Ejercicios de Aplicaciones Lineales

Tema 4

Ultano Kindelán

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra

1. Si las soluciones de los sistemas

$$\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 7 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

son, respectivamente, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ y $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, obtenga la solución del sistema

$$\begin{array}{rcr} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 17 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

utilizando el principio de superposición.

2. Dadas las aplicaciones lineales

$$
\begin{array}{rccc}
f: & V & \to & W \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B & \to & f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}_{B'}
\end{array}
$$

y

$$
\begin{array}{rccc}
g: & W & \to & U \\
& \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_{B'} & \to & g(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 2y_1 - 2y_2 \\ 2y_3 + 4y_4 \end{pmatrix}_{B''},
\end{array}
$$

obtenga la matriz de la aplicación lineal $g \circ f : V \to U$ asociada a las bases B y B''.

3. Estudiar si la aplicación lineal

$$f : V \to W \quad \text{tal que} \quad f(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, y_3)^t = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1)^t,$$

donde $(y_1, y_2, y_3)^t$ son las coordenadas de $f(\mathbf{x})$ en una cierta base de W y $(x_1, x_2)^t$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en una cierta base de V, es biyectiva, inyectiva pero no biyectiva, sobreyectiva pero no biyectiva o ninguna de las tres cosas.

4. Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} f: & V & \to & W \\ & \mathbf{x} & \to & (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_1)^t \end{array}$$

referida a las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W. Dado el vector $\mathbf{z} = \mathbf{e}'_1 + 3\mathbf{e}'_2$, determine la expresión de $f(\mathbf{z})$ en la base B^*, sabiendo que la relación entre las bases $\overline{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ y B es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{array} \right. .$$