

Ejercicios de Sistemas Lineales y Matrices

Tema 1

Ultano Kindelán

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra

1 Indique si son linealmente independientes los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine si el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. En caso de que la respuesta fuera afirmativa, calcule los coeficientes de la combinación lineal indicando si son únicos.

3 Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine si el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. En caso de que la respuesta fuera afirmativa, calcule los coeficientes de la combinación lineal indicando si son únicos.

4 Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

determine si el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$. En caso de que la respuesta fuera afirmativa, calcule los coeficientes de la combinación lineal indicando si son únicos.

5 Dados los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

determine el rango del conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$.

- 6 Discuta, en función de los parámetros α y β , la existencia y unicidad de soluciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}.$$

- 7 Determine el rango de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 8 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbf{R}$, halle A^n ($n \in \mathbf{N}$).

- 9 Explique en qué consiste la técnica del pivote parcial aplicada al método de Gauss para resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n ecuaciones y n incógnitas e indique cuál es su objetivo.

- 10 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

- 1 halle las matrices F , L y U de la factorización $FA = LU$ con pivote parcial.
- 2 Determine las tres matrices de pivoteo, P^1 , P^2 y P^3 , que se utilizan en la factorización. ¿Qué relación hay entre L y estas tres matrices?
- 11 Determine el número de operaciones de coma flotante (FLOPs) que se necesitan para realizar las siguientes operaciones en una matriz A , cuadrada e inversible, de dimensión 100:

- ① Reemplazar la fila 7 por ella misma más la fila 1 multiplicada por un escalar.
- ② Suponiendo que se estuviera realizando la triangularización gaussiana de la matriz A y se hubiera completado la etapa $k = 6$ (se habrían obtenido ceros por debajo de los pivotes $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$ y $(6,6)$), ¿cuántas FLOPs se necesitan para completar la etapa 7?
- ③ Suponiendo que A fuera la matriz de coeficientes del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y se utilizara el método de Gauss para resolverlo, ¿cuántas FLOPs habría que realizar para despejar la incógnita x_{58} en el proceso de remonte.