recuperadora elástica $K_1 = K_2 = 50$ N/m, como se indica en la figura. Calcular:



a) Ecuación de las pequeñas oscilaciones del sistema.
b) Periodo y frecuencia del movimiento resultante.
c) Velocidad y aceleración máxima del bloque si la amplitud del movimiento es a=60 mm.
d) Determinar la masa que debería tener el bloque para que su periodo de oscilación sea 1 s.

RESOLUCIÓN

a) Los muelles están asociados en paralelo y oscilan con vibración libre sin amortiguamiento de acuerdo a la ecuación:

$$mx'' + K_p x = 0; \ 4x'' + 100x = 0; \ x'' + 25x = 0$$

$$K_p = K_1 + K_2 = 100\ N/m$$

b) La frecuencia natural y el periodo son:

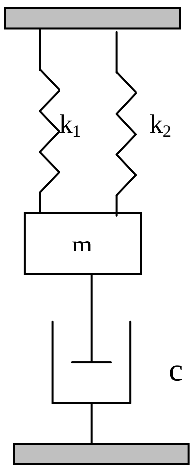
$$w_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = 5rad/s; \qquad T = \frac{2\pi}{w_n} = \frac{2\pi}{5} = 1{,}25\ s$$

c) La velocidad máxima del bloque para una amplitud de a=60 mm es: $x'_{max} = a\, w_n = 0{,}3\ m/s$
y la aceleración máxima $x''_{max} = a\, w_n^2 = 1{,}5\ m/s^2$

d) La masa que debería tener el bloque para que su periodo de oscilación sea 1 s se obtiene para una frecuencia natural igual a $w_n = 2\pi$, por tanto:

$$2\pi = \sqrt{\frac{100}{m}}; \quad m = \frac{10}{4\pi^2} = 0{,}25\ kg$$

4. El sistema de la figura consta de una masa, dos muelles y un amortiguador de características:
$m = 20\,kg; \quad k_1 = 50\,N/m; \quad k_2 = 70\,N/m; \quad c = 80\,N \cdot s/m$
Determinar:
a) Ecuación diferencial del movimiento y su solución general
b) Coeficiente de amortiguamiento crítico, indicando el tipo de amortiguamiento del sistema
c) Frecuencia de la vibración libre y frecuencia de la vibración libre amortiguada
d) Valor del pseudoperiodo justificando su existencia
e) Si inicialmente, la masa se desplaza de su posición de equilibrio estable $a = 5\,cm$, calcular la energía mecánica comunicada inicialmente al sistema indicando si se conserva en el transcurso del movimiento o no.



RESOLUCIÓN

a) La ecuación diferencial del movimiento de una vibración libre amortiguada es:
$mx'' + cx' + k_p x = 0;$
La constante equivalente de los muelles en paralelo es $k_p = k_1 + k_2 = 120\ N/m$, por lo que:
$20x'' + 80x' + 120x = 0;$ Simplificando queda $x'' + 4x' + 6x = 0;$ cuya ecuación característica es $r^2 + 4r + 6 = 0$, donde $r = -2 \pm \sqrt{2}i$
La solución general es: $x = A\, e^{-2t} sen(\sqrt{2}t + \varphi)$

b) El coeficiente de amortiguamiento crítico se obtiene a partir de la expresión:
$$c_{cr} = 2\sqrt{k_p m} = 2\sqrt{2400} = 97{,}98 \approx 100\ \frac{N \cdot s}{m}$$
Como se cumple que $c < c_{cr}$ el tipo de amortiguamiento es subcrítico.

c) La frecuencia de la vibración libre y la frecuencia de la vibración libre amortiguada son:

$$w_n = \sqrt{\frac{k_p}{m}} = \sqrt{\frac{120}{20}} = \sqrt{6}\ rad/s; \qquad w_n' = w_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2} = \sqrt{2}\ rad/s$$

d) Por tratarse de amortiguamiento subcrítico se puede obtener el valor del pseudoperiodo:

$$T' = \frac{2\pi}{w_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = 4{,}44\ s$$

e) La energía mecánica comunicada inicialmente al sistema para $a = 5\,cm$ es:

$$E = \frac{1}{2}\ k_p a^2 = 0{,}15\ J$$

La energía total se conserva en el transcurso del movimiento pero la energía mecánica no, parte se disipa en forma de calor debido al amortiguador.