Diagonalización de endomorfismos

Tema 6

Ultano Kindelán
Marco Antonio Fontelos

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra Lineal

ÍNDICE

6.1 Introducción

- En este tema se intentará encontrar alguna base respecto de la cual la matriz asociada a un endomorfismo tiene una forma particularmente sencilla: la diagonal.
- Se analizarán las condiciones que se tienen que dar para que dicha base exista.
- Una vez diagonalizada su matriz es muy fácil visualizar una aplicación lineal en la base correspondiente como una serie de dilataciones o contracciones a lo largo de las direcciones marcadas por los vectores de la misma.
- Los contenidos de este tema se pueden aplicar en muchos campos como por ejemplo resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias y diferenciales ordinarias, mecánica de medios continuos y algoritmos de búsqueda en internet.

Ejemplo introductorio

Un endomorfismo f tiene, en una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de un espacio vectorial de dimensión 2, la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Se quiere determinar cuál es la matriz de este endomorfismo en la base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, siendo $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se observa que la expresión de f en la base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ es mucho más sencilla que en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Dado un endomorfismo, f, del que se conoce su matriz asociada en una cierta base, cabe, por lo tanto, preguntarse: **¿es siempre posible encontrar un cambio de base de manera que la matriz asociada a f en la nueva base sea diagonal?** Otra forma equivalente de plantear la misma pregunta: dada una matriz cuadrada A, **¿es siempre posible encontrar una matriz diagonal semejante**?

La respuesta a la pregunta anterior es negativa. El objetivo de este capítulo es estudiar las condiciones que debe cumplir una matriz para ser diagonalizable y cómo se pueden diagonalizar aquellas que lo son.

6.2 Definición de valor propio y vector propio de un endomorfismo

Definición 6.1

*Sea $f : V \to V$ un endomorfismo definido sobre el $\mathbf{K}-$espacio vectorial V. Se dice que el escalar $\lambda \in \mathbf{K}$ es un **valor propio** (o autovalor) de f si existe algún vector no nulo de V ($\mathbf{x} \in V$) tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.*

Definición 6.2

*Si λ es un valor propio de un endomorfismo $f : V \to V$, los vectores $\mathbf{x} \in V$ tales que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) se llaman **vectores propios** o autovectores de f asociados a λ.*

Proposición 6.1

Dado el endomorfismo $f : V \to V$, el conjunto de los vectores propios de f asociados al valor propio λ unido con el vector nulo constituye un s.e.v. de V y se representará por V_λ

$$V_\lambda = \{\mathbf{x} \in V \diagup f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}\}\,.$$

V_λ recibe el nombre de **subespacio propio** asociado al valor propio λ.

Proposición 6.2

Dado el endomorfismo $f : V \to V$, el subespacio propio asociado al valor propio λ coincide con el núcleo de la aplicación $f - \lambda I$

$$V_\lambda = \ker(f - \lambda I)$$

Corolario 6.1

$f - \lambda I$ es un endomorfismo no inyectivo, si y solamente si λ es un valor propio de f.

Ejemplo 6.1 (Cálc. de vect. y val. propios de endomorf. en $\boldsymbol{R}^2$)

1. Homotecia de razón k: $h((x_1, x_2)^t) = (kx_1, kx_2)^t$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\forall \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^2$ $h(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$. Todos los vectores de $\boldsymbol{R}^2$ son vectores propios asociados al único valor propio k,

2. Giro de ángulo α:
$g((x_1, x_2)^t) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha, x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha)^t$. $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \pi$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

No existe ningún valor propio perteneciente a $\boldsymbol{R} \Rightarrow$ no existe ningún vector propio perteneciente a $\boldsymbol{R}^2$.

Ejemplo 6.1 (cont.)

3. Simetría con respecto al origen: $s_0((x_1, x_2)^t) = (-x_1, -x_2)^t$

$$\mathbf{y} = s_0(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\forall \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^2\ s_0(\mathbf{x}) = -\,\mathbf{x}$. Todos los vectores de $\boldsymbol{R}^2$ son vectores propios asociados al único valor propio -1.

4. Simetría con respecto a la recta $x_1 = x_2$: $s_r((x_1, x_2)^t) = (x_2, x_1)^t$

$$\mathbf{y} = s_r(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Existen dos subespacios propios: $V_1 = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^2 / \mathbf{x} = (\alpha, \alpha)^t$, $\alpha \in \boldsymbol{R}\}$, subespacio propio asociado al valor propio 1 y $V_{-1} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^2 / \mathbf{x} = (-\alpha, \alpha)^t, \alpha \in \boldsymbol{R}\}$, subespacio propio asociado al valor propio -1.

Ejemplo 6.2

¿Cómo se transforman, según los endomorfismos anteriores, los vectores de los subespacios $W_1 = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^2 \diagup x_1 = x_2\}$ y $W_2 = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^2 \diagup x_1 = 2x_2\}$?

Solución:

1. $h(W_1) = W_1$ y $h(W_2) = W_2$
2. $g(W_1) \neq W_1$ y $g(W_2) \neq W_2$
3. $s_0(W_1) = W_1$ y $s_0(W_2) = W_2$
4. $s_r(W_1) = W_1$ y $s_r(W_2) \neq W_2$

Definición 6.3

*Sea $A \in M_n(\boldsymbol{K})$. Se dice que $\lambda \in \boldsymbol{K}$ es un **valor propio** de A si existe $\mathbf{x} \in \boldsymbol{K}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*

Definición 6.4

*Si λ es un valor propio de $A \in M_n(\boldsymbol{K})$, los vectores $\mathbf{x} \in \boldsymbol{K}^n$ $(\mathbf{x} \neq 0)$ tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ se llaman **vectores propios** de A asociados a λ.*

Definición 6.5

El conjunto formado por todos los vectores propios de $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ asociados a λ unido con el vector nulo forma un s.e.v. de $\boldsymbol{K}^n$ que recibe el nombre de subespacio propio de A asociado a λ.

Proposición 6.3

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo definido sobre el $\boldsymbol{K}$-espacio vectorial V. Si $\dim(V) = n$ y $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ es la matriz asociada a f en una base, $\{\mathbf{e}_i\}$, de V entonces:

1. El escalar $\lambda \in \boldsymbol{K}$ es un valor propio de $f \Leftrightarrow$ El escalar $\lambda \in \boldsymbol{K}$ es un valor propio de A.
2. Si λ es un valor propio de f (o de A) y se denota por $(x_1, \ldots, x_n)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ a las componentes de un vector $\mathbf{v}$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ entonces:
   $\mathbf{v}$ es un vector propio de f asociado a $\lambda \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)^t$ es un vector propio de A asociado a λ.

Observación 6.1

Si λ es un valor propio del endomorfismo f , $\mathbf{v}$ un vector propio de f asociado a λ y $A_1, A_2, \ldots, A_p$ p matrices asociadas a f en p bases distintas ($\{\mathbf{e}_i^1\}$, $\{\mathbf{e}_i^2\}$, ... , $\{\mathbf{e}_i^p\}$), λ es un valor propio de **todas ellas.** Sin embargo, si las componentes de $\mathbf{v}$ en la base $\{\mathbf{e}_i^1\}$ son $(x_1, \ldots, x_n)^t$, el vector de $\boldsymbol{K}^n$ $(x_1, \ldots, x_n)^t$ es un vector propio (asociado a λ) de **la matriz** A_1 pero **no tiene por qué serlo del resto de las matrices.**

Proposición 6.4

Sea $A \in M_n(\boldsymbol{K})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\lambda \in \boldsymbol{K}$ es un valor propio de A.
2. El sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado.
3. $|A - \lambda I| = 0$.

Definición 6.6

Dada una matriz cuadrada, de orden n, se denomina ***polinomio característico*** *de A al polinomio de orden n*

$$p_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix}$$

Definición 6.7

A la ecuación $p_n(\lambda) = 0$ *se la llama* ***ecuación característica*** *de A.*

Observación 6.2

De la última proposición se deduce que los valores propios de una matriz se obtienen hallando las raíces de un polinomio (el polinomio característico) de grado igual a la dimensión de la matriz. El teorema fundamental del álgebra establece que un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces[a] en el cuerpo de los complejos:

$$p_n(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$$

Del teorema fundamental del álgebra se deducen dos propiedades inmediatas

1. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ no puede tener más de n valores propios.
2. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ tiene siempre, por lo menos, un valor propio.

[a] Contando las raíces de multiplicidad mayor que uno tantas veces como se repitan.

Definición 6.8

El número de veces que el factor $(\lambda - r_i)$ *aparece en la factorización de* $p_n(\lambda)$ *recibe el nombre de* ***multiplicidad algebraica*** *de la raíz* r_i *y en lo sucesivo se designará por* m_i*.*

Proposición 6.5

Dadas dos matrices semejantes, sus polinomios característicos coinciden.

Proposición 6.6

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo definido sobre un K-espacio vectorial V de dimensión n. La dimensión del subespacio propio, V_λ, de f asociado a λ es:

$$\dim(V_\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)$$

Definición 6.9

*Se llama **multiplicidad geométrica** del valor propio λ a la dimensión de V_λ. En lo sucesivo la multiplicidad geométrica del valor propio λ_i se designará por s_i.*

6.3 Diagonalización de un endomorfismo

El problema de la diagonalización consiste en dado un endomorfismo $f : V \to V$ definido sobre un e.v., V, de dimensión n, encontrar una base de V tal que la matriz asociada a f en dicha base sea diagonal; o, enunciado en forma equivalente, dada una matriz $A \in M_n(\boldsymbol{K})$, encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

Definición 6.10

*Un endomorfismo $f : V \to V$ se dice que es **diagonalizable** si existe una base de V en la cual la matriz asociada a f es una matriz diagonal.*

Definición 6.11

*Una matriz $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ es **diagonalizable por semejanza** si existe una matriz inversible, P, tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.*

Teorema 6.2

$A \in M_n(\boldsymbol{K})$ es diagonalizable por semejanza Ssi A tiene n vectores propios linealmente independientes.

Observación 6.3

Un enunciado equivalente del teorema anterior sería: un endomorfismo f es diagonalizable Ssi existe una base del espacio vectorial sobre el que está definido f formada por vectores propios.

Proposición 6.7

Los subespacios propios son linealmente independientes ($V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}$ si $i \neq j$).

Proposición 6.8 (equivalente al teorema 6.2)

Sea $f : V \to V$ un endomorfismo definido sobre un $\boldsymbol{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Supóngase que f tiene p valores propios ($p \leq n$) λ_i ($i = 1, \ldots p$), siendo sus multiplicidades algebraicas respectivas m_i ($i = 1, \ldots, p$) y sus multiplicidades geométricas s_i ($i = 1, \ldots, p$). El endomorfismo f es diagonalizable Ssi se verifican las dos propiedades siguientes:

1. $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$ (siempre es cierto si $\boldsymbol{K} = \mathbb{C}$, pero puede no serlo si $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$).
2. $m_i = s_i, \qquad i = 1, \ldots, p.$

Del Teorema anterior se deduce el siguiente procedimiento para diagonalizar un endomorfismo $f : V \to V$

1. Encontrar todos los valores propios del endomorfismo.
2. Hallar las bases y las multiplicidades geométricas de los s.e.v. propios asociados a los valores propios anteriores. Si se verifica la proposición 6.8, f será diagonalizable.
3. Unir las bases obtenidas en la etapa anterior para formar una base de V (siempre es posible si f es diagonalizable).
4. Expresar f en la base formada por los vectores propios. La matriz de f en esta nueva base será una matriz diagonal cuya diagonal estará formada por los valores propios de f.

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} ; \qquad P = (\underbrace{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n}_{\text{v. prop. L.I.}})$$

6.4 Propiedades de los valores propios

Proposición 6.9

Sea $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ una matriz cuyos valores propios son los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{K}$. Se verifica:

1. Los valores propios de A^t coinciden con los de A.
2. $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
3. Los valores propios de la matriz αA son $\alpha \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $(\alpha \in \boldsymbol{K})$.
4. Si A es no singular, entonces los valores propios de A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
5. $\forall k \in \boldsymbol{N}$, los autovalores de A^k son λ_i^k, $i = 1, \ldots, n$.

6.5 Diagonalización ortogonal

Se considera a continuación el caso particular de **endomorfismos simétricos**.

Definición 6.12

Un endomorfismo $f : V \to V$ definido sobre el espacio ***euclídeo*** *V es* ***simétrico*** *si*

$$\mathbf{x} \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Si A es la matriz asociada a f en una base **ortonormal** de V, entonces f es simétrico si y solo si A es simétrica.

Observación 6.4

Al estar definido f sobre un espacio euclídeo, su matriz asociada en cualquier base tendrá coeficientes reales.

Valores y vectores propios de un endomorfismo simétrico

Sea V un espacio euclídeo de dimensión n, $f : V \to V$ un endomorfismo simétrico y A la matriz (real y simétrica) asociada a f en una base ortonormal. Se verifica

- Si λ y μ son valores propios distintos de f, entonces los correspondientes subespacios propios V_λ y V_μ **son ortogonales.**
- Todos los valores propios de f son reales y f **es diagonalizable** (A es **diagonalizable por semejanza**).

Teorema 6.3 (Teorema espectral)

Si f es un endomorfismo simétrico definido sobre un espacio euclídeo V, existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de f.

Observación 6.5

El procedimiento mediante el cual se obtiene una base ortonormal de V formada por vectores propios de f se denomina **diagonalización ortogonal** de f.

Corolario 6.4

Cualquier endomorfismo simétrico definido sobre un espacio euclídeo es diagonalizable ortogonalmente.

Corolario 6.5

Cualquier matriz real y simétrica A es ortogonalmente diagonalizable: existe alguna matriz P ortogonal ($P^t = P^{-1}$) tal que

$$D = P^{-1}AP$$

es una matriz diagonal cuya diagonal está formada por los valores propios de A (repitiendo cada uno tantas veces como indique su multiplicidad algebraica).

Observación 6.6

- $P^t = P^{-1}$ implica que las matrices A y D son **semejantes** y **congruentes** ($D = P^t AP$).
- Las columnas de la matriz P son vectores propios de la matriz A que constituyen una base ortonormal de V, base que se ha obtenido uniendo bases ortonormales de los subespacios propios de f.

Ejercicios

1. Calcular los autovalores (valores propios) y subespacios propios de las matrices A y B. ¿Son diagonalizables por semejanza?
   1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Solución:
   1. $\lambda_1 = 1$ (simple, $m_1 = 1$); $\lambda_2 = 2$ (doble, $m_2 = 2$).
   $V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \;/\; \mathbf{x} = (\alpha, 0, \alpha)^t, \;\; \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$,
   $V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \;/\; \mathbf{x} = (2\alpha, \alpha, \alpha)^t, \;\; \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$.
   La matriz A no es diagonalizable por semejanza.

2. $\lambda_1 = 1$ (simple, $m_1 = 1$); $\lambda_2 = 3$ (doble, $m_2 = 2$).
   $V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \;/\; \mathbf{x} = (\alpha, 0, \alpha)^t, \;\; \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$,
   $V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \;/\; \mathbf{x} = (2\alpha, \beta, \alpha)^t, \;\; \alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \right\}$.
   La matriz B sí es diagonalizable por semejanza.

2. Hallar los valores propios y los subespacios propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A \in M_{3,3}(\mathbb{C})$$

Indicar si A es diagonalizable por semejanza. En caso de serlo hallar la matriz diagonal semejante a A.

Solución:

Autovalores: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Base de $V_{-1} = \left\{(0, 1, -1)^t\right\}$, Base de $V_i = \left\{(1 + i, 1, 1)^t\right\}$, Base de $V_{-i} = \left\{(1 - i, 1, 1)^t\right\}$. La matriz es diagonalizable por semejanza. La matriz diagonal semejante es:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

3. Dada una matriz $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ inversible, se dice que A es una matriz ortogonal si $A^t = A^{-1}$. Demostrar que si λ es un autovalor de una matriz ortogonal entonces también lo es $\frac{1}{\lambda}$.
4. Considérese la siguiente matriz cuadrada y simétrica :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

   Se pide:

   1. demostrar que los valores propios de A son siempre reales si a, b y d son reales,
   2. demostrar que la matriz A es diagonalizable por semejanza para cualesquiera a, b y d (reales).

5. Considérese la siguiente matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; a, b \in \boldsymbol{R} \; b \neq 0$$

   Se pide demostrar que la matriz A no tiene valores propios reales.

6. Un endomorfismo idempotente es aquél que verifica: $f \circ f = f$ (una matriz idempotente es una matriz cuadrada que verifica: $AA = A^2 = A$). Hallar los posibles valores propios de un endomorfismo idempotente.
   Solución: los únicos valores propios posibles son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

7. Dos empresas fabricantes de automóviles (A y B) controlan el mercado de un país repartiéndoselo al 60 % y 40 % respectivamente. Este año en el mercado se mueven treinta mil millones de euros. Si los compradores de la marca A son cada año fieles en un 30 % y se cambian cada año a la otra marca un 70 % y en el caso de la marca B, son fieles el 40 % y optan por la otra marca un 60 %. ¿Cómo se repartirán el mercado al cabo de 10 años, suponiendo que la fidelidad a ambas marcas permanece constante? Si se quiere estudiar el reparto del mercado en años sucesivos se observa que la variación es muy pequeña, prácticamente despreciable (el reparto del mercado permanece cuasi-constante al cabo de un cierto número de años). ¿Cómo se justificaría este comportamiento desde el punto de vista de la diagonalización de endomorfismos?

   Solución:

   - Ventas de la marca A al cabo de 10 años: 13.846.178.374€.
   - Ventas de la marca B al cabo de 10 años: 16.153.821.625€.

- Límite al que tienden las ventas de la marca A: 13.846.153.846€.
- Límite al que tienden las ventas de la marca B: 16.153.846.153€.
- Pista: expresar el vector de repartición inicial ($(0{,}6, 0{,}4)^t$) en función de una base de vectores propios del endomorfismo que transforma el reparto del mercado de un año dado al del año siguiente.

8. Sea $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ un endomorfismo y A su matriz asociada en cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$. Se sabe que una base del núcleo del endomorfismo cuya matriz asociada es $A - I$ esta constituida por los vectores $(1, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(1, 0, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y que en el endomorfismo dado por A la imagen del vector $(0, 2, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ es el vector $(1, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$. Se pide:
    1. valores propios y subespacios propios de f,
    2. si f es diagonalizable, determinar una base respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal, determinar también la expresión del endomorfismo diagonalizado,
    3. clasificar el endomorfismo,

4. obtener los subespacios propios de A^n,
5. determinar la matriz del endomorfismo en la base original (la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

Nota: se supondrá que todos los vectores que aparecen en el enunciado están expresados en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

1. Valores propios: $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 0$.
$$V_1 = \left\{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\right\},$$
$$V_0 = \left\{(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3 \ \Big/ \ \begin{array}{c} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}\right\}$$
2. f es diagonalizable. $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, expresión de f en la base $\left\{(1,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (1,-1,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\right\}$, base formada por vectores propios.

3. El endomorfismo no es inyectivo y en consecuencia tampoco es sobreyectivo.
4. Los subespacios propios de A^n son los mismos que los de A.
5. $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$