Determinantes

Tema 2

Ultano Kindelán
Marco Antonio Fontelos

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra Lineal

ÍNDICE

2.1 Introducción

El interés de este tema estriba en el hecho de que tradicionalmente muchos resultados matemáticos se expresan en términos de determinantes y es importante entender la notación, el significado, y las reglas de cálculo asociadas a estos objetos matemáticos. Ejemplos de contextos en los que aparecen son: el jacobiano de un cambio de variables (se verá en el tema de integración en varias variables), el cálculo del área de un paralelogramo, la definición de producto vectorial (tema de espacio euclídeo), la definición de operador rotacional (tema de cálculo vectorial), etc.. A menudo, para demostrar resultados teóricos, las soluciones de sistemas lineales se escriben en términos de determinantes.

2.2 Desarrollo de un determinante a partir de los elementos de una línea

Definición 2.1

Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2\\ j=1,2}}$. *El determinante de* A *se define como*

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definición 2.2

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *una matriz cuadrada de dimensión n y sea* $M_{r,s}$ *la matriz que se obtiene al eliminar la fila r y la columna s de la matriz* A *(*$M_{r,s}$ *es una submatriz de* A*). El real* $\det(M_{r,s})$ *recibe el nombre de menor del elemento* a_{rs} *de* A*.*

Definición 2.3

El escalar $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ *recibe el nombre de adjunto del elemento* a_{ij} *de* A*.*

Definición 2.4

Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. El determinante de A se define como:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$$

en donde A_{i1} es el adjunto del elemento a_{i1}.

Observación 2.1

Los determinantes únicamente se definen sobre matrices cuadradas.

Observación 2.2

Considérese la naturaleza recursiva de la definición: si A es 3×3 entonces el determinante de A es $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ y los adjuntos A_{11}, A_{21} y A_{31} se pueden evaluar a partir de la definición 2.1. De forma similar la expresión de un determinante de una matriz de dimensión 4 es igual a la suma de cuatro determinantes de orden 3 multiplicados cada uno de ellos por un escalar.

Observación 2.3

El desarrollo de un determinante de orden n tiene $n!$ sumandos, cada uno de ellos siendo un producto de n factores. Cada uno de estos $n!$ sumandos es de la forma $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$ en donde $\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(n)$ representa una de las $n!$ permutaciones de $1,2,\dots,n$ y $\varepsilon(\sigma)$ el signo de la correspondiente permutación (positivo si el número de intercambios de dos elementos necesarios para ordenar la permutación es par y negativo si es impar). Siguiendo esta notación el determinante de una matriz A, cuadrada de dimensión n, se puede expresar como

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

En donde Σ_n representa el conjunto de las $n!$ permutaciones de $1,2,\dots,n$.

Observación 2.4

En el sumando $a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ aparece un representante y sólo uno de todas las filas y columnas de la matriz.

Ejemplo 2.1

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$\det(A) = 1A_{11} + 2A_{21} + 0A_{31} + 2A_{41} = -15 - 36 + 0 - 12 = \boxed{-63}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -15$$

Ejemplo 2.1 (cont.)

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right) = -18$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) = -6$$

Observación 2.5

El determinante se puede calcular a partir de los elementos de cualquier línea (fila o columna)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 2.2

Calcular el determinante de la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.2 (cont.)

Solución:

$$\det(T) = 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12.$$

Obsérvese que para calcular el determinante de la matriz anterior ha bastado con multiplicar los elementos de su diagonal. Esto es siempre así para cualquier matriz triangular inferior como enuncia el siguiente teorema.

Teorema 2.1

Sea $T = (t_{ij})$ una matriz triangular inferior de dimensión n, entonces:

$$\det(T) = t_{11} t_{22} \ldots t_{nn} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$$

Demostración. (por inducción)

$k = 2$, cierto ya que $\begin{vmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22}$,

$k = n - 1$ se supone cierto (*hipótesis de inducción*),

$k = n$,

$$\det(T) = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = t_{11} \begin{vmatrix} t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} t_{22} \dots t_{nn} . \square$$

Observación 2.6

Si T es una matriz triangular superior sucede lo mismo.

2.3 Cálculo de un determinante mediante operaciones elementales en las filas

Teorema 2.2

Si una matriz A tiene una fila o una columna de ceros entonces $\det(A) = 0$.

Demostración. Desarroll. del det. a partir de la fila o columna nula.

Teorema 2.3

Sea A una matriz cuadrada de dimensión n,

1. *si A' es la matriz que resulta de multiplicar una fila de A por el escalar λ entonces* $\det(A') = \lambda \det(A)$.
2. *si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos filas de A entonces* $\det(A') = -\det(A)$.
3. *si A' es la matriz que se obtiene al añadir un múltiplo de una fila de A a otra fila de A entonces* $\det(A') = \det(A)$.

Observación 2.7

El teorema anterior también es válido si las operaciones se realizan sobre las columnas.

El teorema 2.3 permite desarrollar un método alternativo para calcular el determinante de una matriz:

- Mediante las transformaciones elementales descritas en el teorema 2.3 se transforma la matriz dada, A, en una matriz escalonada E.
- Una matriz escalonada cuadrada es siempre triangular superior por lo que el determinante de E se calcula multiplicando los elementos de su diagonal.
- Se obtiene el determinante de A a partir del determinante de E utilizando el teorema 2.3

Ejemplo 2.3

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -28 & -8 & -12 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-7) \cdot (9) = -63.$$

Proposición 2.1

Si A es una matriz cuadrada de dimensión n entonces

$$\det(A) = \det(A^t)$$

2.4 Propiedades de los determinantes

Proposición 2.2

El rango de una matriz cuadrada de dimensión n, A, es igual a n Ssi $\det(A) \neq 0$

$$rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Corolario 2.4

Una matriz cuadrada, A, es inversible Ssi $\det(A) \neq 0$.

Corolario 2.5

Los vectores fila o columna de una matriz A son linealmente dependientes Ssi $\det(A) = 0$.

Proposición 2.3

Sea A una matriz cuadrada de dimensión n y k un escalar cualquiera.

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

por ejemplo: $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Proposición 2.4

Si A y B son dos matrices cuadradas

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Proposición 2.5

Si A es una matriz cuadrada inversible

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Observación 2.8

En general $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

2.5 Aplicaciones de los determinantes

2.5.1 Obtención de la inversa de una matriz

Dada un matriz cuadrada de dimensión n, A, conocer el valor de $\det(A)$ permite determinar no sólo la existencia de inversa de A, sino que, además, en caso de que exista A^{-1} es posible obtener su expresión en función de $\det(A)$. Para ello es necesario seguir los siguientes pasos:

- Se calculan los adjuntos de todos y cada uno de los elementos a_{ij} de A $(i, j = 1, \ldots, n)$ y se construye la matriz adjunta de A que se denota por $\mathrm{Adj}(A)$.

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \, ^{(a)}$$

- Se obtiene la inversa de A dividiendo la matriz adjunta de A por el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A)$$

[a] Cada elemento de A se sustituye por su adjunto y se traspone la matriz resultante.

Ejemplo 2.4

Hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $\mathrm{Adj}(A) =$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 64$$

Ejemplo 2.4 (cont.)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A) =$$

$$\frac{1}{64}\begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 3/32 & 1/32 & -5/32 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Cálculo del rango de una matriz

Teorema 2.6

Sea A una matriz de dimensión $m \times n$*. Se verifica que* $rg(A) = r \leq \mathrm{Min}(m, n)$ *Ssi existe al menos una submatriz* A_r *de A de dimensión* $n \times n$ *tal que* $\det(A_r) \neq 0$ *y todos los menores de orden* $r + 1$ *son nulos.*

Observación 2.9

Del teorema anterior se concluye que para determinar el rango de una matriz puede recurrirse a los menores: buscando uno que sea no nulo y tal que todos los de mayor orden sean nulos, el orden del menor no nulo es el rango de la matriz.
Sin embargo el encontrar un menor que cumpla las condiciones anteriores puede ser muy laborioso. Esta búsqueda se puede simplificar si se procede metódicamente:

Observación 2.9 (cont.)

- Se toma una submatriz de A, A_2, de orden 2 tal que el menor correspondiente sea no nulo ($\det(A_2) \neq 0$) y se orla con una fila fija i y con sucesivas columnas. Si todos los menores de orden tres que así se obtienen son nulos se puede prescindir de la fila i, pues es combinación lineal de las de A_2.
- Se repite el proceso con otras filas hasta:
  1. descubrir que todos los menores de orden 3 así obtenidos son nulos, en cuyo caso el rango de A es 2,
  2. o encontrar un menor de orden 3 no nulo (p.e. $\det(A_3) \neq 0$) en cuyo caso el rango de A será ≥ 3. A partir de aquí habrá que orlar a A_3 con una fila y con sucesivas columnas siguiendo el mismo proceso que con A_2, lo que lleva bien a que el rango es 3 (si todos los menores de orden 4 son nulos), bien a que el rango es mayor o igual que 4 (cuando se encuentre un menor de orden 4 no nulo). Siguiendo así se llega a un menor no nulo del mayor tamaño posible; este tamaño es el rango buscado.

Ejemplo 2.5

Determinar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

la fila $\begin{matrix} 3 & 4 & -2 & 1 \end{matrix}$ es c.l. de las dos primeras.

Ejemplo 2.5 (cont.)

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ la fila $\begin{matrix} 3 & 12 & 6 & 9 \end{matrix}$ es c.l. de las dos primeras. Por lo tanto todos los menores de orden 3 de la matriz A son nulos y el rango de A es 2.

Observación 2.10

En cualquier caso el método que se acaba de describir para la determinación del rango de una matriz es mucho más lento que el método, descrito en el tema anterior, de obtener una matriz escalonada mediante operaciones elementales en las filas de la matriz. Esta diferencia en la eficacia de ambos métodos va aumentando con la dimensión de la matriz A.

2.5.3 Regla de Cramer

Consideremos el sistema lineal

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

o, en forma matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \; . \tag{2}$$

La solución se puede escribir como

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}\mathbf{b} \; . \tag{3}$$

Como se tiene que

$$Adj(A)\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i2} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i3} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{in} \end{pmatrix} \tag{4}$$

obtenemos, por tanto, la fórmula (llamada regla de Cramer):

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} \tag{5}$$

es decir, x_i es el cociente entre el determinante de la matriz A con la columna $i-$ésima sustituida por $\mathbf{b}$ y el determinante de A.

Observación 2.11

La regla de Cramer es mucho menos eficiente para resolver sistemas lineales que el método de Gauss. Efectivamente:

1. Número de operaciones necesarias para calcular el determinante de una matriz de dimensión n:
   - $n! - 1$ sumas.
   - $n!(n-1)$ multiplicaciones.

   En total $n! - 1 + n!(n-1) = nn! - 1$.
2. Para resolver un sistema por el método de Cramer hay que calcular $n+1$ determinantes y realizar n divisiones. Por lo tanto el número total de operaciones es $(n+1)(nn!-1) + n = (n+1)!n - 1$.

Comparándo con las $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n^3$ que necesita el método de Gauss se observa que, por ejemplo, para $n = 10$ el método de Gauss realiza 805 operaciones y el método de Cramer 399167999. No conviene utilizar el método de Cramer para $n \geq 4$.

Ejercicios

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & x & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 0 & -2x \\ 0 & 3x & 7 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & x & x & 1 \end{pmatrix},$$

hallar el coeficiente del término x^5 que aparece en el cálculo del valor del determinante de A.
Solución: 6

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

se pide:

1. Calcular los menores $|M_{21}|$, $|M_{22}|$, $|M_{23}|$ y $|M_{24}|$.
2. Hallar los cofactores o adjuntos A_{21}, A_{22}, A_{23} y A_{24}.
3. Determinar el valor de $\det(A)$.

Solución:

1. 3, -3, 13, 9
2. -3, -3, -13, 9
3. -53

3. Hallar el valor de los siguientes determinantes desarrollando por una fila o columna:

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} \quad (3)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix} \quad (5)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & -2 \\ 7 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

1. 24
2. 80
3. 0
4. -260
5. -200

4. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3, \text{ calcular: } (1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} (3) \begin{vmatrix} a_{11} - 2a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 2a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - 2a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} - 4a_{11} & 2a_{22} - 4a_{12} & 2a_{23} - 4a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Solución:

1. -3
2. -6
3. 3
4. -6

5. Demostrar que si una matriz cuadrada, A, de dimensión n es antisimétrica, entonces

$$|A| = (-1)^n |A|$$

¿Cuál es el valor de $|A|$ si n es impar?
Solución:
Si n es impar $|A| = 0$.

6. Calcular el valor del siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Solución: $\prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j)$

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix},$$

se pide:

1. calcular AA^t.
2. hallar, utilizando el resultado del apartado anterior, el determinante de A.

Solución:

1. $AA^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4$
2. $\det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

8. Hallar el valor de los siguientes determinantes

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \dots & \beta & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \dots & \alpha & \alpha \end{vmatrix}$$

Solución:

1. $2a^3$.
2. $1 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$.
3. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(\beta - \alpha)^{n-1}[(n-1)\alpha + \beta]$ ($n =$ dimensión de la matriz).