Espacio euclídeo

Tema 5

Ultano Kindelán
Marco Antonio Fontelos

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra Lineal

ÍNDICE

5.1 Introducción

- Una gran variedad de propiedades geométricas se basan en la posibilidad de medir segmentos y los ángulos entre ellos.
- La estructura de espacio vectorial que se ha estudiado hasta ahora no permite calcular longitudes de segmento, distancias entre los mismos o los ángulos que forman.
- Para poder realizar estas operaciones es necesario introducir una "métrica" en el espacio vectorial. Esta métrica se introduce definiendo una aplicación que recibe el nombre de producto escalar.
- Todo espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar recibe el nombre de espacio euclídeo y del estudio de sus principales propiedades y aplicaciones se va a ocupar este capítulo.

5.2 Definición de producto escalar y de espacio euclídeo

Definición 5.1

Dados dos vectores $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *de un* $\boldsymbol{R}$*-espacio vectorial,* E*, toda aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & E \times E & \to & \boldsymbol{R} \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \to & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{array}$$

que verifique:

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *(simetría),*
2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{x} \in E \ (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ *(positividad),*
3. $(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E, \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ *(bilinealidad);*

recibe el nombre de ***producto escalar.***

Proposición 5.1

$$\forall \mathbf{x} \in E, \mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Definición 5.2

*Un **R**-espacio vectorial sobre el que se ha definido un producto escalar recibe el nombre de **espacio euclídeo.***

Ejemplo 5.1

Algunos casos particulares de espacio euclídeo son los siguientes:

- En $\boldsymbol{R}^3$ se puede definir el siguiente producto escalar:

  $$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

  donde $(x_1, x_2, x_3)^t$ e $(y_1, y_2, y_3)^t$ son las componentes de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en una base $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^3$. $\boldsymbol{R}^3$ con este producto escalar es un espacio euclídeo.

- $\boldsymbol{R}^n$ con el siguiente producto escalar también es un espacio euclídeo,

  $$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

  donde $(x_1, \ldots, x_n)^t$ e $(y_1, \ldots, y_n)^t$ son las componentes de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en una base $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^n$.

Ejemplo 5.1 (cont.)

- $\boldsymbol{R}^3$ con el siguiente producto escalartambién es un espacio euclídeo,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+x_1y_2+x_1y_3+x_2y_1+2x_2y_3+x_3y_1+2x_3y_2 =$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G\mathbf{y}$$

donde $(x_1, x_2, x_3)^t$ e $(y_1, \ldots, y_n)^t$ son las componentes de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en una base $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\boldsymbol{R}^3$. G es la matriz asociada al producto escalar en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ (ver la siguiente definición). Existe una base de $\boldsymbol{R}^3$ en la que la expresión de este producto escalar es igual a la del ejemplo 1 (existe una base de $\boldsymbol{R}^3$ en la que la matriz asociada a este producto escalar es la matriz unidad).

Ejemplo 5.1 (cont.)

- $P_3(x)$ con el siguiente producto escalar también es un espacio euclídeo,

$$p(x) \cdot q(x) = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$$

donde $(p_0, p_1, p_2, p_3)^t$ y $(q_0, q_1, q_2, q_3)^t$ son las coordenadas de $p(x)$ y $q(x)$ en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $P_3(x)$.

Definición 5.3

Sea E un espacio euclídeo de dimensión finita. Si $\dim(E) = n$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ *es una base de E y se conocen los n^2 productos escalares* $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, *entonces el producto escalar de dos vectores* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *se puede expresar como:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^t G \mathbf{y} \text{ donde } G = (g_{ij}) \text{ y } g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \; (i, j = 1, \ldots, n)$$

siendo $(x_1, \ldots, x_n)^t$ *e* $(y_1, \ldots, y_n)^t$ *las coordenadas de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$ *y G la* ***matriz de Gram*** *del producto escalar en la base dada (o, simplemente, matriz del producto escalar en la base dada).*

Observación 5.1

La matriz G es una matriz simétrica ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$) y definida positiva ($\mathbf{x}^t G\mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$).

Observación 5.2

Una matriz G, simétrica y cuadrada de dimensión n, es definida positiva si y solamente si

$$|G_i| > 0, \ i = 1, \ldots, n; \text{ con } G_i = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.2 (Casos particulares de matrices de Gram)

- En el caso 5.1 del ejemplo 5.1 la matriz de Gram del producto escalar es:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

  Los productos escalares de los vectores de la base serán

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1,\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_i^j,\ (i, j = 1, 2, 3).$$

- La matriz de Gram del producto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$ definido sobre $\boldsymbol{R}^2$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2 \end{array}$$

Ejemplo 5.2 (cont.)

- En el caso 5.1 del ejemplo 5.1 la matriz de Gram del producto escalar es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1,\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2,\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 2,\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 3 \end{array}$$

Proposición 5.2 (Cambio de base)

Dado un espacio euclídeo E de dimensión n, si la expresión del producto escalar del espacio euclídeo en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ de E es

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) G \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

y su expresión respecto a otra base, $\{\mathbf{u}_i\}$, es:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x'_1, \ldots, x'_n) G' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$G' = P^t G P$$

con $P = (\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n)_{\{\mathbf{e}_i\}}$ (matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$).

Observación 5.3

Dadas dos matrices $A, B \in M_n(\boldsymbol{R})$, se dice que A y B son congruentes si existe una matriz $Q \in M_n(\boldsymbol{R})$ (Q inversible) tal que $A = Q^t BQ$.

Proposición 5.3

Si $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ es una matriz simétrica definida positiva, entonces la matriz I_n es congruente con A ($\exists P \in M_n(\boldsymbol{R})$ (P inversible) tal que $I_n = P^t AP$).

Proposición 5.4

Sea E un espacio euclídeo y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ el producto escalar definido sobre E. Existe una base de E en la que la expresión del producto escalar es:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_n) I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Definición 5.4

Sea E un espacio euclídeo. Se llama ***norma euclídea*** *de un vector $\mathbf{x} \in E$ y se representa por $\|\mathbf{x}\|$ al siguiente número real:* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Ejemplo 5.3 (Casos particulares de normas euclídeas)

- La norma euclídea de un vector del espacio que aparece en el caso particular 5.1 del ejemplo 5.1 será:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$$

- La norma euclídea de un vector del espacio que aparece en el caso particular 5.1 del ejemplo 5.1 de espacio euclídeo será:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

Ejemplo 5.3

- Dado el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + \frac{3}{2} x_1 y_3 + \frac{3}{2} x_3 y_1 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_2$$

la norma euclídea de un vector de dicho espacio será:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 2x_1 x_2 + 3x_1 x_3 + 4x_2 x_3}$$

Definición 5.5

*Sea E un espacio euclídeo. $\mathbf{x} \in E$ es un vector **unitario** si $\|\mathbf{x}\| = 1$.*

Proposición 5.5 (Fórmula del paralelogramo)

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ se verifica $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\,\|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{y}\|^2$.

Proposición 5.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (E es un espacio euclídeo), se verifica:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

Proposición 5.7

Sea E un espacio euclídeo. La aplicación norma euclídea ($\|\cdot\| : E \to R$) verifica las siguientes propiedades:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in E$
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ Ssi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\| \ \forall \mathbf{x} \in E, \forall \lambda \in R$
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (desigualdad triangular)

Definición 5.6

Dados dos vectores $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *de un espacio euclídeo* E, *se define la* ***distancia*** *entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *como*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Proposición 5.8

La distancia entre dos vectores de un espacio euclídeo verifica las cuatro propiedades siguientes:

1. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0,\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$
2. $d(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0,\ \forall \mathbf{x} \in E$
3. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$
4. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}),\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in E$

Definición 5.7

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, *el escalar* $\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$ *representa el* ***coseno del ángulo*** *que forman los vectores* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$,

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}$$

Observación 5.4

Obsérvese que debido a la desigualdad de Schwarz se asegura que $\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [-1, 1]$.

Ejemplo 5.4

En el espacio euclídeo formado por $\boldsymbol{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

calcular $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, el ángulo que forman **a** y **b** y la distancia entre **a** y **b**, siendo $\mathbf{a} = (1,2,1)^t$ y $\mathbf{b} = (1,1,0)^t$.

Solución:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{12}, \\
\|\mathbf{b}\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1 \\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \\
\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{angulo}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{1}{6}\pi \text{ radianes} \\
d(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \left\|(0,1,1)^t\right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{7}
\end{aligned}
$$

5.3 Bases ortogonales y ortonormales

Definición 5.8

Sea E un espacio euclídeo. Se dice que dos vectores de E, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, son ***ortogonales*** *si*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$$

Proposición 5.9

(Teorema de Pitágoras) Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos vectores ortogonales de un espacio euclídeo entonces:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Definición 5.9

Sea E un espacio euclídeo de dimensión n y $\{\mathbf{a}_i\}$ una base de E. Si $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$ se dice que $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ es una base ***ortogonal*** *de E.*

Observación 5.5

La matriz del producto escalar en esta base será diagonal (con todos los elementos de la diagonal mayores que cero).

Definición 5.10

Se dice que una base de un espacio euclídeo de dimensión n es ***ortonormal*** *si verifica las dos propiedades siguientes:*

1. *$\{\mathbf{a}_i\}$ es ortogonal,*
2. *$\|\mathbf{a}_i\| = 1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Observación 5.6

Las dos propiedades que caracterizan una base ortonormal se pueden resumir en una sola: $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Observación 5.7

Si $\{\mathbf{a}_i\}$ es una base ortonormal de un espacio euclídeo E, la expresión del producto escalar en dicha base será:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

y la norma de un vector $x \in E$,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Observación 5.8

Si $\{\mathbf{a}_i\}$ **es una base ortonormal** de un espacio euclídeo E y $\mathbf{u}$ es un vector de E, entonces $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_2 + \ldots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_n)\mathbf{a}_n$. Dicho de otro modo: la coordenada j-ésima de $\mathbf{u}$ en la base $\{\mathbf{a}_i\}$ se obtiene multiplicando escalarmente $\mathbf{u}$ por $\mathbf{a}_j$ ($u_j = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_j$).

Observación 5.9

Si $\{\mathbf{a}_i\}$ es una base ortogonal de un espacio euclídeo entonces

$$\left\{ \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|}, \ldots, \frac{\mathbf{a}_n}{\|\mathbf{a}_n\|} \right\}$$

es una base ortonormal del mismo espacio euclídeo.

Observación 5.10

La definición de base ortogonal y base ortonormal se puede generalizar a un conjunto cualquiera de vectores:

1. $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subset E$ es un conjunto ortogonal si $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0$ para $i \neq j$ $i, j = 1, \ldots, p$.
2. $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\} \subset E$ es un conjunto ortonormal si $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_i^j$, $i, j = 1, \ldots, p$.

Proposición 5.10

(Teorema de Pitágoras generalizado) Si E es un espacio euclídeo y $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ un conjunto ortogonal de E, se verifica:

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_p\|^2 = \|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}_p\|^2$$

Proposición 5.11

En un espacio euclídeo todo conjunto ortogonal formado por vectores no nulos es un conjunto linealmente independiente.

5.4 Proyección ortogonal

Definición 5.11

*Sea W un subespacio vectorial de un espacio euclídeo E. Se dice que un vector $\mathbf{x} \in E$ es **ortogonal a** W si $\mathbf{x}$ es ortogonal a **todos** los vectores de W.*

Observación 5.11

Para comprobar que un vector $\mathbf{x}$ de un espacio euclídeo es ortogonal a un subespacio, W, de dicho espacio euclídeo, basta con comprobar que es ortogonal a todos los vectores de una base cualquiera de W. Si $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ es una base de W entonces:

$$\mathbf{x} \text{ ortogonal a } W \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = 0, i = 1, \dots p$$

Definición 5.12

Dado un espacio euclídeo E y dos subespacios de E, V y W, se dice que V y W son ***ortogonales*** *si todos los vectores de V son ortogonales a W (o, lo que es lo mismo, todos los vectores de W son ortogonales a V).*

Observación 5.12

Para comprobar que dos subespacios vectoriales de un espacio euclídeo son ortogonales basta con comprobar que los vectores de dos bases cualesquiera de cada uno de ellos son ortogonales entre sí. Si V y W son dos subespacios vectoriales de un espacio euclídeo, $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ es una base de W y $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q\}$ es una base de V entonces:

$$V \text{ es ortogonal a } W \Leftrightarrow \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0,\ i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q$$

Definición 5.13

Sea W un subespacio vectorial de un espacio euclídeo E. Se denomina ***subespacio ortogonal*** *a W y se representa por $W^{\perp}$ al conjunto formado por todos los vectores de E ortogonales a W. Este conjunto, como su nombre indica, es un subespacio vectorial de E.*

Observación 5.13

$W^{\perp}$ es el mayor de los subespacios que son ortogonales a W, en el sentido de que cualquier otro subespacio de E que sea ortogonal a W está incluido en $W^{\perp}$.

Observación 5.14

Si se conoce una base de W, $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$, se obtienen unas ecuaciones implícitas de $W^\perp$ obligando a que los productos escalares de los vectores de $W^\perp$ por cada uno de los p vectores de la base $\{\mathbf{a}_i\}$ sea cero:

$$W^\perp = \{\mathbf{x} \in E \,/\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = 0,\ i = 1, \ldots, p\}$$

Teorema 5.1 (Teorema de la proyección)

Si W es un s.e.v. de dimensión finita de un espacio euclídeo E, entonces cualquier vector $\mathbf{v}$ de E se puede expresar de forma ***única*** *como*

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

en donde $\mathbf{w}_1 \in W$ y $\mathbf{w}_2 \in W^\perp$.

Observación 5.15

Para la demostración del teorema anterior hay que tener en cuenta, por la definición de ortogonalidad, que W y $W^{\perp}$ son **suplementarios** en E ya que:

1. $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$,
2. $W + W^{\perp} = E$.

Definición 5.14

En el teorema anterior $\mathbf{w}_1$ *recibe el nombre de* ***proyección ortogonal*** *de* $\mathbf{v}$ *sobre* W *y se representa por* $\Pr|_W \mathbf{v}$.

Definición 5.15

En el teorema anterior $\mathbf{w}_2$ *recibe el nombre de* ***complemento ortogonal*** *de* $\mathbf{v}$ *respecto a* W.

Proposición 5.12 (Cálculo de la proyección ortogonal)

Sea W un s.e.v de dimensión p de un espacio euclídeo E de dimensión n y matriz de Gram $G = I_n$. Si se conoce una base cualquiera, $\{a_i\}$, de W, la **proyección ortogonal** de un vector $\mathbf{v} \in E$ sobre W es igual a

$$\mathbf{w}_1 = Pr|_W \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{a}_i = A\mathbf{x}, \quad A = (\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_p)\,. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta el teorema de la proyección

$$\mathbf{v} - \mathbf{w}_1 \in W^{\perp} \Rightarrow A^t(\mathbf{v} - \mathbf{w}_1) = 0$$

y las $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)$ son solución del sistema

$$A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{v}. \tag{2}$$

Observación 5.16

Si la matriz de Gram de E es distinta de I_n, el sistema anterior queda

$$A^t GA\mathbf{x} = A^t G\mathbf{v}$$

Observación 5.17

Si se despeja **x** en (2), se obtienen las coordenadas de la proyección ortogonal de **v** en la base $\{\mathbf{a}_i\}$:

$$Pr|_W \mathbf{v}_{\mathbf{a}_i} = \mathbf{x} = (A^t A)^{-1} A^t \mathbf{v}.$$

Sustituyendo **x** en (1) se obtienen las coordenadas de $Pr|_W \mathbf{v}$ en la base de referencia, ortonormal, de E:

$$Pr|_W \mathbf{v}_{\mathbf{e}_i} = \mathbf{x}' = A(A^t A)^{-1} A^t \mathbf{v}.$$

La matriz

$$P_W = A(A^t A)^{-1} A^t$$

recibe el nombre de **matriz de proyección** sobre W.

Observación 5.18

Si la base de referencia en E no es ortonormal ($G \neq I_n$), la matriz de proyección es

$$P_W = A(A^t G A)^{-1} A^t G$$

Observación 5.19

- Si $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ fuera una **base ortonormal** de W, $A^t A = I_p$ ($A^t G A = I_p$, si la base de ref. de E no es ortonormal) y la matriz de proyección sobre W se simplifica:

$$P_W = AA^t \quad (P_W = AA^t G).$$

- Si $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ fuera una **base ortogonal** de W, $A^t A = D$ ($A^t G A = D$, si la base de ref. de E no es ortonormal) y la matriz de proyección sobre W se simplifica:

$$P_W = AD^{-1}A^t \quad (P_W = AD^{-1}A^t G).$$

  con

$$D = (d_{ij}), d_{ij} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & i \neq j \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j & \text{si} & i = j \end{array} \right. , \quad i, j = 1, \cdots p.$$

Observación 5.20

- Si $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p\}$ es una **base ortonormal** de W:

$$\Pr|_W \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_p)\mathbf{c}_p = \sum_{i=1}^{p} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c}_i)\mathbf{c}_i.$$

- Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ es una **base ortogonal** de W:

$$\Pr|_W \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_p)}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p = \sum_{i=1}^{p} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i)}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}\mathbf{u}_i$$

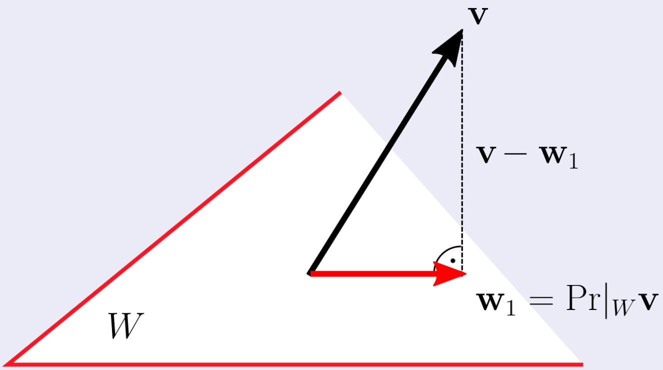
Observación 5.21

Si $\mathbf{w}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre W entonces

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}_1\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{z}\| \quad \forall \mathbf{z} \in W.$$

Expresado de otro modo: La **mejor aproximación** de $\mathbf{v}$ mediante vectores de W es la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre W.

Resumen



$\forall \mathbf{z} \in W$:

$$(\mathbf{v}-\mathbf{w}_1)\cdot \mathbf{z} = 0$$

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}_1\| = \min \|\mathbf{v}-\mathbf{z}\|$$

5.6 Aproximación por mínimos cuadrados

Hasta ahora cuando nos hemos encontrado con un **sistema incompatible**, nuestra única respuesta ha sido "no tiene solución". En esta sección vamos a ir un paso más allá en lo que respecta a estos sistemas sin solución. Si un sistema $A\mathbf{b} = \mathbf{y}$ no tiene solución, vamos a intentar encontrar un vector $\mathbf{b}^*$ tal que el vector **residuo** $\mathbf{r} = A\mathbf{b}^* - \mathbf{y}$ sea lo **más pequeño posible**. La pseudosolución $\mathbf{b}^*$ recibe el nombre de aproximación por **mínimos cuadrados** de $\mathbf{b}$.

Empezaremos con el caso en que el sistema tiene dos incógnitas y luego generalizaremos. Desde el punto de vista práctico, el caso con dos incógnitas coincide con el problema de ajustar una nube de puntos en el plano con una recta.

Consideremos las matrices

$$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{array}\right) \quad \mathbf{y}=\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{array}\right) \quad \mathbf{b}=\left(\begin{array}{c} b_0 \\ b_1 \end{array}\right) \tag{3}$$

donde b_0 y b_1 son las incógnitas a determinar.

Si los $n \geq 2$ puntos (x_i, y_i) están sobre una recta entonces el sistema $\mathbf{y} = b_0\mathbf{1} + b_1\mathbf{x} = \mathbf{Ab}$ es compatible y determinado (dos ecuaciones distintas determinan la recta, las demás son combinaciones lineales de aquellas): geométricamente el vector **y** pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^n$ engendrado por las columnas de $A \rightarrow \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle$.

Si no están sobre una recta el sistema es incompatible. Hallemos en este caso el vector $\mathbf{y}^* = A\mathbf{b}^*$ de dicho subespacio (combinación lineal de las columnas de A) más próximo al $\mathbf{y}$ en el sentido de la norma euclidea, es decir, tal que:

$$\text{Min}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{Ab}^*\|^2 = \text{Min}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (b_0^* + b_1^* x_i)]^2$$

Ello equivale a que $\mathbf{y} - A\mathbf{b}^*$ sea ortogonal a $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle$:

$$A^t\,(\mathbf{y} - A\mathbf{b}^*) = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto $\mathbf{y}^* = A\mathbf{b}^*$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle$ (proyección ortogonal de un vector perteneciente a un e.v. de dimensión n sobre un s.e.v. de dimensión dos).

Resulta el sistema

$$A^t A\mathbf{b}^* = A^t\mathbf{y} \tag{4}$$

que, desarrollando los productos, queda

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^* \\ b_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

El rango de $A^t A$ es el de A y el sistema tiene solución única si, y sólo si, el rango de A es 2, es decir si al menos hay 2 abscisas x_i distintas. En ese caso

$$\mathbf{b}^* = \left(A^t A\right)^{-1} A^t\mathbf{y}.$$

Es más rápido resolver (4) sin invertir la matriz $A^t A$, obteniéndose

$$\begin{aligned} b_1^* &= \frac{\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)/n}{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2/n}, \\ b_0^* &= \bar{y} - b_1\bar{x} \quad \left(\overline{x} = \Sigma x_i/n,\, \overline{y} = \Sigma y_i/n\right). \end{aligned} \tag{5}$$

El procedimiento anterior se puede aplicar al caso general de $k+1$ incógnitas:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \cdots + b_k x_{ik}, \; i = 1, \ldots, n \; (n \geq k),$$

llegando al mismo sistema (4) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}$$

En este caso se estaría ajustando una nube de puntos contenida en un espacio de dimensión $k+1$ con un hiperplano de dimensión k mediante la proyección ortogonal de un vector perteneciente a un e.v. de dimensión n sobre un s.e.v. de dimensión $k+1$.

Observación 5.22

En el caso anterior

$$A^t A = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} & \dots & \sum x_{ik} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} & \dots & \sum x_{i1}x_{ik} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2 & \dots & \sum x_{i2}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum x_{ik} & \sum x_{i1}x_{ik} & \sum x_{i2}x_{ik} & \dots & \sum x_{ik}^2 \end{pmatrix}$$

en donde la suma se hace sobre las componentes de cada uno de los vectores $\mathbf{x}_k$, por ejemplo $\sum x_{i1}x_{i2} = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2}$.

5.5 Método de ortonormalización de Gram - Schmidt

- Sea E un espacio euclídeo y $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ un sistema linealmente independiente de E. El método de Gram - Schmidt obtiene a partir de $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ un sistema ortonormal $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p\}$ tal que $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p \rangle$.
- En particular si $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ fuese una base de E se habría obtenido una nueva base, $\{\mathbf{y}_1, \ldots \mathbf{y}_p\}$, ortonormal de E.
- Se comenzará aplicando el método a un caso particular y a continuación se extenderá a un caso general.

Ejemplo introductorio
Supóngase el espacio euclídeo formado por $\boldsymbol{R}^3$ y el producto escalar

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 2x_1y_1+3x_2y_2+2x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2\\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\mathbf{x}^tG\mathbf{y}\end{aligned}$$

referido a la base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$. Determínese una base ortonormal del espacio euclídeo anterior.
Se parte de una base cualquiera de $\boldsymbol{R}^3$, por ejemplo (la más sencilla) $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ y se realizan los siguientes pasos:

1. Se escoge uno de los vectores de la base, por ejemplo $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{z}_1=\mathbf{e}_1=(1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

2. Se proyecta uno de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ distinto a $\mathbf{e}_1$, por ejemplo $\mathbf{e}_2$, sobre el subespacio generado por $\mathbf{z}_1$. El complemento ortogonal de $\mathbf{e}_2$, que se llamará $\mathbf{z}_2$, será ortogonal a $\mathbf{z}_1$ y será el segundo vector de la nueva base:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{e}_2 - \Pr\big|_{\langle \mathbf{z}_1 \rangle} \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 - \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1} \mathbf{z}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0 \right)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} .$$

3. Se proyecta el vector restante de la base, $\mathbf{e}_3$, sobre el subespacio generado por $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$. El complemento ortogonal de $\mathbf{e}_3$ será ortogonal a $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ y será el tercer vector de la nueva base:

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{e}_3 - \Pr\big|_{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle} \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1} \mathbf{z}_1 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \right)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} .$$

$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ es un base **ortogonal** de R^3. Para obtener una base **ortonormal** se dividen los tres vectores por sus respectivas normas:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}},$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

$\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ es una **base ortonormal** de R^3.

Animación gráfica del método G-S. Lucas Vieira, Public domain, via Wikimedia Commons

Descripción del método de Gram - Schmidt para un caso general

Sea E un espacio euclídeo de dimensión n y $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ un conjunto de p vectores linealmente independientes de E ($p \leq n$). Se obtiene un conjunto ortonormal de vectores $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p\}$ tal que $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \rangle = \langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p \rangle$ del siguiente modo:

1.
$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 .$$
De esta forma se asegura que $\langle \mathbf{z}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \rangle$.

2.
$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathrm{Pr}\,\Big|_{\langle \mathbf{z}_1 \rangle} \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1} \mathbf{z}_1 .$$
De esta forma se asegura que:
- $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$ debido a que $\mathbf{x}_2 \notin \langle \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{z}_1 \rangle$.
- $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ es ortogonal debido a que $\mathbf{z}_2$ es ortogonal a $\mathbf{z}_1$.
- $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ es linealmente independiente debido a que todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.
- $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$ debido a que $\mathbf{z}_1$ es igual a $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{z}_2$ es combinación lineal de $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{x}_2$ y por lo tanto de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

$\vdots$

$\vdots$

k+1. Supóngase calculados $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ ($k < p-1$) tal que $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$ sea un sistema ortogonal y que $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle$.
Para construir el siguiente vector se hará:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \Pr\Big|_{\langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{x}_{k+1} \cdot \mathbf{z}_i}{\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_i} \mathbf{z}_i.$$

De esta forma se asegura que:

- $\mathbf{z}_{k+1} \neq \mathbf{0}$ debido a que $\mathbf{x}_{k+1} \notin \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle$.
- $\mathbf{z}_{k+1}$ es **ortogonal** a $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$ ya que $\mathbf{z}_{k+1}$ es el complemento ortogonal de $\mathbf{x}_{k+1}$ respecto de $\langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \rangle$.
- $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k+1}\}$ es un conjunto ortogonal y, por lo tanto, **linealmente independiente**.
- $\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1} \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{k+1} \rangle$ debido a que $\mathbf{z}_{k+1}$ es combinación lineal de $\{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k, \mathbf{x}_{k+1}\}$ y por lo tanto de $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}\}$.

$\vdots$

$\vdots$

p.

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{x}_p - \Pr\Big|_{\langle \mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{p-1}\rangle} \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{z}_i}{\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{z}_i} \mathbf{z}_i.$$

El conjunto $\{\mathbf{z}_1, \cdots \mathbf{z}_p\}$ es un conjunto **ortogonal.** Si se divide cada uno de los vectores por su norma:

$$\mathbf{y}_i = \frac{\mathbf{z}_i}{\|\mathbf{z}_i\|}, i = 1, \ldots, p,$$

se obtiene una **base ortonormal** $\{\mathbf{y}_1, \cdots \mathbf{y}_p\}$ que verifica

$$\langle \mathbf{y}_1, \cdots \mathbf{y}_p \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \cdots \mathbf{x}_p \rangle.$$

5.7 Producto vectorial y producto mixto

Definición 5.16

*Sea E un espacio euclídeo de dimensión 3 y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormal de E. Dados dos vectores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, el **producto vectorial** de ambos es otro vector de E definido del siguiente modo:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{e}_3 \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \epsilon(\sigma) u_{\sigma(1)} v_{\sigma(2)} \mathbf{e}_{\sigma(3)}
\end{aligned}
$$

Observación 5.23

El producto vectorial es una ley de composición interna en E

$$\begin{array}{rccc} \times: & E \times E & \rightarrow & E \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \rightarrow & \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \end{array}$$

Definición 5.17

Sea E un espacio euclídeo de dimensión 3 y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormal de E. Dados tres vectores de E, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{z} = z_1\mathbf{e}_1 + z_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3$, el ***producto mixto*** *$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ es el siguiente real:*

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + \\ x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)} \end{aligned}$$

Observación 5.24

El producto mixto es una aplicación de $E \times E \times E$ en $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{array}{rccc} [.,.,.]: & E \times E \times E & \to & \boldsymbol{R} \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) & \to & [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \end{array}$$

Ejemplo 5.5

1. Calcule el producto vectorial de $\mathbf{u} = (1, 2, 1)^t$ y $\mathbf{v} = (1, 1, 2)^t$ (referidos a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$).
2. Calcule el producto mixto de los vectores $\mathbf{w} = (1, 0, 2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{u} = (1, 2, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $\mathbf{v} = (1, 1, 2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

Solución:

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3 \\ &= (4-1)\mathbf{e}_1 - (2-1)\mathbf{e}_2 + (1-2)\mathbf{e}_3 = (3,-1,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \end{aligned}$$

2.

$$[\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}] = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Propiedades del producto vectorial y del producto mixto

1. $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) =0$ si y solamente si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es un sistema linealmente dependiente (en particular el producto mixto será nulo si dos de los vectores son iguales).
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (el producto vectorial es antisimétrico).
3. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (no es asociativo).
4. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$; $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$.
5. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin \theta$. Siendo θ el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
6. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$.
7. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y solamente si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

Observación 5.25

La norma del producto vectorial de dos vectores de E representa el área del paralelogramo que se construiría colocando ambos vectores con un mismo origen y trazando por el extremo de cada vector una paralela al otro vector.

Observación 5.26

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ representa el volumen del paralelepípedo que se construiría colocando los vectores con un mismo origen y trazando el resto de las aristas mediante paralelas a dichos vectores.

Observación 5.27

Se ha dado una definición particular de producto mixto y producto vectorial que únicamente es válida para espacios euclídeos de dimensión 3 y bases de referencia ortonormales. Las definiciones más generales de producto mixto y producto vectorial se salen de los objetivos del presente curso.

Ejercicios

1. Dados dos polinomios pertenecientes a P_2, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, se define el producto escalar de p por q como:

$$p(x) \cdot q(x) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} =$$

$$2a_0 b_0 + 4a_1 b_1 + 4a_2 b_2 - 2a_0 b_1 - 2a_1 b_0 + 2a_2 b_1 + 2a_1 b_2$$

   Se pide:

   1. Si $f(x) = 1 + x + x^2$ y $g(x) = x^2$ hallar $f(x) \cdot g(x)$.
   2. Determinar $\|f(x)\|$ y $\|g(x)\|$.
   3. Hallar el ángulo que forman los polinomios $f(x)$ y $g(x)$.

   Solución:

   1. $f(x) \cdot g(x) = 6$
   2. $\|f(x)\| = \sqrt{10}$ y $\|g(x)\| = 2$

3. $\cos(\widehat{f,g}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$
4. $d(f(x), g(x)) = \sqrt{2}$

2. Considérese el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^3$ y el producto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} =$ $2x_1y_1+9x_2y_2+5x_3y_3-4x_1y_2-4x_2y_1+2x_1y_3+2x_3y_1-5x_2y_3-5x_3y_2$ expresado en una cierta base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Se pide:
   1. determinar una base ortonormal del espacio euclídeo.
   2. determinar las coordenadas del vector $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ en la base ortonormal hallada en el apartado anterior.

   Solución:
   1. Base ortonormal: $\{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{u}_2 = (2,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}},$ $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\}$[1]
   2. $\mathbf{x} = -\sqrt{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$

[1] Existen infinitas bases ortonormales, por lo tanto esta no es la única solución correcta

3. Considérese el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial E de dimensión 3 y el producto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_{2\{\mathbf{e}_i\}}$. Se pide:
   1. hallar una base ortonormal del subespacio ortogonal a F, en donde F es el subespacio generado por el vector $(1, 1, -1)^t$,
   2. calcular la proyección ortogonal del vector $\mathbf{x} = (2, 1, 2)^t$ sobre el subespacio ortogonal a F,
   3. hallar una base ortonormal de E, $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$, en la que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son vectores de la base ortonormal del ortogonal a F. Repetir el apartado b) expresando los vectores y el producto escalar en la base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$. Comprobar que el resultado obtenido es el mismo.

Solución:

1. $F^\perp = \left\langle \mathbf{b}_1 = (1, 0, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{b}_2 = (0, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle$,

   Base ortonormal de $F^\perp$: $\left\{ c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}},\ c_2 = (1, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}$,
2. $\Pr|_{F^\perp}\ \mathbf{x} = (4, 3, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$

3. Base ortonormal de E : $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ con $\mathbf{c}_3 = (-1, -1, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$,
   $\Pr|_{F^\perp}\ \mathbf{x} = (\sqrt{2}, 3, 0)^{\mathbf{t}}_{\{\mathbf{c_i}\}}$ $=(4, 3, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$

4. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio euclídeo de dimensión 3 que verifica:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1, \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 2$$

   y además $2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle^\perp$. Se pide:
   1. obtener la matriz del producto escalar respecto de la base B,
   2. aplicar el método de Gram-Schmidt para calcular a partir de B una base ortonormal. ¿Qué matriz tiene asociada el producto escalar en dicha base?,
   3. calcular el ángulo formado por los vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, así como el que forman $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$,
   4. ¿cuáles son las coordenadas de un vector $\mathbf{w}$ respecto de la base ortonormal calculada si respecto de la base B son $\mathbf{w} = (1, 3, -1)^t$? Calcular la norma respecto de las dos bases. ¿Qué relación hay entre los dos valores obtenidos?, razónese la respuesta.

Solución:

1. $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. Base ortonormal: $\{\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2, \mathbf{c}_3 = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$.
3. Ángulo formado por los vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3 = \frac{\pi}{4}$, ángulo que forman $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \frac{\pi}{2}$.
4. $\mathbf{w} = (1, 2, -1)^t_{\{\mathbf{c}_i\}}$. Independientemente de la base elegida $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{6}$.

5. En un espacio vectorial V y respecto de una cierta base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ se define el producto escalar de los vectores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3$ mediante:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_1 - x_3 y_2 - x_2 y_3.$$

Hallar un vector $\mathbf{a} \in V$ que forme ángulos iguales con los vectores de la base dada.

Solución:

Todos los vectores que pertenecen al subespacio

$$\left\{ \mathbf{a} \in V \,/\, a_1 = -3\lambda + 3\sqrt{2}\lambda, a_2 = 3\lambda - 2\sqrt{2}\lambda, a_3 = \lambda \right\}$$

verifican que forman ángulos iguales con los vectores de la base dada.

6. En un espacio vectorial V de dimensión 3 se considera una cierta base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Hallar la matriz de Gram de un producto escalar definido en V del que se sabe que:
   - $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{2}$ y $\|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{3}$,
   - el subespacio $U = \{x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \in V \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es ortogonal al subespacio generado por $\mathbf{e}_1$,
   - la proyección ortogonal de $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sobre el subespacio generado por $\mathbf{e}_2$ es $3\mathbf{e}_2$.

Nota: Póngase la solución en función de cuantos parámetros se necesite.

Solución:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \text{ para } \alpha > 6$$

7. En $\boldsymbol{R}^4$ se considera el producto escalar cuya matriz asociada en una base $\{\mathbf{e}_i\}$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. encontrar la proyección ortogonal del vector $\mathbf{u} = (4, -1, 0, -\frac{2}{3})^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ donde $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$,
2. obtener una base del subespacio ortogonal a V, $V^\perp$, así como la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $V^\perp$.

Solución:

1. $\mathrm{Pr}\,|_V\; \mathbf{u} = (1, 1, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
2. Base de $V^\perp = \left\{ \mathbf{v}_3 = (-4, 3, 0, -1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{v}_4 = (-1, 0, 3, 4)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}$,
   $\mathrm{Pr}\,|_{V^\perp}\; \mathbf{u} = (3, -2, -1, -\frac{2}{3})^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

8. Hallar el área de la figura ABCDE, donde A=(-2,0,0), B=(-1,-2,0), C=(2,1,0); D=(0,1,0), E=(-1,3,0), suponiendo que las coordenadas de los puntos están expresadas en metros.
   Solución: 8 m^2

9. Hallar el volumen del prisma determinado por los vectores: $\mathbf{a} = (1, 2, -1)^t$, $\mathbf{b} = (0, 1, 2)^t$ y $\mathbf{c} = (1, 2, -3)^t$ referidos a una base ortonormal.
   Solución: $2u^3$ ($u =$ unidades en las que se han medido las coordenadas de los vectores).
10. Demostrar las siguientes propiedades del producto vectorial:
    1. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$.
    2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.
11. Para estudiar la corrosión de cierta aleación se ha realizado un experimento controlado en el que se mide la ganancia en peso de la muestra Y (en %) (que indica la cantidad de oxígeno que ha reaccionado) a distintos tiempos de exposición x (en h)

x	1	2	2,5	3	3,5	4
y	0,02	0,03	0,035	0,042	0,05	0,054

    1. Determine los coeficientes de la recta $y = b_0^* + b_1^* x$ que ajusta por mínimos cuadrados los datos del enunciado.

2. ¿Cuál es la ganancia en peso aproximada por la recta al cabo de 3,2 horas?

Solución:

1. $b_1^* = 0{,}0117$, $b_0^* = 0{,}0072$.
2. Para $t = 3{,}2$ h la ganancia aproximada es

$$0{,}0072 + 0{,}0117 \times 3{,}2 \approx 0{,}0445\,\%$$

12. Recta por el origen: sea el modelo

$$Y = \beta x$$

Dado el conjunto de puntos $((x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n))$, halle el ajuste por mínimos cuadrados mediante una recta que pasa por el origen ($y = b^* x$). Debe plantear el sistema de mínimos cuadrados y obtener su solución en función de las coordenadas de los puntos de la muestra.

13. Halle el polinomio $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j^* x^j$ de grado m que aproxima, en el sentido de mínimos cuadrados, la muestra (x_i, y_i) de n observaciones, es decir que hace mínimo el valor de:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}^*\|^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - P_m(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \sum_{j=0}^{m} b_j x_i^j \right]^2$$

Debe indicar cuál sería el sistema que habría que resolver para hallar los coeficientes b_j^* en función de (x_i, y_i).

14. Ajuste un polinomio de grado dos a los siguientes datos:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	20,6	30,8	55	71,4	97,3	131,8	156,3	197,3
x	9	10						
y	238,7	291,7						

Solución: La matrices necesarias (sistema 4) son

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 9 & 81 \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 20{,}6 \\ 30{,}8 \\ 55 \\ 71{,}4 \\ 97{,}3 \\ 131{,}8 \\ 156{,}3 \\ 197{,}3 \\ 238{,}7 \\ 291{,}7 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema $(X^T X)\,\mathbf{b} = \mathbf{X}^T\mathbf{y}$ es

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12{,}643 \\ 6{,}297 \\ 2{,}125 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el polinomio pedido es
$y = 12{,}643 + 6{,}297x + 2{,}125x^2$.