Ejercicios de Espacios Vectoriales

Tema 3

Ultano Kindelán

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra

1. Demuestre que el conjunto de las matrices simétricas de coeficientes reales de orden n ($S_n(\mathbb{R})$) es un s.e.v. del espacio vectorial de las matrices cuadradas de coeficientes reales de orden n ($M_n(\mathbb{R})$).
2. Siendo $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -3)^t$, $\mathbf{v}_3 = (3, 1, -7)^t$ y $\mathbf{v}_4 = (5, 2, -11)^t$; determine si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.
3. Determine las coordenadas del vector $(1, 3, 6)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{u}_i\}$ está formada por los vectores $(1, 2, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $(-1, 0, 2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(2, 1, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
4. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que dos se considera la base

   $$B = \{p_1(t) = 1 + t, p_2(t) = t + t^2, p_3(t) = 1 + 2t + 2t^2\}.$$

   ¿Cuáles son las coordenadas del polinomio $p(t) = (1, 1, -1)^t_B$ en la base $\{1, t, t^2\}$?

5. Dadas tres bases de un espacio vectorial V de dimensión n: $B_1 = \{\mathbf{e}_i\}$, $B_2 = \{\mathbf{u}_i\}$ y $B_3 = \{\mathbf{w}_i\}$, exprese las coordenadas de un vector cualquiera de V en la base B_3 en función de sus coordenadas en la base B_1, si se conoce que la relación entre las bases B_1 y B_2 es:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{e}_j$$

y la relación entre las bases B_2 y B_3 es

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\mathbf{w}_j.$$

6. Dado un espacio vectorial V de dimensión cuatro y un s.e.v de V, W, de dimensión 3, del que se conoce una base:

$$B = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

determine unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de W.

7. Dados los s.e.v de $\boldsymbol{R}^3$:

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \; x_1 - x_2 = 0 \right\} \text{ y } W_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3 \; x_3 = 0 \right\},$$

Halle:

1. Unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de $W_1 + W_2$.
2. Unas ecuaciones implícitas de $W_1 \cap W_2$.

8. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \left\langle (1,0,0,0,0)^t, (1,1,0,0,0)^t, (0,1,0,1,0)^t, (2,3,0,1,0)^t \right\rangle, \\
U_2 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_5 = 0\},
\end{aligned}
$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^5$, halle unas ecuaciones implícitas de

1. $U_1 + U_2$,
2. $U_1 \cap U_2$.