Sistemas de ecuaciones lineales y matrices

Tema 1

Ultano Kindelán
Marco Antonio Fontelos

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra Lineal

ÍNDICE

1.1 Introducción

En el mundo real muy pocas veces nos encontramos con problemas tan sencillos que dependan de una sola variable. Por ejemplo el beneficio de una empresa manufacturera depende claramente del coste de los materiales, pero también depende de los costes laborales, costes de transporte y de la producción total de la planta. El beneficio es por tanto una función de varias variables. El álgebra lineal estudia las funciones de varias variables más simples: las funciones **lineales.**

Un ejemplo de función lineal es la ecuación de una recta. En el plano *xy* se puede representar una recta mediante la ecuación $a_1x + a_2y = b$. En la expresión anterior se dice que b es una función lineal de x e y. Inversamente, si se conocen b, a_1 y a_2, se puede resolver la ecuación obteniendo los infinitos puntos (pares (x, y)) que pertenecen a la recta.

Una ecuación como la anterior se llama **ecuación lineal** en las variables x e y. De forma general se dice que una ecuación con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es lineal si se puede expresar de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares (reales o complejos) constantes.

El concepto de linealidad se estudiará con precisión cuando se estudien los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales; por ahora nos limitaremos a describir las características de una ecuación lineal. Una ecuación lineal:

- no incluye productos entre variables,
- todas las variables aparecen siempre elevadas a 1,
- las variables no aparecen nunca como argumentos de funciones trigonométricas, logarítmicas o exponenciales.

Ejemplo 1.1

Las siguientes ecuaciones son lineales:

- $x + 3y = 7 \qquad x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 7,$
- $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1 \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$

mientras que las siguientes son no lineales:

- $x + 3y^2 = 7 \qquad 3x + 2y - z + xz = 4,$
- $y - \mathrm{sen}(x) = 0 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1.$

Definición 1.1

*Un **Sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es todo conjunto de relaciones del tipo:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ecuación primera} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{Ecuación segunda} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \\ \text{Ecuación m-ésima} & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (S)$$

- Los a_{ij} (coeficientes) y los b_i (términos independientes) son escalares dados (elementos de un cuerpo cualquiera, por ejemplo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).
- Se dice que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ constituyen una solución de (S) si al tomar $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ se satisfacen las m ecuaciones.

- Resolver (S) es hallar todas sus soluciones. Se dice que un sistema es **compatible** si tiene alguna solución y que es **incompatible** si carece de ellas; cuando es compatible se dice que es **determinado** si tiene una única solución e **indeterminado** si tiene más de una.

Ejemplo 1.2

Como ya se ha comentado, un ejemplo de ecuación lineal es la ecuación de una recta en el plano. Si se estudian las soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se estará estudiando el conjunto de puntos que pertenecen a la vez a las dos rectas.

1. Si el sistema es incompatible las dos rectas son paralelas (no existe ningún punto que pertenezca a la vez a las dos rectas).
2. Si el sistema es compatible se pueden distinguir dos casos:
   - si es determinado las dos rectas se cortan (existe un solo punto que verifica las dos ecuaciones),
   - si es indeterminado las dos rectas son coincidentes (existen infinitos puntos que verifican las dos ecuaciones).

Ejemplo 1.3

La ecuación de un plano en el espacio es una ecuación lineal con tres incógnitas. Si se estudian las soluciones de un sistema formado por tres ecuaciones y tres incógnitas, se estará estudiando el conjunto de puntos del espacio que pertenecen a la vez a los tres planos.

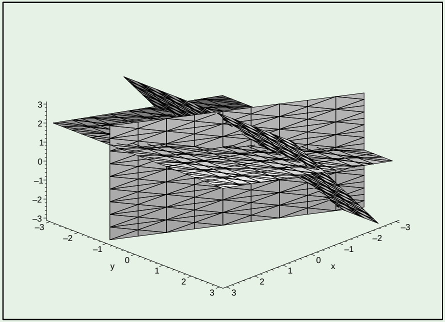

Figura 1: Las ecuaciones de los tres planos del dibujo constituyen un sistema compatible determinado.

Ejemplo 1.3 (Continuación)

En las figuras 1, 2 y 3 se muestran tres posibles posiciones relativas de los planos.

- En 1 al ser el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas compatible determinado, existe un solo punto que verifica las tres ecuaciones y por lo tanto los tres planos se cortan en un punto.
- En 2 el sistema es compatible indeterminado, existen infinitos puntos que verifican las ecuaciones de los tres planos y los tres planos se cortan en una recta.
- Finalmente en 3 el sistema es incompatible y no existe ningún punto que verifique las ecuaciones de los tres planos a la vez.
- Existen otros casos posibles: planos paralelos (sistema incompatible) y planos coincidentes (sistema compatible indeterminado). En cualquier caso la discusión del tipo de solución de un sistema lineal para el caso general de m ecuaciones y n incógnitas se abordará más adelante.

Ejemplo 1.3 (Continuación)

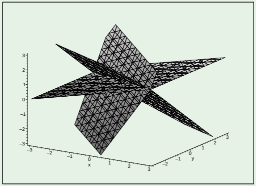

Figura 2: Las ecuaciones de los tres planos del dibujo constituyen un sistema compatible indeterminado.

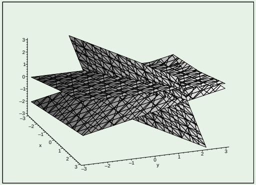

Figura 3: Las ecuaciones de los tres planos del dibujo constituyen un sistema incompatible.

Signo sumatorio, índices mudos e índices libres.

Para escribir de forma breve una suma como $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ se recurre a la letra griega $\sum$ que recibe el nombre de signo sumatorio:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \sum_{j=1}^{n} P_j$$

j se puede sustituir por otra letra cualquiera sin que por ello varíe el resultado:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Signo sumatorio, índices mudos e índices libres. (cont.)

Así por ejemplo las m ecuaciones del sistema (S) se pueden escribir de la forma,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m \end{array}\right\} (S)$$

Signo sumatorio, índices mudos e índices libres. (cont.)

El sistema (S) se puede representar de una forma aun más concisa recurriendo a otro índice que variará de 1 a m. Se puede poner:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (S)$$

i recibe el nombre de **índice libre** (no se ve afectado por el sumatorio).
j recibe el nombre de **índice mudo** (se ve afectado por el sumatorio).

Expresión matricial de un sistema lineal de ecuaciones.

Definición 1.2

*Se denomina **matriz** A de dimensión $m \times n$ a una tabla rectangular de mn escalares que reciben el nombre de elementos de la matriz.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Definición 1.3

*El juego $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ se denomina **fila** i-ésima de la matriz A.*

Definición 1.4

*El juego $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ se denomina **columna** j-ésima de la matriz A.*

Expresión matricial de un sistema lineal de ecuaciones. (cont.)

Definición 1.5

Dado el sistema de ecuaciones lineales (S)*:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{MATRIZ DE COEFICIENTES}$$

$$A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \longleftarrow \textit{MATRIZ AMPLIADA}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{VECTOR DE TÉRMINOS INDEPENDIENTES}$$

1.2 Resolución de sistemas lin.: el método de Gauss

El método más simple para resolver un sistema lineal de ecuaciones es reemplazar el sistema dado por otro que tenga la misma solución pero sea más fácil de resolver.

Definición 1.6

*Dos sistemas de ecuaciones (con las mismas incógnitas) se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones: si toda solución de cada uno de ellos es también solución del otro.*

Definición 1.7

***Operaciones elementales** realizadas **sobre un sistema de ecuaciones lineales**.*

1. *Intercambiar dos ecuaciones del sistema.*
2. *Multiplicar una de las ecuaciones por un escalar no nulo.*
3. *Añadir a una ecuación un múltiplo de otra.*

Definición 1.8

Operaciones elementales** realizadas sobre las **filas** de una **matriz.

1. *Intercambiar dos filas de la matriz*
2. *Multiplicar una de las filas de la matriz por un escalar no nulo.*
3. *Añadir a una fila de la matriz un múltiplo de otra.*

Proposición 1.1

Un sistema de ecuaciones lineales es equivalente a cualquiera que resulte de realizar en él operaciones elementales.

Proposición 1.2

Un sistema de ecuaciones lineales es equivalente a cualquiera que resulte de realizar operaciones elementales sobre las filas de la **matriz ampliada** del sistema.

Ejemplo 1.4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Solución: se va a resolver el sistema anterior utilizando las dos últimas proposiciones enunciadas. En la columna de la izquierda se van a realizar operaciones elementales sobre las **ecuaciones** del sistema y en la columna de la derecha se van a realizar operaciones elementales sobre las **filas** de la **matriz ampliada**.

Ejemplo 1.4 (cont.)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (F2) - 2(F1) \\ (F3) - 3(F1) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (F3) - \frac{3}{2}(F2) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \quad (A)$$

Ejemplo 1.4 (cont.)

$$\begin{array}{c}(F2)-14(F3)\\(F1)+4(F3)\\\downarrow\end{array}$$

$$\begin{aligned} x+y&=3\\ 2y&=4\\ -\tfrac{1}{2}z&=-\tfrac{3}{2}\end{aligned}\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&3\\0&2&0&4\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}(F1)-\frac{1}{2}(F2)\\\downarrow\end{array}$$

$$\begin{aligned} x&=1\\ 2y&=4\\ -\tfrac{1}{2}z&=-\tfrac{3}{2}\end{aligned}\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&2&0&4\\0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\frac{1}{2}(F2)\\-2(F3)\\\downarrow\end{array}$$

$$\begin{aligned} x&=1\\ y&=2\\ z&=3\end{aligned}\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

Ejemplo 1.4 (cont.)

Una vez que se ha obtenido el sistema (A) se puede elegir otro camino para resolver el sistema inicial:

$$\left.\begin{array}{rcllll} x+y+2z=9 & \rightarrow & x=9-8=1 & & & \\ 2y-7z=-17 & \rightarrow & 2y-21=-17 & \rightarrow & y=2 \rightarrow\uparrow & \\ -\frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} & \rightarrow & z=3 & \rightarrow\uparrow & & \end{array}\right\} \textbf{Proceso de remonte}$$

El ejemplo anterior sugiere dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones mediante operaciones elementales. A continuación vamos a generalizar estos dos procedimientos de forma que sean válidos para resolver cualquier tipo de sistema.

Definición 1.9

*Una fila de una matriz se dice que es una **fila nula** si todos los elementos que la forman son ceros.*

Definición 1.10

*El primer elemento no nulo por la izquierda de una fila de una matriz se denomina **cabecera de la fila** correspondiente.*

Definición 1.11

*Se dirá que una matriz es una **matriz escalonada** si se verifican las siguientes propiedades:*

1. *si existen filas nulas están agrupadas al final de la matriz,*
2. *en cualesquiera dos filas sucesivas no nulas la cabecera de fila de la fila inferior aparece más a la derecha que la cabecera de la fila superior.*

Observación 1.1

De la definición anterior de deduce que en una matriz escalonada se verifica que por debajo de cada cabecera de fila únicamente hay ceros.

$$\begin{pmatrix} \& & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \& & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \& & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \& & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \& & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0=elementos nulos
&=cabeceras de fila ($\neq 0$)
*=elementos cualesquiera

MATRIZ ESCALONADA

Definición 1.12

*Se dirá que una matriz es una **matriz escalonada reducida** si se verifican, además de las propiedades 1 y 2, las siguientes propiedades:*

3. *Todas las cabeceras de fila son iguales a uno.*
4. *Cada columna que contenga una de las cabeceras de fila tiene el resto de los elementos nulos.*

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0=elementos nulos
1=elementos unidad
*=elementos cualesquiera

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

Ejemplo 1.5 (Matrices escalonadas)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.6 (Matrices escalonadas reducidas)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.13

Un sistema de ecuaciones se dice que es un ***sistema escalonado*** *(respectivamente* ***escalonado reducido****) si su matriz de coeficientes es escalonada (respectivamente escalonada reducida).*

Proposición 1.3

Sea (S) el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

Siempre es posible transformar (S) en un sistema escalonado, (E), e incluso en un sistema escalonado reducido, (E').

Observación 1.2

Para cada sistema de ecuaciones lineales (S) existe un único sistema escalonado reducido equivalente.

Se puede proceder de dos maneras para resolver el sistema (S):

1. Hallando un sistema escalonado, (E), equivalente a (S). Una vez obtenido E se despeja la incógnita de cabecera de su última ecuación y, avanzando de abajo arriba, se sustituye el valor hallado para cada incógnita en la ecuación anterior, de la que se despeja una nueva incógnita. $\rightarrow$ MÉTODO DE GAUSS.
2. Hallando el sistema escalonado reducido, (E'), equivalente a (S). Una vez obtenido (E') se despeja directamente, para cada una de las ecuaciones, la incógnita que esté en su cabecera. $\rightarrow$ MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

Ya sólo queda, pues, explicar cómo se obtiene un sistema escalonado reducido a partir de un sistema cualquiera. Para ello bastará explicar cómo se obtiene una matriz escalonada reducida a partir de una matriz cualquiera.

Definición 1.14

Se dice que el elemento $a_{ij} \neq 0$ de una matriz A se ***utiliza como pivote*** *hacia abajo (o hacia arriba) si en las filas de A se realizan aquellas operaciones elementales que convierten en 0 a los demás elementos de la columna j que están por debajo (o por arriba) del a_{ij}. Todo elemento no nulo de A puede utilizarse como pivote.*

Proceso para obtener una matriz escalonada reducida a partir de una matriz cualquiera A

1. *Obtención de una matriz escalonada*
    1. Intercambiando 2 filas de A, si fuera preciso se obtendría en el lugar (1,1) un elemento no nulo.
    2. Utilizándolo como pivote se transforman en cero todos los elementos situado por debajo de él.
    3. Si todos los elementos que quedan por debajo del (1,2) son nulos se deja la 2^a columna sin modificar.

Obtención matriz escalonada reducida (cont.)

1. *Obtención de una matriz escalonada. (cont.)*
   4. Si alguno de ellos fuese no nulo, intercambiando dos filas si fuera preciso, se lleva al lugar (2,2) y luego se utiliza como pivote para anular todos los elementos que están situados por debajo de él.
   5. Se pasa ahora a la tercera columna con la que se procede de manera análoga y se reitera el proceso hasta llegar a la última columna.
2. *Obtención de una matriz escalonada reducida a partir de una matriz escalonada*
   6. Nos fijamos en las cabeceras de cada una de las filas no nulas y denotamos como (1,1), (2,j_2)$, \ldots, (r, j_r)$ los lugares que ocupan las cabeceras de cada fila. Utilizando como pivote el elemento (r, j_r) se anulan los elementos de la columna j_r situados por encima.
   7. Se hace lo mismo con el elemento $(r-1, j_{r-1})$ y así hasta llegar al elemento $(2, j_2)$.
   8. Se divide cada fila i no nula por su cabecera de fila.

Ejemplo 1.7 (Resolver el siguiente sistema de ecuaciones)

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_5 &= 800 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 400 \\
x_2 - x_3 &= 600 \\
x_3 - x_7 &= -1200 \\
x_4 + x_6 - x_7 &= 0 \\
x_5 + x_6 &= 1000
\end{aligned}
$$

Solución: Se va a utilizar el método de Gauss - Jordan para resolverlo.

Ejemplo 1.7 (cont.)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \text{-1200} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \end{array}\right)$$

$$\underset{\downarrow}{\text{(F2)-(F1)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \text{-400} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \text{-1200} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \end{array}\right)$$

$$\underset{\downarrow}{\text{(F3)+(F2)}}$$

Ejemplo 1.7 (cont.)

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -400 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1200 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000
\end{array}\right)
$$

$$\underset{\downarrow}{\text{(F4)+(F3)}}$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -400 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1000 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000
\end{array}\right)
$$

$$\underset{\downarrow}{\text{(F5)-(F4)}}$$

Ejemplo 1.7 (cont.)

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \text{-}400 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & \text{-}1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{\text{(F6)-(F5)}}{\downarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \text{-}400 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & \text{-}1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1.7 (cont.)

A partir de aquí se podría resolver el sistema por el método de Gauss. Sin embargo en este caso, como se ha dicho en el enunciado, se emplea el método de Gauss - Jordan por lo que se continuará realizando operaciones elementales hasta obtener una matriz de coeficientes escalonada reducida.

$$\begin{array}{c}\text{(F4)+(F5)}\\ \text{(F3)+(F5)}\\ \text{(F2)+(F5)}\\ \text{(F1)-(F5)}\\ \downarrow\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \text{-200} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 600 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1.7 (cont.)

$$\begin{array}{c}\text{(F3)-(F4)}\\ \text{(F2)-(F4)}\\ \downarrow\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \text{-200} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1.7 (cont.)

$$\begin{array}{c} (-1)(F3) \\ (-1)(F2) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto la solución es $x_1 = -200 + x_6$;
$x_2 = -600 + x_7$; $x_3 = -1200 + x_7$; $x_4 = x_7 - x_6$ y $x_5 = 1000 - x_6$. Es por lo tanto un sistema **compatible indeterminado.**

Proposición 1.4

Sea (E) un sistema escalonado de m ecuaciones con n incógnitas, r el número de filas no nulas de la matriz de coeficientes de (E) y s el número de filas no nulas de su matriz ampliada. Respecto a la existencia y unicidad de soluciones de (E) se puede afirmar lo siguiente:

1. El sistema (E) es compatible si y sólo si (Ssi) $r = s$.
2. Si el sistema (E) es compatible, entonces:
    1. el sistema es compatible determinado si $r = n$,
    2. el sistema es compatible indeterminado si $r < n$. Obsérvese que r nunca puede ser mayor que n.

Corolario 1.1

Sea (E) un sistema escalonado de m ecuaciones con n incógnitas y r el número de filas no nulas de la matriz de coeficientes de (E). El sistema es compatible Ssi sus últimos $m - r$ términos independientes son todos nulos.

Corolario 1.2

Sea (S) un sistema de m ecuaciones y n incógnitas. Si $m < n$ entonces el sistema bien es incompatible, bien tiene infinitas soluciones.

1.3 Sistemas homogéneos

Definición 1.15

Un sistema de ecuaciones se dice ***homogéneo*** *si tiene nulos todos sus términos independientes:* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \ (i = 1, \ldots, m)$ *(H)*

Proposición 1.5

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo (H) tiene, al menos, la solución $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, llamada solución trivial o nula, por lo que siempre es compatible. Será compatible indeterminado si tiene alguna solución no nula.

Proposición 1.6

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n)$ son soluciones del sistema homogéneo (H), entonces $\lambda\alpha + \mu\beta$ (λ y μ son dos escalares cualesquiera) también es una solución del sistema (H).

Proposición 1.7

Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más de una solución entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Proposición 1.8

Sea (H) un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas. Si m es menor que n, entonces (H) tiene alguna solución no nula y por tanto tiene infinitas soluciones.

1.4 Rango de una Matriz. Teorema de Rouché

1.4.1 Vectores de n componentes

Definición 1.16

Dados un número natural n (fijo) y un cuerpo $\boldsymbol{K}$ *(Por ejemplo* $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ *ó* $\boldsymbol{K} = \mathbb{C}$*) a cuyos elementos llamaremos escalares, se llaman* ***vectores de*** *n* ***componentes*** *del cuerpo* $\boldsymbol{K}$ *a las sucesiones o sistemas ordenados de n escalares de* $\boldsymbol{K}$*. Se representan del siguiente modo:*

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$$\textit{donde} \begin{cases} u_1, u_2, \ldots, u_n \in \boldsymbol{K} \\ u_i \textit{ recibe el nombre de componente } i\textit{- ésima de } \mathbf{u} \end{cases}$$

Definición 1.17 (Operaciones entre vectores)

1. *Suma*

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\ \mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\end{array}\right. \rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)$$

2. *Producto por escalar*

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\ \lambda \text{ es un escalar}\end{array}\right\} \rightarrow \lambda\mathbf{u}=(\lambda u_1,\lambda u_2,\ldots,\lambda u_n)$$

Observación 1.3

1. Un vector de n componentes no es un conjunto de n escalares. Si las n componentes de un vector se colocan en distinto orden, ya no encarnan el mismo vector; este pasa a ser otro.
2. Notación: los vectores se escribirán en negrita.
3. Si las componentes de un vector se escriben una detrás de otra se dice que el vector aparece como *vector fila*. Si se escriben una debajo de otra se dirá que aparece como *vector columna*.

Proposición 1.9 (Propiedades de las oper. entre vect.)

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de n componentes y si λ y μ son escalares:

1. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
3. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$, donde $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$ se llama vector nulo.
4. Para cada $\mathbf{u}$, existe un vector $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$;
   Si $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, entonces $-\mathbf{u}=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n)$
   Al vector $-\mathbf{u}$ se le llama opuesto de $\mathbf{u}$.
5. $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u}$
7. $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$
9. $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$ y $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$
10. $\lambda\mathbf{u}=\mathbf{0}\Rightarrow[\lambda=0$ ó $\mathbf{u}=\mathbf{0}]$
11. $(-\lambda)\mathbf{u}=\lambda(-\mathbf{u})=-(\lambda\mathbf{u})$

1.4.2 Dependencia e independencia lineal

Definición 1.18

Se dice que un vector $\mathbf{v}$ *es una* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ *o que* $\mathbf{v}$ ***depende linealmente*** *de ellos si para algunos escalares* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*, se verifica:*
$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{u}_n$

Observación 1.4

La dependencia lineal es transitiva: si $\mathbf{v}$ depende linealmente de unos vectores y éstos a su vez dependen linealmente de otros, entonces $\mathbf{v}$ también depende linealmente de estos últimos.

Definición 1.19

Se dice que un sistema (o conjunto) de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es un sistema ligado o linealmente dependiente si se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes entre sí:*

1. *Alguno de los vectores de S depende linealmente de los demás.*
2. *Para algunos escalares* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *no todos nulos* $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Observación 1.5

Si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ son p vectores de n componentes y si $p > n$ entonces $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ es un sistema ligado.

Definición 1.20

Se dice que un sistema (o conjunto) de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *es un sistema libre o linealmente independiente si se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes entre sí:*

1. *El sistema S no es linealmente dependiente, es decir, ninguno de los vectores de S depende linealmente de los demás.*
2. *La única combinación lineal de vectores de S que es nula es la que tiene todos sus coeficientes nulos; esto es:*
   $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$
   ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ escalares).

1.4.3 Rango de un sistema de vectores

Proposición 1.10

Para cualquiera que sea el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de p vectores, no todos nulos, se verifica que:

1. Hay algún sistema, S_0, de vectores de S t.q.
   (a) S_0 es linealmente independiente.
   (b) Todos los demás vectores de S dependen linealmente de S_0.
2. Todos los sistemas S_0 de vectores de S que satisfacen los requerimientos (a) y (b) tienen el mismo número de vectores.

Definición 1.21

*El número de vectores de S_0 recibe el nombre de **rango** del conjunto S. $\Leftrightarrow$ El máximo número de vectores linealmente independientes entre sí que se pueden encontrar en S.*

Observación 1.6

Para hallar el rango de un sistema de vectores habrá que ir desechando aquellos vectores que resulten ser combinación lineal de los que van quedando, hasta que formen un sistema linealmente independiente: el número de vectores de este último es el rango buscado.

Proposición 1.11

El rango de un conjunto de vectores no se altera si se realizan en el **operaciones elementales.** Se entiende por operaciones elementales realizadas sobre un conjunto de vectores las siguientes:

1. cambiar de posición dos vectores,
2. multiplicar un vector por un escalar,
3. sumarle a un vector otro vector del conjunto multiplicado por un escalar.

Observación 1.7

Si las componentes de cada uno de los vectores de un conjunto S de p vectores de n componentes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ se denotan por $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{in})$, realizar operaciones elementales sobre el conjunto S es equivalente a realizar operaciones elementales sobre las filas de una matriz de dimensión $p \times n$ cuyo término general es v_{ij} (la fila *i-ésima* de la matriz coincide con las componentes del vector $\mathbf{v}_i$ $i = 1, \ldots, p$).

Proposición 1.12

Sea $S = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ un conjunto formado por vectores de n componentes

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ &\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ &\mathbf{a}_p = (a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}) \end{aligned}$$

y sea A una matriz cuya fila *i-ésima* está formada por las n componentes del vector $\mathbf{a}_i$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n}$$

Si A' es una matriz escalonada equivalente a A (que siempre es posible hallar), el rango de S coincide con el número de filas no nulas de A'.

1.4.4 Rango de una matriz. Teorema de Rouché

Teorema 1.3 (del rango)

Para cualquier matriz $A = (a_{ij})$ *de m filas y n columnas se verifica que el rango del conjunto de sus m vectores filas (que se llama rango de las filas de A) es igual al rango del conjunto de sus n vectores columna (que se llama rango de las columnas de* A*). A cualquiera de estos dos rangos, iguales entre sí, se le llama rango de la matriz* A*, y se denota por* $\mathrm{rg}(A)$.

Proposición 1.13

Para cualquier matriz $A = (a_{ij})$ de m filas y n columnas se verifica:

1. el rango de A no se altera si se realizan operaciones elementales en sus filas o en sus columnas,
2. el rango de A es igual al número de filas no nulas de una matriz escalonada, E, equivalente a A.

Teorema 1.4 (Teorema de Rouché)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \qquad (S)$$

Si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *es la matriz de coeficientes de* (S) *y* $A_b = (\, a_{ij} \,|\, b_i)_{m\times(n+1)}$ *es la matriz ampliada de* (S), *entonces:*

1. *si rg(* A *)* $\neq$ *rg(* A_b *) el sistema es incompatible.*
2. *Si rg(* A *)* $=$ *rg(* A_b *), entonces:*
   1. *si rg(* A *)* $= n$ *el sistema* (S) *es compatible determinado.*
   2. *Si rg(* A *)* $< n$ *el sistema* (S) *es compatible indeterminado.*

1.5 Operaciones sobre matrices

Observación 1.8 (Recordatorio notación matrices)

Mayúsculas para designar las matrices y minúsculas para designar los coeficientes o elementos de las matrices, $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Definición 1.22

*Se dice que dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{r\times s}$ son **iguales** si tienen la misma dimensión ($m = r$ y $n = s$) y además sus elementos son iguales ($a_{ij} = b_{ij}$; $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$).*

Definición 1.23

*Si $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ son dos matrices de la misma dimensión entonces la matriz **suma** $C = A + B$ es una matriz de la misma dimensión que A y B cuyos elementos verifican:*
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$).
No se pueden sumar matrices de distinta dimensión.

Definición 1.24

Si A es una matriz y λ es un escalar, entonces el producto λA es otra matriz obtenida multiplicando todos los elementos de A por el escalar $\lambda : \lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Prop. de la suma de matr. y del producto de matr. por esc.

Para cualesquiera que sean las matrices A, B y C de la misma dimensión y para cualesquiera escalares λ y μ, se verifica:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1A = A$

Observación 1.9

$(0)_{m \times n}$ representa la **matriz nula** de dimensión $m \times n$, y es aquella cuyos elementos son todos iguales al escalar nulo. $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$ se llama **matriz opuesta** de A y es aquella de tamaño $m \times n$ cuyos elementos son los escalares opuestos de los respectivos elementos de A.

Definición 1.25

*Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{r \times s}$, si $n = r$ se define la matriz **producto** de A por B y se representa por AB a la siguiente matriz de dimensión $(m \times s)$:*

$$C = AB \text{ en donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Si $n \neq r$ el producto de matrices no está definido.

Prop. de la multip. de matrices

Para tres matrices cualesquiera A, B y C de dimensiones respectivas $m \times n$, $n \times r$ y $r \times s$ se verifica

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $AI_n = A$, en donde $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ con $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ recibe el nombre de **matriz unidad.**

Observación 1.10

El producto de matrices no es conmutativo.

Observación 1.11

Las matrices no son regulares o simplificables: $AB = AC$ no implica $B = C$.

Observación 1.12

Puede ser $AB = (0)$ sin que sean $A = (0)$ ó $B = (0)$.

Observación 1.13

Un sistema lineal de ecuaciones se puede expresar como un producto de matrices por ejemplo: $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ se puede poner como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = (a_{ij})_{m\times n}$; $\mathbf{x} = (x_k)_{k=1,\ldots,n}$ y $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1,\ldots,m}$.

Definición 1.26

Dada una matriz A de dimensión $m \times n$ se dice que A es una matriz ***cuadrada*** *de dimensión n si $m = n$. Si A es cuadrada y para $i > j$ $a_{ij} = 0$, se dice que A es* ***triangular superior****; si A es cuadrada y para $i < j$ es $a_{ij} = 0$, se dice que A es* ***triangular inferior****, si A es cuadrada y para $i \neq j$ es $a_{ij} = 0$ se dice que A es* ***diagonal****. Si $m = 1$ se dice que es una* ***matriz fila****, si $n = 1$ se dice que es una* ***matriz columna****. Si A es cuadrada y para cualesquiera i y j es $a_{ij} = a_{ji}$ se dice que A es una* ***matriz simétrica****. Si A es cuadrada y para cualesquiera i y j es $a_{ij} = -a_{ji}$ se dice que A es una* ***matriz antisimétrica****.*

Definición 1.27

Si A es una matriz cuadrada, la suma de los elementos de su diagonal recibe el nombre de ***traza*** *de A y se representa por $tr(A)$: si la dimensión de A es n, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Definición 1.28

*Dada una matriz A de dimensión $m \times n$ se llama **traspuesta** de la matriz A y se representa por A^t a la matriz de dimensión $n \times m$ que tiene por elemento del lugar (ij) al elemento del lugar (ji) de A (las filas de A pasan a ser las columnas de A^t y las columnas de A pasan a ser las filas de A^t):*

$A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^t = (a^t_{ij})_{n\times m}$ *con* $a^t_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, \dots n;\ j = 1, \dots, m)$.

Propiedades de la matriz traspuesta

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$ (A y B de la misma dimensión)
3. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$ (A y B matrices multiplicables)
5. $(A_1 A_2 \cdots A_p)^t = A^t_p A^t_{p-1} \cdots A^t_1$ ($A_1 A_2 \cdots A_p$ matrices multiplicables)

Observación 1.14

Si A es una matriz cuadrada $A = A^t \iff A$ es simétrica, $A = -A^t \iff A$ es antisimétrica. Para cualquier matriz cuadrada M, $M + M^t$ es simétrica y $M - M^t$ es antisimétrica.

Definición 1.29

Si A es una matriz cuadrada de dimensión n y se puede encontrar otra matriz cuadrada B tal que $AB = BA = I_n$ *(matriz unidad), se dice que A es una matriz* ***inversible****. B se denomina matriz* ***inversa*** *de A y se representa por* A^{-1}.

Propiedades de la matriz inversa

1. Si A tiene inversa entonces sólo tiene una inversa: $AB = BA = I_n$ y $AC = CA = I_n \Rightarrow B = C$.
2. Si A y B tienen inversa entonces el producto AB también tiene inversa:
   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   Se puede generalizar el resultado anterior:
   $(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}$.
3. Si A tiene inversa entonces su traspuesta también tiene inversa que vale:
   $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Observación 1.15

Las matrices inversibles son simplificables (o regulares): $AB = AC \Rightarrow B = C$.

Observación 1.16

Dado el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si la matriz A es inversible la solución de S será única e igual a $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Potencias de una matriz

$$A^0 = I_n \qquad A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n \text{ veces}}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n \text{ veces}}$$

$$A^rA^s = A^{r+s} \qquad (A^r)^s = A^{rs}$$

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \qquad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

1.5.1 Cálculo de la inversa de una matriz

No todas las matrices cuadradas tienen inversa

¿Qué condiciones debe cumplir una matriz cuadrada A de dimensión n para ser inversible?

Si la matriz B es la inversa de la matriz A ($B = A^{-1}$) se verifica $AB = I_n$. La ecuación $AB = I_n$ se puede expresar como:

$$A(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{1}$$

donde $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ y $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ representan las columnas de B e I_n respectivamente:

$$\mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{el 1 está en la posición } i$$

De (1) se deduce que si A tiene inversa se debe poder resolver los siguientes n sistemas de ecuaciones (cada uno de ellos con n ecuaciones y n incógnitas)

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

En particular si A es inversible la k-*ésima* columna de A^{-1} se obtendrá resolviendo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Proposición 1.14

Una matriz cuadrada, A, de dimensión n es inversible si y solamente si el rango de A es n.

Demostración. Si el rango de A es n, los n sistemas anteriores tienen solución única (las n columnas de A^{-1}) y por lo tanto A tiene inversa. Si A tiene inversa ésta tiene que ser única como se ha demostrado anteriormente y por lo tanto los n sistemas anteriores deben ser compatibles determinados y para ello el rango de A debe ser igual a n.
$\square$

Se ha obtenido, además, un método para calcular A^{-1}:

la resolución de los n sistemas que aparecen en (2). Se pueden resolver todos a la vez convirtiendo, mediante operaciones elementales en sus filas, la matriz ampliada $A_{(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)}$ en una matriz escalonada reducida, $I_{n(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n)}$.

$$A_{(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} = (A\,|\,I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$I_{n(\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n)} = (I_n\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Por lo tanto cada una de las columnas de B coincide con la solución de uno de los sistemas de (2) y en consecuencia $B = A^{-1}$.

Definición 1.30

*Una matriz cuadrada de dimensión n se dice que es **no singular** si es inversible (si tiene rango n). Por el contrario se dirá que es **singular** si no es inversible (si el rango es menor que n).*

1.6 Métodos numéricos para resolver sist. lineales

- En una gran cantidad de problemas prácticos en ingeniería se necesita resolver sistemas de ecuaciones lineales de gran tamaño (determinación de tensiones en una red eléctrica, cálculo de estructuras reticuladas definidas por vigas, modelos económicos input-output, etc.)
- Además la practica totalidad de los problemas que surgen en las ciencias aplicadas se resuelven mediante algoritmos que incluyen, en alguna de sus etapas, la resolución de un sistema lineal de ecuaciones, generalmente de gran tamaño.
- Es por tanto fundamental diseñar métodos que resuelvan los sistemas de ecuaciones lineales **compatibles determinados** lo más rápidamente posible.

Clasificación de los métodos numéricos para resolver S.L.

1. Métodos directos. Se obtiene la solución exacta (si se desprecian los **errores de redondeo**) mediante un algoritmo finito. En los métodos directos debe examinarse con detalle el **número de operaciones** aritméticas elementales que se realizan tanto por el tiempo de cálculo que conllevan como por la posible acumulación de errores de redondeo.
   El método de Gauss es un ejemplo de método directo. Otros métodos directos son, por ejemplo, el método LU y el método de Cholesky.
2. Métodos iterativos. Se obtiene la solución del sistema con una cierta precisión mediante algoritmos convergentes pero infinitos. Algunos de los métodos iterativos más sencillos son:
   - Método de Jacobi.
   - Método de Gauss-Seidel.
   - Método de relajación.
   - **Métodos de tipo gradiente.**

Método de Gauss sin pivote

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales se ha explicado al comienzo del tema. Ahora se trata de describir dicho método paso a paso **descomponiéndolo en operaciones elementales** de forma que la descripción se pueda escribir un lenguaje de programación (C, Fortran,Python, Matlab,..) y permitir que un ordenador resuelva el correspondiente sistema lineal. Esta descripción del método mediante un número finito de operaciones aritmético-lógicas elementales se denomina **algoritmo** del método. El algoritmo del método de Gauss es el siguiente:

ALGORITMO DEL MÉTODO DE GAUSS (sin pivote)

Comienzo del algoritmo

Paso 1: (Triangularización)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

> **Paso 1.1**: (Intercambio de filas si es necesario)
>
> si $a_{kk} = 0$, intercambiar la fila k por la fila i (con $i > k$, incluyendo **b**) para poner en la posición (k, k) un elemento no nulo. Si ello no es posible, abandonar pues el sistema no es compatible determinado.
>
> **Paso 1.2**: ("Pivoteo" hacia abajo)
>
> Para $i = k+1, \ldots, n$
>
> > $m_{ik} \leftarrow -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
> >
> > $a_{ik} \leftarrow 0$
> >
> > Para $j = (k+1), \ldots, n$
> >
> > > $a_{ij} \leftarrow a_{ij} + m_{ik} a_{kj}$
> >
> > Fin bucle en j
> >
> > $b_i \leftarrow b_i + m_{ik} b_k$
>
> Fin bucle en i

Fin bucle en k

Paso 2: (Remonte)

$b_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$

Para $i = (n-1), \ldots, 1$

  $sum \leftarrow 0$

  Para $k = (i+1), \ldots, n$

    $sum \leftarrow sum + a_{ik} b_k$

  Fin bucle en k

  $b_i \leftarrow \frac{(b_i - sum)}{a_{ii}}$

Fin bucle en i

Fin del algoritmo

Método de Gauss con pivote parcial

Cuando en el etapa k del paso 1 del algoritmo de Gauss el número a_{kk} es **muy pequeño en relación a algún otro elemento de la columna** k se produce una ampliación de los errores de redondeo que pueden llegar a desvirtuar por completo la solución:

$$a_{jk} >> a_{kk}, \; j > k \Rightarrow m_{jk} = a_{jk}/a_{kk} >> 1$$

y como los errores de redondeo introducidos en el cálculo de cada uno de los términos a_{kl} se multiplicarán por m_{jk} cuando se calculan los a_{jl}, el error inicial puede incrementarse fuertemente.

Así mismo en la etapa de remonte

$$x_k = \frac{b_k - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}},$$

lo cual implica que con un valor pequeño de a_{kk} cualquier error del numerador puede aumentar extraordinariamente por la división entre a_{kk}. En el siguiente ejemplo se ilustra este problema.

Ejemplo 1.8

El sistema lineal

$$\begin{array}{rrcl} E_1: & 0{,}003000x_1 + 59{,}14x_2 & = & 59{,}17 \\ E_2: & 5{,}291x_1 - 6{,}130x_2 & = & 46{,}78 \end{array}$$

tiene solución exacta $x_1 = 10{,}00$ y $x_2 = 1{,}000$. Supóngase que se realiza la eliminación gaussiana del sistema anterior con una precisión de cuatro dígitos. El primer elemento que se toma como pivote es un número pequeño: $a_{11} = 0{,}003000$ y su multiplicador asociado

$$m_{21} = \frac{5{,}291}{0{,}003000} = 1763{,}6\overline{6}$$

se redondea al número 1764. Al realizar $E_2 - m_{21}E_1$ con el redondeo adecuado se obtiene

$$\begin{array}{rcr} 0{,}003000x_1 + 59{,}14x_2 & \approx & 59{,}17 \\ -104300x_2 & \approx & 104400 \end{array}$$

Ejemplo 1.8 (Continuación)

en vez de los valores precisos

$$\begin{aligned} 0{,}003000x_1 + 59{,}14x_2 &= 59{,}17 \\ -104309{,}37\overline{6}x_2 &= -104309{,}37\overline{6} \end{aligned}$$

la disparidad de las magnitudes m_{21}, a_{13} y a_{23} ha ocasionado un error de redondeo importante en los coeficientes de la segunda ecuación, pero aun no se ha propagado. El proceso de remonte produce

$$x_2 \approx 1{,}001$$

que es una aproximación aceptable para $x_2 = 1{,}000$. Pero debido al pivote pequeño $a_{11} = 0{,}003000$

$$x_1 \approx \frac{59{,}17 - (59{,}14)(1{,}001)}{0{,}003000} = -10{,}00$$

que es una aproximación inaceptable para el valor real $x_1 = 10{,}00$.

Para evitar el problema anterior se busca entre los elementos de la columna k aquel que tenga **mayor valor absoluto y se coloca en la posición (**k, k) mediante el oportuno cambio de filas. Este nuevo algoritmo se denomina *algoritmo de Gauss con pivote parcial* y se diferencia del anterior únicamente en el paso 1.1:

ALGORITMO DEL MÉT. DE GAUSS (pivote parcial)

Comienzo del algoritmo
Paso 1: (Triangularización)
Para $k = 1, \ldots, n-1$

 Paso 1.1: (Búsqueda del pivote)
 $pvt = |a_{kk}|$, $fpvt = k$
 Para $j = k+1, \ldots, n$
  Si $\left|a_{jk}\right| > pvt$ entonces
   $pvt = \left|a_{jk}\right|$, $fpvt = j$
  Fin condición
 Fin bucle en j
 Si $pvt = 0$ parar porque el sistema no es compatible determinado
 Intercambiar la fila k con la fila $fpvt$

Paso 1.2: (“Pivoteo” hacia abajo)

Para $i = k + 1, \ldots, n$

$m_{ik} \leftarrow -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

Para $j = (k + 1), \ldots, n$

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + m_{ik} a_{kj}$

Fin bucle en j

$b_i \leftarrow b_i + m_{ik} b_k$

$a_{ik} \leftarrow 0$

Fin bucle en i

Fin bucle en k

Paso 2: (Remonte)

$b_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$

Para $i = (n - 1), \ldots, 1$

$sum \leftarrow 0$

Para $k = (i + 1), \ldots, n$

$sum \leftarrow sum + a_{ik} b_k$

Fin bucle en k

$b_i \leftarrow \frac{(b_i - sum)}{a_{ii}}$

Fin bucle en i

Fin del algoritmo

Número de operaciones del método de Gauss

Paso 1.2 (en el paso 1.1 no se realizan operaciones en coma flotante)
Para cada etapa k se realizan:

1. $n - k$ divisiones en la matriz del sistema.
2. $(n - k)(n - k)$ sumas en la matriz del sistema.
3. $(n - k)(n - k)$ productos en la matriz del sistema.
4. $n - k$ sumas en el vector de términos independientes.
5. $n - k$ productos en el vector de términos independientes.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que se realizan $n-1$ etapas, el número total de operaciones realizadas en el paso 1.2 será:

$$tot_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 3(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 = 3\sum_{k=1}^{n-1} k + 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$$

$$3\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{3}n$$

Paso 2

En todo el proceso de remonte se realizan n divisiones. Además para cada etapa k del remonte se realizan $n-k$ sumas y $n-k$ multiplicaciones. Como se realizan $n-1$ etapas se tiene que el número total de operaciones realizadas en el paso 2 será:

$$tot_2 = 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) + n = n^2 - n + n = n^2$$

Sumando el número de operaciones realizadas en ambos pasos se obtiene el número total de operaciones del método de Gauss:

$$tot = tot_1 + tot_2 = \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{7}{6}n + n^2 = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n \approx \frac{2}{3}n^3$$

Si se compara el número de operaciones para valores concretos de la dimensión, n, del sistema según se utilice el método de Cramer o el método de Gauss, se observa el ahorro que representa la utilización de este último en lugar del primero.

n	operaciones (Gauss) $(2/3)n^3 + (3/2)n^2 - (7/6)n$	operaciones (Cramer) $(n+1)!n$
10	805	399168000
100	681550	$\sim 10^{162}$
1000	668165500	$\sim 10^{2573}$

El método LU

Si **almacenamos las operaciones elementales** que se realizan en el algoritmo del método de Gauss en una matriz obtenemos una variante del método de Gauss con **"memoria"**, en el sentido de que si tenemos que resolver otro sistema con la misma matriz (con término independiente distinto) no es necesario volver a realizar el proceso de triangularización de la matriz.

El método LU, como veremos, consiste en dado un sistema lineal, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, factorizar la matriz, A, del sistema en la forma $A = LU$ en donde L es una matriz **triangular inferior** con diagonal de "unos" y U es una matriz **triangular superior**, para después resolver los dos sistemas triangulares $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, obteniendo la solución $\mathbf{x}$ del sistema inicial.

En el caso de que hubiera que resolver otro sistema con **la misma matriz de coeficientes**, la factorización LU ya estaría realizada y únicamente habría que resolver los dos sistemas triangulares (uno por descenso y otro por remonte) con un **b** distinto.

Factorización LU de una matriz cuadrada

Teorema 1.5

Si A es una matriz cuadrada no singular, existe al menos una matriz F tal que FA puede expresarse como el producto de dos matrices LU donde L es una matriz triangular inferior con sus elementos diagonales iguales a 1 y U es una matriz triangular superior.

El cálculo de las tres matrices F, L y U que intervienen en el teorema anterior puede realizarse mediante el método de Gauss. En efecto, si la matriz A es la matriz de coeficientes de un sistema compatible determinado, la matriz U es la matriz triangular superior a la que conduce el método de Gauss. En lo que respecta a la matriz F puede construirse como el producto:

$$F = F^{n-1} F^{n-2} \dots F^2 F^1$$

donde cada matriz $F^k = I_{i \leftrightarrow j}$ es la matriz elemental asociada al cambio de filas que se introduce en el paso 1.1 de la etapa $k - \textit{ésima}$ del método de Gauss. Más concretamente, si en la etapa $k - \textit{ésima}$ del primer paso del método se intercambian la fila $j - \textit{ésima}$ por la fila $i - \textit{ésima}$ (con $i > j$) la matriz F^k será:

$$F^k = I_{i\leftrightarrow j} = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{Fila } j \\ \\ \\ \leftarrow \text{Fila } i \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
\text{col. } j & \text{col. } i
\end{array}
&
\end{array}$$

Como se puede apreciar fácilmente, la matriz F^k se obtiene intercambiando las filas i y j de la matriz unidad. Obviamente, si en ninguna etapa del método se realizan cambios de filas, la matriz F será la matriz unidad. Finalmente la matriz L puede calcularse a partir de la matriz triangular inferior

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m_{k1} & -m_{k2} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & -m_{nk} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

en donde los números m_{ij} (con $i > j$) son los que con la misma notación se utilizaron en el paso 1.2 de la etapa $k - \acute{e}sima$ del método de Gauss. Para obtener L a partir de R basta con realizar en la columna $k - \textit{ésima}$ de R los cambios de filas que se realizan en el método de Gauss en las etapas $(k+1), \ldots, (n-1)$.

Ejemplo 1.9

Factorizar en forma LU, utilizando pivote parcial, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

1ª etapa $(k = 1)$

Paso 1.1: intercambio de la 1ª fila por la 3ª fila, $F^1 = I_{1\leftrightarrow 3}$

$$F^1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1.2: $m_{21} = -\frac{1}{4}$, $m_{31} = 0$, $m_{41} = 0$

$$P^1 F^1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2ª etapa ($k = 2$)

Paso 1.1: intercambio de la 2ª fila por la 3ª fila $F^2 = I_{2\leftrightarrow 3}$

$$F^2 \left(P^1 F^1 A \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1.2: $m_{32} = 0$, $m_{42} = \frac{1}{2}$

$$P^2 F^2 \left(P^1 F^1 A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3ª etapa ($k = 3$)

Paso 1.1: no se intercambian filas $F^3 = I$

$$F^3 \left(P^2 F^2 \left(P^1 F^1 A \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso 1.2: $m_{43} = -\frac{2}{5}$

$$P^3F^3\left(P^2F^2\left(P^1F^1A\right)\right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/5 \end{pmatrix}.$$

Observación 1.17

Suponiendo que $F^k = I_{i\leftrightarrow j}$, siempre se verifica

$$F^k P^l = P^l_{i\leftrightarrow j} F^k \quad \text{para } k > l,$$

en donde $P^l_{i\leftrightarrow j}$ es igual a P^l con los elementos i, j de la columna l intercambiados

Si se tiene en cuenta la observación anterior, la última igualdad se puede expresar como

$$P^3 F^3 \left(P^2 F^2 \left(P^1 F^1 A \right) \right) =$$

$$P^3 P^2 F^3 P^1_{2\leftrightarrow 3} F^2 F^1 A = P^3 P^2 P^1_{2\leftrightarrow 3} F^3 F^2 F^1 A =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/5 \end{pmatrix}$$

y, despejando $F^3F^2F^1A$,

$$F^3F^2F^1A = \left(P^3P^2P^1_{2\leftrightarrow 3}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/5 \end{pmatrix}.$$

Llegados a este punto ya se han obtenido las tres matrices de la factorización LU. En efecto la matriz triangular superior U será:

$$U = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/5 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambios de filas F será:

$$F = F^3F^2F^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz L será:

$$L = \left(P^3 P^2 P^1_{2\leftrightarrow 3}\right)^{-1} = \left(P^1_{2\leftrightarrow 3}\right)^{-1} \left(P^2\right)^{-1} \left(P^3\right)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}$$

En donde se ha tenido en cuenta que

1

$$\left(P^{i}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & m_{i+1,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_{n,i} & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -m_{i+1,i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -m_{n,i} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

y

2

$$\left(P^1\right)^{-1}\left(P^2\right)^{-1}\cdots\left(P^k\right)^{-1}\cdots\left(P^{n-1}\right)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -m_{k1} & -m_{k2} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & -m_{nk} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular L rápidamente se utiliza la matriz R descrita anteriormente. En este ejemplo:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}$$

y como en el paso 1.1 de la segunda etapa se ha intercambiado la fila 2ª por la 3ª, someteremos a la primera columna de R a dicho cambio, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Los cambios de filas de la tercera etapa afectarían a los elementos de las columnas 1ª y 2ª, pero como en dicha etapa no se intercambiaron filas, la matriz no cambia en este caso, por lo que finalmente:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

siendo fácil comprobar que $FA = LU$:

$$FA = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/5 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la factorización LU depende de la matriz F de cambios de fila que se utilice en el proceso de triangularización.
Supóngase un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A no singular, y sea F una matriz tal que $FA = LU$. El método LU para resolver sistemas lineales consiste en:

1. Transformar el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en el sistema $(FA)\mathbf{x} = F\mathbf{b}$.
2. Factorizar la matriz (FA) en la forma LU, transformando el sistema en:
$$LU\mathbf{x} = F\mathbf{b}$$
3. Resolver por el método de descenso el sistema triangular inferior
$$L\mathbf{y} = F\mathbf{b}$$
4. Resolver por el método de remonte el sistema triangular superior
$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

De las cuatro etapas anteriores, la primera no exige realizar operaciones aritméticas, la segunda necesita las mismas operaciones que el método de Gauss ($O(2n^3/3)$, la única diferencia radica en que en la factorización LU hay que almacenar los coeficientes m_{ij} en la matriz L) y las dos últimas exigen, cada una de ellas, n^2 operaciones. Por lo tanto, al igual que en el método de Gauss, el número total de operaciones del método LU es del orden $O(2n^3/3)$.

La ventaja del método LU sobre el método de Gauss estriba en la resolución de sistemas de ecuaciones distintos que compartan la misma matriz del sistema. Por ejemplo, si se tienen ns sistemas de ecuaciones

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}^1,\, A\mathbf{x} = \mathbf{b}^2, \ldots,\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}^{ns}$$

una vez resuelto por el método LU el primero de ellos y, por lo tanto, conocida la factorización LU de la matriz A, cada uno de los restantes $ns - 1$ sistemas se puede resolver, tras los correspondientes cambios de filas en los vectores $\mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^{ns}$, mediante las etapas 3 y 4 antes descritas; necesitando, cada uno de ellos, únicamente $2n^2$ operaciones para su resolución.

ALGORITMO DEL MÉTODO LU (con pivote parcial)

Comienzo del algoritmo

Paso 1: (Factorización LU)

Para $k = 1, \ldots, n-1$

    Paso 1.1: (*Búsqueda del pivote*)

    $pvt = |a_{kk}|$, $fpvt = k$

    Para $j = k+1, \ldots, n$

        Si $|a_{jk}| > pvt$ entonces

            $pvt = |a_{jk}|$, $fpvt = j$

        Fin condición

    Fin bucle en j

    Si $pvt = 0$ parar porque la matriz A es singular

    Si $k \neq fpvt$ entonces

        Intercambiar la fila k con la fila $fpvt$

    Fin condición

    $ifil(k) = fpvt$

Paso 1.2: (*"Pivoteo" hacia abajo*)

Para $i = k + 1, \ldots, n$

  $a_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ ($a_{ik} = -m_{ik}$)

  Para $j = (k + 1), \ldots, n$

    $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$

  Fin bucle en j

Fin bucle en i

Fin bucle en k

Paso 2: (Resolución de los *ns* sistemas)

Para $j = 1, \ldots, ns$

 Paso 2.1: (*cambios en las filas del segundo término*)

 Para $k = 1, \ldots, n - 1$

  Si ($ifil(k) \neq k$) entonces

   $aux \leftarrow b_{k,j}$

   $b_{k,j} \leftarrow b_{ifil(k),j}$

   $b_{ifil(k),j} \leftarrow aux$

  Fin condición

 Fin bucle en k

 Paso 2.2: (*Solución del sistema triangular inferior por descenso*)

 Para $i = 2, \ldots, n$

  $sum \leftarrow 0$

  Para $k = 1, \ldots, i - 1$

   $sum \leftarrow sum + a_{ik} b_{kj}$

  Fin bucle en k

  $b_{ij} \leftarrow b_{ij} - sum$

 Fin bucle en i

Paso 2.3: (*Solución del sistema triangular superior por remonte*)

$b_{nj} \leftarrow \frac{b_{nj}}{a_{nn}}$

Para $i = (n-1), \ldots, 1$

  $sum \leftarrow 0$

  Para $k = (i+1), \ldots, n$

    $sum \leftarrow sum + a_{ik} b_{kj}$

  Fin bucle en k

  $b_{ij} \leftarrow \frac{(b_{ij} - sum)}{a_{ii}}$

Fin bucle en i

Fin bucle en j

Fin del algoritmo

Observaciones:

1. En el algoritmo anterior se ha aprovechado el espacio de memoria destinado a almacenar la matriz A para almacenar las matrices L y U. En la parte triangular superior de A, incluyendo la diagonal, quedan almacenados los elementos de la parte triangular superior, incluyendo la diagonal, de la matriz U (el resto de los elementos de U son nulos) y en la parte triangular inferior de A, sin incluir la diagonal, quedan almacenados los elementos de la parte triangular inferior, sin incluir la diagonal, de L (el resto de los elementos de L bien son nulos, bien están en la diagonal, en cuyo caso se sabe de antemano que valen 1).
2. Así mismo, se ha aprovechado el espacio en el que se almacenaban los ns segundos miembros (la matriz B) para guardar las ns soluciones de los ns sistemas.

Ejercicios

1. Resuelve el sistema de ecuaciones
   $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$
   $2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6$
   Solución:
   $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$
2. Un departamento de pesca y caza de un determinado país proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de una unidad del alimento 1, una unidad del alimento 2 y dos unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de tres unidades del alimento 1, cuatro del 2 y cinco del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es dos unidades de alimento 1, una unidad del alimento 2 y cinco unidades del 3.

Cada semana se proporcionan al lago 25000 unidades del alimento 1, 20000 unidades del alimento 2 y 55000 del 3. Si se supone que los peces se comen todo el alimento, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución:

$x_1 = 40000 - 5x_3$; $x_2 = x_3 - 5000$ y $5000 \leq x_3 \leq 8000$. La condición sobre x_3 se obtiene imponiendo que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$ ya que el número de peces tiene que ser siempre positivo. Obsérvese que el número de soluciones es finito (los 3001 enteros pertenecientes al intervalo $[5000, 8000]$) debido a que los peces no se pueden dividir.

3. Supóngase que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20 unidades de producción respectivamente. Además se sabe que $a_{11} = 0{,}2$, $a_{12} = 0{,}5$, $a_{13} = 0{,}15$, $a_{21} = 0{,}4$, $a_{22} = 0{,}1$, $a_{23} = 0{,}3$, $a_{31} = 0{,}25$, $a_{32} = 0{,}5$ y $a_{33} = 0{,}15$ en donde a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j ($a_{ij}x_j$ representa las unidades de i necesarias para producir x_j unidades de la industria j). Por último se supondrá que la oferta es igual a la demanda.
Se pide plantear el sistema de ecuaciones lineales que determina la producción de cada industria. (La producción de cada industria, x_i, menos lo que se consume de dicha industria en las tres industrias del sistema económico, $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$,tiene que ser igual a la demanda externa de la industria i).
Solución:

$$\left.\begin{array}{r}0{,}8x_1 - 0{,}5x_2 - 0{,}15x_3 = 10\\ -0{,}4x_1 + 0{,}9x_2 - 0{,}3x_3 = 25\\ -0{,}25x_1 - 0{,}5x_2 + 0{,}85x_3 = 20\end{array}\right\}$$

4. Dadas las matrices

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, para cada una de ellas, 1) si no es una matriz escalonada transformarla, mediante operaciones elementales en sus filas, en una que sí lo sea, 2) si la matriz es escalonada transformarla, mediante operaciones elementales en sus filas, en una matriz escalonada reducida.

Solución:

(a) No es una matriz escalonada, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

(b) No es una matriz escalonada, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(c) La matriz sí es escalonada, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) La matriz sí es escalonada, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Resolver los siguientes sistemas lineales de ecuaciones

(a) $\left\{ \begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned} \right.$ (b) $\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 7x_4 - x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 1 \end{aligned} \right.$

(c) $\left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned} \right.$

Solución:

1. $\{x_2 = -2, x_1 = 7, x_3 = 2\}$
2. $\{x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{18}{5}x_4 - \frac{7}{10}x_5, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{17}{5}x_4 + \frac{3}{10}x_5, x_3 = \frac{1}{2} + 4x_4 - \frac{1}{2}x_5, x_4 = x_4, x_5 = x_5\}$
3. $\{x_1 = 2 - \frac{5}{77}x_5, x_2 = 1 - \frac{6}{77}x_5, x_3 = -\frac{25}{154}x_5, x_4 = 1 - \frac{61}{154}x_5, x_5 = x_5\}$

6. Estudiar la compatibilidad o incompatibilidad de los siguientes sistemas. Si el sistema es compatible indicar si es determinado o indeterminado.

$$\text{(a)}\left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{(b)}\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\text{(c)}\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right. \qquad \text{(d)}\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\text{(e)}\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}\right. \qquad \text{(f)}\left\{\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Solución:

1. Compatible determinado.
2. Incompatible.
3. Compatible indeterminado (infinitas soluciones).
4. Compatible determinado.
5. Compatible determinado.
6. Compatible indeterminado (infinitas soluciones).

7. Hallar el rango de la siguiente matriz de números complejos
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix},$$
Solución: Una matriz escalonada equivalente a A es:
$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 0 & 2-2i & 4-4i & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
y por lo tanto rg(A)=2.

8. Supóngase que A, B, C, D y E son cinco matrices con las siguientes dimensiones: $A_{4\times 5}$, $B_{4\times 5}$, $C_{5\times 2}$, $D_{4\times 2}$, $E_{5\times 4}$. Se pide determinar cuáles de las siguientes expresiones matriciales están definidas. Para aquellas que estén definidas dar la dimensión de la matriz resultante

(a) BA	(b) $AC+D$	(c) $AE+B$	(d) $AB+B$
(e) $E(A+B)$	(f) $E(AC)$	(g) E^tA	(h) $(A^t+E)D$

Solución:

1. Indefinida
2. Definida, 4×2
3. Indefinida
4. Indefinida
5. Definida, 5×5
6. Definida, 5×2
7. Indefinida
8. Definida, 5×2

9. Considérense las matrices

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	

Se pide calcular las siguientes expresiones:

(a) $D+E$	(b) $D-E$	(c) $5A$	(d) $-7C$
(e) $2B-C$	(f) $4E-2D$	(g) $-3(D+2E)$	(h) $A-A$
(i) $\mathrm{tr}(D)$	(j) $\mathrm{tr}(D-3E)$	(k) $4\mathrm{tr}(7B)$	(l) $\mathrm{tr}(A)$

Solución:

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	(c) $\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} -7 & -28 & -14 \\ -21 & -7 & -35 \end{pmatrix}$	(e) Indefinido	(f) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
(g) $\begin{pmatrix} -39 & -21 & -24 \\ 9 & -6 & -15 \\ -33 & -12 & -30 \end{pmatrix}$	(h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(i) 5
(j) -25	(k) 168	(l) Indefinido

10. Considérense las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Se pide calcular las siguientes expresiones:

(a) AB y BA	(b) AU y VA	(c) DC	(d) UV y VU
(e) $V(BU)$	(f) BU	(g) CA	(h) CB
(i) $C(BU)$	(j) $(AB)U$ y $A(BU)$	(k) $(BA)U$ y $B(AU)$	

Solución:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}$	(b) $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 8 & 22 \end{pmatrix}$	(c) $\begin{pmatrix} 50 & 11 \\ 16 & 10 \\ 3 & -2 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ y 14	(e) 66	(f) $\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$
(g) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 12 \\ 15 & 20 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$	(h) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 8 \\ 7 & 12 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$	(i) $\begin{pmatrix} 27 \\ 28 \\ 43 \\ 47 \end{pmatrix}$
(j) $\begin{pmatrix} 53 \\ 59 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 53 \\ 59 \end{pmatrix}$	(k) $\begin{pmatrix} 37 \\ 63 \end{pmatrix}$	

11. Sea $M = AB$ el producto de las matrices A y B. Compruébese que si A tiene una fila nula, entonces también M tiene una fila nula y que si B tiene una columna nula, entonces M también tiene una columna nula.

12. Dadas las siguientes matrices,

$F = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$

se pide determinar para cada una de ellas (a) sí es inversible o no, (b) en el caso de que sea inversible determinar su inversa.

Solución:

La matriz F es singular	La matriz B es singular
$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$J^{-1} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & -1/4 \\ -1/8 & -3/8 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$
$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
La matriz G es singular	$H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
La matriz D es singular	

13. Discutir (en función de α) y resolver cuando sea compatible el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{array}\right\}$$

Solución:

$\alpha = -2 \rightarrow$ sistema incompatible.

$\alpha = 1 \rightarrow$ sistema admite infinitas soluciones (comp. indet.):
$x = 1 - y - z$, y y z variables libres.
$\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$, el sistema tiene solución única
$x = -\frac{1}{\alpha+2}\left(\alpha + 1\right), z = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+2}, y = \frac{1}{\alpha+2}$.