Aplicaciones lineales

Tema 4

Ultano Kindelán
Marco Antonio Fontelos

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra Lineal

ÍNDICE

4.1 Introducción

- Cuando se define un espacio que engloba objetos matemáticos de una determinada naturaleza, es porque interesa realizar algún tipo de operación con ellos.
- En el caso de los espacios vectoriales, las operaciones habituales (rotaciones, reflexiones, etc.) son expresables como aplicaciones lineales y entran dentro del dominio de la geometría.
- En la mecánica de medios continuos o en el estudio de fenómenos de transporte se vuelven muy útiles los conceptos de aplicación lineal, matriz de rotación, matriz de dilatación, etc. cuando, por ejemplo, se discute la derivación de los tensores de esfuerzos en las relaciones constitutivas.
- Además, muchas operaciones como la derivación o la integración son, de hecho, aplicaciones lineales en espacios de funciones. Esto permite abordar cuestiones clásicas de cálculo desde una perspectiva geométrica.

4.2 Definición y propiedades

Definición 4.1

Se denomina aplicación (o función) entre A y B a toda correspondencia entre A y B que verifique que a ***todo*** *elemento de A le asocia un* ***único*** *elemento de B.*

Observación 4.1

Llamando a una cierta aplicación f, se denota por $f(x)$ al único elemento de B que le corresponde a cada $x \in A$. $f(x)$ es la **imagen** de x y x es el **antecedente** de $f(x)$.

$$\begin{array}{rl} f: & A \to B \\ & x \to y = f(x) \end{array}$$

Observación 4.2

Se dice que A es el **conjunto origen** de f y B es su **conjunto de llegada.**

Observación 4.3

Al conjunto de todas las aplicaciones que se pueden definir entre A y B se le denota por $\mathcal{F}(A,B)$.

Definición 4.2

*Dados dos $\boldsymbol{K}-$espacios vectoriales V y W se dice que una aplicación f de V en W es un **homomorfismo** o **aplicación lineal** si $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y $\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{K}$*

$$f(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v}) \text{ o, lo que es lo mismo, } \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \\ f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}) \end{array} \right.$$

Definición 4.3

Una aplicación lineal, $f : V \to W$, recibe el nombre de endomorfismo si $V = W$.

Ejemplo 4.1

Se muestran a continuación algunos ejemplos de aplicaciones lineales entre espacios vectoriales:

1. La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $f((x_1, x_2, x_3)^t) = (2x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 5x_2 + 6x_3)^t$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
2. Generalizando el ejemplo anterior, la aplicación

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} = (x_1, \ldots x_n)^t & \to & f((x_1, \ldots x_n)^t) = (\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i, \ldots \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i)^t \end{array}$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 4.1 (cont.)

2. (cont.) Si se tiene en cuenta que $\mathbf{y} = f((x_1, \dots x_n)^t)$ es un vector de m componentes, la aplicación f también se puede expresar como $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, igualdad que implica:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ y_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i \\ \vdots \\ y_m = \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

en donde $(y_1, \dots, y_m)$ son las componentes de $\mathbf{y}$ en una base de $\boldsymbol{R}^m$ y $(x_1, \dots, x_n)$ son las componentes de $\mathbf{x}$ en una base de $\boldsymbol{R}^n$.

Definición 4.4

Sean V y W dos $\boldsymbol{K}-$ espacios vectoriales de dimensión finita, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1\ldots n}$ y $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1\ldots m}$ dos bases de V y W, respectivamente, y $(x_i)_{i=1\ldots n}$ e $(y_i)_{i=1\ldots m}$ las coordenadas en dichas bases de dos vectores, $\mathbf{x} \in V$ e $\mathbf{y} \in W$. Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entonces f admite la siguiente ecuación matricial respecto a las bases anteriores:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

*Se dice que $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es la **matriz de la aplicación lineal** f respecto de las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ de V y $\{\mathbf{u}_i\}$ de W.*

Observación 4.4

Es fácil comprobar que:

$$f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{u}_i \qquad j = 1, \ldots, n\,,$$

dicho de otro modo: **Las columnas de A son las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ respecto de la base $\{\mathbf{u}_i\}$.**

Ejemplo 4.2 (Casos particulares de matrices de aplicaciones lineales.)

1. En el ejemplo 1 anterior la matriz de la aplicación lineal es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la aplicación lineal se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \text{ con} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} = (y_1, y_2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} \\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \end{array} \right.$$

Siendo las imágenes de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) &= 4\mathbf{u}_1 + 6\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2 (cont.)

2. La matriz de la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{v}=(x,y)^t & \to & T((x,y)^t)=\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}. \end{array}$$

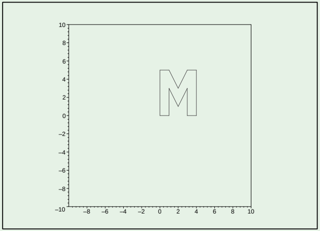
es:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Geométricamente, $T(\mathbf{v})$ es el vector resultante de rotar $\mathbf{v}$ un ángulo θ en sentido positivo. En la figura 1 se observa el resultado de aplicar la aplicación T con $\theta = \pi/6$ a los vectores de posición de los puntos del contorno de la letra M.

Ejemplo 4.2 (cont.)

2. (cont.)



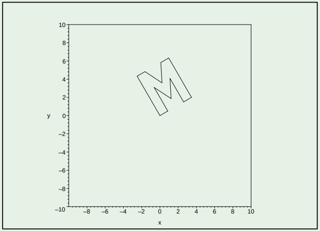


Figura 1: Ejemplo de aplicación lineal: rotación de 30º.

Ejemplo 4.2 (cont.)

3. La matriz de la aplicación lineal

$$\begin{array}{rlcl} S: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{v}=(x,y)^t & \rightarrow & S((x,y)^t)=(x,-2x+y)^t \end{array}$$

es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Geométricamente, $S(\mathbf{v})$ es el vector cuya coordenada x permanece igual a la de $\mathbf{v}$ y su coordenada y es igual a la coordenada y de $\mathbf{v}$ más la x de $\mathbf{v}$ multiplicada por -2. En la figura 2 se observa el resultado de aplicar la aplicación S a los vectores de posición de los puntos del contorno de la letra M: se produce una *cizalla* sobre el eje y de factor -2.

Ejemplo 4.2 (cont.)

3. (cont.)

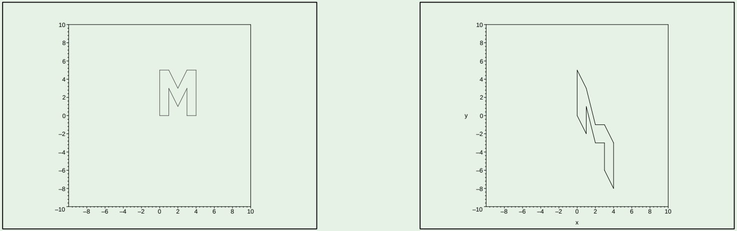


Figura 2: Ejemplo de aplicación lineal: *cizalla* sobre el eje y.

Ejemplo 4.2 (cont.)

4. Supóngase una aplicación lineal, f, definida entre $\boldsymbol{R}^n$ y $\boldsymbol{R}^m$. Dado un vector $\mathbf{b} \in \boldsymbol{R}^m$, hallar su antecedente por f (encontrar $\mathbf{x}$ t.q. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$) es equivalente a resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz asociada a f en ciertas bases de $\boldsymbol{R}^n$ y $\boldsymbol{R}^m$. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema **lineal** de ecuaciones por estar asociado a una aplicación **lineal**. Obsérvese que si $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1$ y $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2$, $f(\lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2) = \lambda f(\mathbf{x}_1) + \mu f(\mathbf{x}_2) = \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2$: *una combinación lineal de soluciones de un sistema lineal obtenidas con dos términos independientes distintos es también solución del sistema, si como término independiente aparece la misma combinación lineal de cada uno de los dos términos independientes anteriores* $\rightarrow$ **Principio de superposición.**

Proposición 4.1

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos $\boldsymbol{K}$-espacios vectoriales se verifica:

1. $f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(\mathbf{u}_i) \qquad \forall \mathbf{u}_i \in V, \forall \lambda_i \in \boldsymbol{K}, \qquad i = 1, \ldots, p.$
   En particular $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *y* $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})\ \forall \mathbf{u} \in V$.
2. Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ es un sistema dependiente de vectores de V, entonces $\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_p)\}$ es un sistema dependiente de vectores de W.
3. Si además $g : W \to U$ es otra aplicación lineal (siendo U otro $\boldsymbol{K}$-espacio vectorial), la composición $g \circ f : V \to U$ también es una aplicación lineal.

4.3 Imagen, núcleo y rango de una aplicación lineal

Proposición 4.2

Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal entre K- espacios vectoriales entonces:

1. El conjunto imagen $f(V)$ es un s.e.v. de W que se llama **imagen** de la aplicación lineal f y se denota por $\mathrm{Im}(f)$.
2. Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ es un sistema generador de V, entonces $\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_p)\}$ es un sistema generador de $f(V) = \mathrm{Im}(f)$. Se llama **rango** de f a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(\{f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_p)\})$.
3. El conjunto $f^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in V \,/\, f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$ es un s.e.v. que se llama **núcleo** de la aplicación lineal f y se denotará por $\ker(f)$.
4. Si el espacio V tiene dimensión finita, se verifica $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$.

Ejemplo 4.3

Para aclarar los conceptos introducidos en la proposición 4.2 vamos a calcular la imagen y el núcleo de algunas aplicaciones lineales:

1. Considérese la aplicación lineal $f : P_3 \to P_2$ definida por $f(p(x)) = p'(x)$ o, lo que es lo mismo, $f(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2$.
   La imagen de f es P_2 ($\mathrm{Im}(f) = P_2$) y el núcleo de f es P_0 ($\ker(f) = P_0$). Es fácil comprobar que se verifica la parte 4) de la proposición anterior:
   $\dim(V) = \dim(P_3) = 4 = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{3} + \underbrace{\dim(\ker(f))}_{1}$.

Ejemplo 4.3 (cont.)

2. Sea $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(\mathbf{x}) = f((x_1, x_2, x_3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 + x_2, x_1 - x_2 + 2x_3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = \mathbf{w}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

$f(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 1, 1)^t$, $f(\mathbf{e}_2) = (0, 1, 1, -1)^t$ y $f(\mathbf{e}_3) = (1, -1, 0, 2)^t$ constituyen un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$:
$\mathrm{Im}(f) =< (1, 0, 1, 1)^t, (0, 1, 1, -1)^t, (1, -1, 0, 2)^t > = < (1, 0, 1, 1)^t, (0, 1, 1, -1)^t > = \{\mathbf{w} \in \boldsymbol{R}^4 \ / \mathbf{w} = (\alpha, \beta, \alpha + \beta, \alpha - \beta); \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}\}$.

Ejemplo 4.3 (cont.)

2. (cont.) En cuanto al núcleo de f :

$$\ker(f) = \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

con lo que $\ker(f) = \left\{ \mathbf{v} \in \boldsymbol{R}^3 / \mathbf{v} = (-\lambda, \lambda, \lambda)^t, \lambda \in \boldsymbol{R} \right\}$ y por lo tanto

$$\dim(V) = 3 = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{2} + \underbrace{\dim(\ker(f))}_{1}.$$

Ejemplo 4.3 (cont.)

3. Sea $g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ la aplicación lineal definida por $g(\mathbf{v}) = g((x_1, x_2, x_3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}) =$ $(-4x_1 + 7x_2 + 8x_3, -40x_1 + 70x_2 + 80x_3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = \mathbf{w}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 7x_2 + 8x_3 \\ -40x_1 + 70x_2 + 80x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ -40 & 70 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i}$$

- $g(\mathbf{e}_1) = (-4, -40)^t$, $g(\mathbf{e}_2) = (7, 70)^t$ y $g(\mathbf{e}_3) = (8, 80)^t$ constituyen un sistema generador de $\mathrm{Im}(g)$:
  $\mathrm{Im}(g) =< (-4, -40)^t, (7, 70)^t, (8, 80)^t > = < (-4, -40)^t >$
  $= \{\mathbf{w} \in \boldsymbol{R}^2 \ / \mathbf{w} = (\alpha, 10\alpha); \alpha \in \boldsymbol{R}\}$.
- En cuanto al núcleo de g :

$$\ker(g) = \left\{ \begin{array}{r} -4x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \\ -40x_1 + 70x_2 + 80x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \ -4x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \right.$$

Ejemplo 4.3 (cont.)

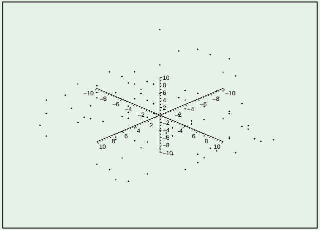
3. (cont.) $\ker(g) = \left\{ \mathbf{v} \in \boldsymbol{R}^3 / \mathbf{v} = (\frac{7}{4}\lambda + 2\mu, \lambda, \mu)^t, \lambda, \mu \in \boldsymbol{R} \right\}$

$$\dim(\boldsymbol{R}^3) = 3 = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(g))}_{1} + \underbrace{\dim(\ker(g))}_{2}$$

En la fig. 4 se representa gráficamente el resultado de aplicar la aplic. lin. g a una nube aleatoria de ptos. de $\boldsymbol{R}^3$ representada en la parte de la izq. de la fig. 3; como se aprecia en la fig., se obtiene un conjunto de ptos. situados en la recta $y = 10x$ (la escala de la x no coincide con la de la y) cuyos vectores de posición constituyen un s.e.v. de dimensión 1 de $\boldsymbol{R}^2$: la imagen de g calculada anteriormente. En la parte dcha. de la fig. 3 aparecen los ptos. cuyos vectores de posición constituyen el núcleo de g (s.e.v. de dimensión 2), ptos. que pertenecen al plano $-4x + 7y + 8z = 0$. Los dibujos de la fig. 3 representan ptos. de $\boldsymbol{R}^3 \Rightarrow$ Dibujos tridimensionales. El dibujo de la fig. 4 representa ptos. de $\boldsymbol{R}^2 \Rightarrow$ Dibujo bidimensional

Ejemplo 4.3 (cont.)

3. (cont.)



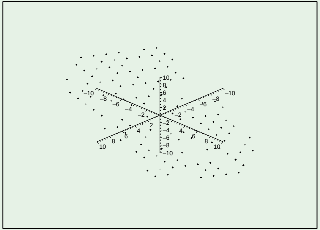


Figura 3: A la izquierda nube aleatoria de puntos. A la derecha plano formado por los puntos cuyos vectores de posición pertenecen al núcleo de g.

Ejemplo 4.3 (cont.)

3. (cont.)

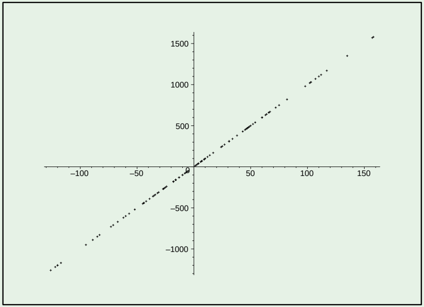


Figura 4: Recta formada por los puntos cuyos vectores de posición constituyen la imagen de g.

Observación 4.5

En el ejemplo 2, la aplicación lineal f quedaba definida de forma unívoca expresando el valor de las componentes (referidas a una cierta base de $\boldsymbol{R}^4$) de un vector cualquiera de $\mathrm{Im}(f)$ en función de las componentes de su antecedente por f (expresadas en una cierta base de $\boldsymbol{R}^3$) :

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + x_3 \\ w_2 &= x_2 - x_3 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \\ w_4 &= x_1 - x_2 + 2x_3 \end{aligned} \quad \rightarrow$$

DE ESTA FORMA SE DETERMINAN LAS **FILAS** *DE LA MATRIZ A*

Observación 4.5 (cont.)

La aplicación f también queda definida de forma unívoca si se especifican las imágenes de una base cualquiera de $\boldsymbol{R}^3$, $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)$, expresadas en una cierta base de $\boldsymbol{R}^4$. En el ejemplo anterior:

$$\left.\begin{array}{rr} f(\mathbf{e}_1) = & \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{e}_2) = & \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ f(\mathbf{e}_3) = & \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_4 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} \textit{DE ESTA FORMA SE} \\ \textit{DETERMINAN LAS } \textbf{COLUMNAS} \\ \textit{DE LA MATRIZ A} \end{array}$$

<u>Resumiendo</u>:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ f(\mathbf{e}_1)\ f(\mathbf{e}_2)\ f(\mathbf{e}_3) \end{array} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 1^a \text{ comp. de } f(\mathbf{v}) \\ \rightarrow 2^a \text{ comp. de } f(\mathbf{v}) \\ \rightarrow 3^a \text{ comp. de } f(\mathbf{v}) \\ \rightarrow 4^a \text{ comp. de } f(\mathbf{v}) \end{array}$$

Ejemplo 4.4

Hallar una base del núcleo y de la imagen de una aplicación lineal $f : \boldsymbol{R}^4 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$, conociendo las imágenes por f de una base de $\boldsymbol{R}^4$:
$f(\mathbf{e}_1) = (1, -1, 2)^t$, $f(\mathbf{e}_2) = (2, 1, 1)^t$, $f(\mathbf{e}_3) = (4, -1, 5)^t$,
$f(\mathbf{e}_4) = (-1, -5, 4)^t$.

Solución: en el enunciado se dan las columnas de la matriz A de la aplicación lineal:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

y también un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$;

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle (1, -1, 2)^t, (2, 1, 1)^t, (4, -1, 5)^t, (-1, -5, 4)^t \right\rangle$$

Ejemplo 4.4 (cont.)

Eliminando los vectores lin. dep. se obtiene una base de $\mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{Base de } \mathrm{Im}(f) = \left\{(1,-1,2)^t, (0,3,-3)^t\right\}}.$$

Las ecuaciones implícitas del núcleo son:

$$\ker(f) = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Base de } \ker(f) = \left\{(-2,-1,1,0)^t, (-3,2,0,1)^t\right\}}$$

4.4 Isomorfismos

Definición 4.5

Una aplicación $f : A \to B$ entre dos conjuntos A y B se dice que es ***inyectiva*** *si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ o, lo que es lo mismo, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in A$.*

Proposición 4.3

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre $\boldsymbol{K}-$ espacios vectoriales. Se verifica:

1. La aplicación lineal f es inyectiva Ssi $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
2. Si V tiene dimensión finita, entonces f es inyectiva Ssi $\dim(f(V)) = \dim(V)$.
3. Si $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es una base de V entonces f es inyectiva Ssi $f(B) = \{f(\mathbf{e}_1), \ldots f(\mathbf{e}_n)\}$ es una base de $f(V)$, o, lo que es lo mismo, $f(B)$ es un sistema independiente de vectores.

Definición 4.6

Se dice que una aplicación $f : A \to B$ *es **sobreyectiva** si* $f(A) = B$*, o, lo que es lo mismo, si todo elemento de B es imagen de algún elemento de A.*

Definición 4.7

Se dice que una aplicación $f : A \to B$ *es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 4.8

*Se llama **isomorfismo** a una aplicación* $f : V \to W$ *entre* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales que sea lineal y biyectiva. Si* $f : V \to W$ *es un isomorfismo, los dos espacios se dicen **isomorfos.***

Observación 4.6

Si $V = W$, f se llama **automorfismo.**

Proposición 4.4

Los isomorfismos verifican las siguientes propiedades:

1. La composición de dos isomorfismos es también un isomorfismo.
2. Una aplicación lineal $f : V \to W$ es un isomorfismo Ssi $\mathrm{Im}(f) = W$ y $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.
3. Si V tiene dimensión finita, una aplicación lineal $f : V \to W$ es un isomorfismo Ssi $\dim(V) = \dim(f(V)) = \dim(W)$.
4. Si V tiene dimensión finita, una aplicación lineal $f : V \to V$ es un automorfismo Ssi es inyectiva o Ssi es sobreyectiva.
5. Si $f : V \to W$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : W \to V$ también es un isomorfismo.
6. Entre dos $\boldsymbol{K}-$ espacios vectoriales de dimensión finita se puede establecer un isomorfismo Ssi tienen la misma dimensión.

Ejemplo 4.5 (Algunos espacios isomorfos)

- El espacio vectorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ es isomorfo a P_n

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^{n+1} & \to & P_n \\ & (a_0, \ldots, a_n) & \to & a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \end{array}$$

- El espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ es isomorfo a $M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rlcl} f: & \mathbb{R}^{4} & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4) & \to & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

- El espacio vectorial P_3 es isomorfo al espacio vectorial de las matrices $M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rlcl} f: & P_3 & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & \to & \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observación 4.7

El conjunto de todas las aplicaciones lineales que se pueden definir entre dos $\boldsymbol{K}$- espacios vectoriales V y W tiene estructura de espacio vectorial respecto a la l.c.i. suma de aplicaciones y la l.c.e. producto de escalar por aplicación:

$$(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$$

$$(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$$

Este espacio vectorial se representa por

$$\mathcal{L}(V, W)$$

Observación 4.8

Dadas dos bases, B de V y B' de W, se puede definir un isomorfismo entre $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ y $\mathcal{L}(V, W)$ de forma que a cada aplicación lineal se le asigne su matriz asociada referida a B y B'.

4.5 Cambio de base

Teorema 4.1

Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos $\mathbb{K}-$ espacios vectoriales cuya matriz asociada con respecto a las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y $\overline{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ de V y W respectivamente es $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Si $B' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ y $\overline{B}' = \{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_m\}$ son dos nuevas bases de V y W respectivamente y se denota por $A' = (a'_{ij})_{m\times n}$ la matriz asociada a f respecto a estas dos nuevas bases se verifica:

$$A' = Q^{-1}AP$$

donde:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_m\right)_{\{\mathbf{u}_i\}} \text{ es la matriz de cambio de base de } \overline{B}' \text{ a } \overline{B} \\ P &= \left(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\right)_{\{\mathbf{e}_i\}} \text{ es la matriz de cambio de base de } B' \text{ a } B \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que respecto de las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tiene por expresión matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la expresión matricial de f respecto de las bases $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, cuyas expresiones en función de las bases originales son: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}'_1 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}'_2 = 4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$?

Solución:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35/2 & -39/2 & -6 \\ 19/2 & 19/2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Corolario 4.2

Si $f : V \to V$ es un endomorfismo definido sobre un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V, A es la matriz del endomorfismo en la base B, A' es la matriz del endomorfismo en otra base B' y P es la matriz de cambio de base de B' a B, se verifica que:

$$A' = P^{-1}AP$$

Observación 4.9

Si $A' = P^{-1}AP$ se dice que las matrices A' y A son **semejantes** (matrices asociadas a un mismo endomorfismo en bases distintas son semejantes).

Ejercicios

1. Indicar si las siguientes aplicaciones son aplicaciones lineales o no
   1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 5x_1)^t$
   2. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = (x_1, x_1 + x_2 + x_3)^t$
   3. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = (1, 1)^t$
   4. $f: P_2 \to P_1$, $f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 2a_0 + a_1 + (a_2 - a_1)x$
   5. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2, x_2)^t$
   6. $f: M_{n,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,n}(\mathbb{K})$, $f(A) = A + A^t$

   Solución:
   1. Lineal
   2. Lineal
   3. No lineal
   4. Lineal
   5. No lineal
   6. Lineal

2. Un fabricante produce 3 artículos diferentes, cada uno de los cuales requiere para su elaboración de dos materias primas. Los tres productos se denotan por p_1, p_2 y p_3, y las dos materias primas por M_1 y M_2. En la tabla que se indica a continuación se representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto.

	p_1	p_2	p_3
M_1	1	2	1
M_2	3	1	2

Se pide:

   1. Determinar la ley que asocia a cada vector de producción (p_1, p_2, p_3) el vector de materias primas (M_1, M_2) que le corresponde para que dicha producción sea posible.
   2. La ley determinada en el apartado anterior, ¿es una aplicación lineal?

Solución:

1. $\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 + p_3 \\ 3p_1 + p_2 + 2p_3 \end{pmatrix}$
2. Sí es una aplicación lineal.

3. Se considera el subconjunto M de matrices cuadradas 2×2 definido de la forma siguiente:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c \in \boldsymbol{R} \right\}$$

y la aplicación $M \to M$ definida por:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. demostrar que M es un espacio vectorial y dar una base de él,
2. demostrar que f es lineal y calcular la matriz asociada a f en la base encontrada en el apartado anterior.

Solución:

1. Una base de M puede ser:

$$\left\{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

2. La matriz de f en la base anterior es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Se considera la aplicación de $\boldsymbol{R}^3$ en $\boldsymbol{R}^2$, $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$, que hace corresponder a los vectores $(1,0,1)^t, (0,1,1)^t, (1,1,0)^t$ los vectores $(1,0)^t, (0,2)^t, (1,1)^t$ respectivamente. Las coordenadas de los vectores se refieren a ciertas bases $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^3$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^2$.

   Se pide:

   1. Matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^3$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^2$,
   2. Unas ecuaciones implícitas del subespacio imagen de $V = \left\{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 / \, 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\right\}$,

3. Unas ecuaciones paramétricas de $f(V)$ en la base $B=\left\{(1,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}},(2,0)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}\right\}$ de $\boldsymbol{R}^2$.

Solución:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
2. $f(V)=\left\{\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^2 /\ 2x_1-x_2=0\right\}$
3. $f(V)=\left\{\mathbf{y}\in\boldsymbol{R}^2 \Big/ \begin{array}{r} y_1=2\alpha \\ y_2=-\frac{1}{2}\alpha \end{array},\ \alpha\in\boldsymbol{R}\right\}$ en donde y_1 e y_2 son las coordenadas de un vector de $\boldsymbol{R}^2$ en la base B.

5. Se define un homomorfismo $f: V\to W$ entre dos $\mathbb{k}-$e.v. de dimensiones 3 y 4 respectivamente de manera que $f(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)=\mathbf{u}_1$, $f(\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3)=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ y $f(2\mathbf{e}_3)=2\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_3$, donde $B=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $B'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ es una base de W. Se pide:
   1. matriz asociada a f en las bases B y B',
   2. ecuaciones implícitas de $\mathrm{Im}(f)$,

3. núcleo de f.

Solución:

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. $\mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{x} \in W \ / \ x_4 = 0\}$
3. $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$

6. Estudiar si las aplicaciones:
   1. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ definida por $f((x_1, x_2, x_3)^t) = (x_3, x_1 + x_2, -x_3)^t$
   2. $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ definida por $f((x_1, x_2, x_3)^t) = (x_1 + x_2, 0)^t$

   son aplicaciones lineales. En caso afirmativo calcular su núcleo y su imagen. Estudiar su inyectividad.

   Solución:

1. f es una aplicación lineal.
   $\text{Im}(f) = \left\langle (0,1,0)^t, (0,1,0)^t, (1,0,-1)^t \right\rangle \Rightarrow$Base de $\text{Im}(f) = \left\{ (0,1,0)^t, (1,0,-1)^t \right\}$.
   $$\ker(f) = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \middle/ \begin{array}{r} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Base de } \ker(f) =$$
   $\left\{ (-1,1,0)^t \right\}$. No es inyectiva puesto que $\ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$
2. f es una aplicación lineal. $\text{Im}(f) = \left\langle (1,0)^t, (1,0)^t, (0,0)^t \right\rangle \Rightarrow$ Base de $\text{Im}(f) = \left\{ (1,0)^t \right\}$. $\ker(f) = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 / x_1 + x_2 = 0 \right\} \Rightarrow$ Base de $\ker(f) = \left\{ (-1,1,0)^t, (0,0,1)^t \right\}$. f no es inyectivo.

7. Indicar si son falsas o verdaderas las siguientes proposiciones:
   1. Si $g : V \to W$ es una aplicación lineal, en ocasiones es posible encontrar tres vectores diferentes $\mathbf{v}_1 \in V$, $\mathbf{v}_2 \in V$ y $\mathbf{w} \in W$ tales que $g(\mathbf{v}_1) = g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}$.
   2. Suponiendo cierta la proposición anterior, si $g(\mathbf{v}_1) = g(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \ker(g)$.

3. Si g es una aplicación lineal de V en W, entonces la imagen de g es W.
4. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ es una base de P_{n-1}, entonces existen dos aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^n \to P_{n-1}$ y $g : P_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ tales que $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ y $g(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, \ldots, n$.
5. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal y $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces f es la aplicación nula.
6. Existe una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^5$ con $\dim \ker(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$.
7. Se supone que $f : M_{2,2}(\mathbb{K}) \to M_{2,2}(\mathbb{K})$ con $\dim \operatorname{Im}(f) = 4$. Si $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

1. V
2. V
3. F
4. V

5. F
6. F
7. V

8. Se define una aplicación lineal $f : V \to W$ entre dos $\boldsymbol{K}-$e.v. de dimensión 3 de manera que $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2$ y $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1$, donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Se pide:
   1. matriz asociada a f en las bases B y B^*,
   2. dimensión de $\operatorname{Im}(f)$,
   3. base de $\ker(f)$,
   4. calcular unas ecuaciones implícitas de $f(S)$ si

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in V \Bigg/ \begin{array}{r} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha + \beta \end{array} , \alpha, \beta \in \boldsymbol{K} \right\},$$

   5. dada una nueva base de V, $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ en donde $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_3$, calcular la nueva matriz asociada a f en las bases B' y B^*,

6. si en W se realiza el cambio de coordenadas: $x_1' = x_1 + x_2 - x_3$, $x_2' = x_1 - x_2$ y $x_3' = x_3$ calcular la nueva matriz asociada a f en las bases B y $B^{\clubsuit}$ (en donde $B^{\clubsuit}$ es la base respecto a la cual las coordenadas de $\mathbf{x}$ son $(x_1', x_2', x_3')^t$),
7. obtener la matriz de f cuando se realizan los dos cambios.

Solución:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$
3. Base de $\ker(f) = \left\{(1, 1, -1)^t\right\}$
4. $f(S) = \left\{\mathbf{x} \in W \Big/ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. En $\boldsymbol{R}^3$ se considera la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Clasificar (indicar si es inyectivo, sobreyectivo, ambas cosas a la vez (biyectivo) o ni sobreyectivo ni inyectivo) el endomorfismo $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ dado por $f(\mathbf{e}_1) = a\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ según los valores de a y b.

   Solución:

   1. Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$ el endomorfismo f es biyectivo (es un automorfismo). $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, $\dim(\ker(f)) = 0$.
   2. Si $a = 1$ y $b \neq 1$ el endomorfismo f no es ni inyectivo ni sobreyectivo. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, $\dim(\ker(f)) = 1$.
   3. Si $a \neq 1$ y $b = 1$ el endomorfismo f no es ni inyectivo ni sobreyectivo. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, $\dim(\ker(f)) = 1$.
   4. Si $a = 1$ y $b = 1$ el endomorfismo f no es ni inyectivo ni sobreyectivo. $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$, $\dim(\ker(f)) = 2$.

10. Dado el endomorfismo del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ definido de la siguiente forma:
    - el núcleo del endomorfismo es el subespacio vectorial de ecuaciones implícitas:

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \in \mathbb{R}^4 \Big/ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\},$$

    - los vectores $(1, 1, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(0, 0, 0, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ se transforman en si mismos.

Se pide:

1. matriz del endomorfismo en la base $\{\mathbf{e}_i\}$.
2. dado el subespacio de ecuaciones implícitas:

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \in \mathbb{R}^4 \Big/ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

hallar unas ecuaciones paramétricas de su imagen,

3. matriz del endomorfismo en la base:

$$B=\left\{(1,1,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}},(0,1,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}},(0,0,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}},(0,0,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\right\}.$$

Solución:

1. $$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $$f(V)=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\in\boldsymbol{R}^4 \Big/ \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{array}\right\}$$
3. $$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Sea $h : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ una aplicación lineal definida por la relación

$$h((x_1, \ldots, x_n)^t) = (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n)^t \text{ con } a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{IR}.$$

   1. ¿Bajo que condiciones admite h una aplicación inversa?
   2. Suponiendo que se satisfagan las condiciones del apartado (a) encontrar la expresión de h^{-1}.

Solución:

   1. La aplicación h tendrá inversa si es biyectiva, para lo que es necesario que $a_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.
   2. $h^{-1}((x_1, \ldots, x_n)^t) = (\frac{1}{a_1} x_1, \ldots, \frac{1}{a_n} x_n)^t$.

12. Determinar si las siguientes aplicaciones lineales de $M_{2,2}(\boldsymbol{K})$ en $M_{2,2}(\boldsymbol{K})$ son isomorfismos. Si lo son, determinar el isomorfismo inverso

   1. $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
   2. $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

3. $h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Solución:

1. f no es un isomorfismo.
2. g es un isomorfismo. $g^{-1}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
3. h es un isomorfismo. $h^{-1}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

13. Considérese la reacción química

$$\mathrm{PbN_6} + \mathrm{CrMn_2O_8} \rightarrow \mathrm{Pb_3O_4} + \mathrm{Cr_2O_3} + \mathrm{MnO_2} + \mathrm{NO}$$

Para cada uno de los dos reactivos de la izquierda y los cuatro productos de la derecha se pide construir un vector de $\boldsymbol{R}^5$ que enumere el número de "átomos por molécula" de plomo (Pb), de nitrógeno (N), de cromo (Cr), de manganeso (Mn) y de oxígeno

(O). Por ejemplo el vector para el permanganato de cromo ($CrMn_2O_8$) será

$$(0, 0, 1, 2, 8)^t$$

Una vez construidos los seis vectores se pide:

1. Llamando $x_1, \ldots, x_6$ al número de moléculas de cada tipo que aparecen en la reacción, escribir una ecuación vectorial que estas variables deban satisfacer para ajustar la reacción.
2. Pasando todas las incógnitas a la izquierda, reescribir la ecuación vectorial del apartado (a) en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Qué relación hay entre la solución de la ecuación vectorial y el núcleo de la aplicación lineal definida entre $\boldsymbol{R}^6$ y $\boldsymbol{R}^5$ y cuya matriz referida a las bases canónicas respectivas es A?
3. Resolver la ecuación vectorial (se aconseja utilizar Matlab o Maxima). Hay una infinidad de soluciones, seleccionar las que tengan sentido químico.