Ejercicios de Espacio Euclídeo

Tema 5

Ultano Kindelán

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra

1. Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 5x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 6x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3x_2y_3$$
$$-3x_3y_2 + 2x_3y_3,$$

en donde las coordenadas de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están expresadas en en cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ de E, determine la expresión de $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ en la base

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{array}\right. .$$

2. Dado el espacio euclídeo E, en el que la matriz de Gram del producto escalar, referida a un cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   halle

   1. el ángulo que forman los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$,
   2. el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 0)^t_B$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 1)^t_B$.

3. Dados el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial R^3 y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 \ _{\{\mathbf{e}_i\}}$$

   y los vectores $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $\mathbf{b} = (1, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ pertenecientes a E, calcule

   1. $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$,
   2. ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$,

3. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

4. Dados el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial R^3 y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 \ _{\{\mathbf{e}_i\}},$$

los subespacios

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in E \Big/ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \text{ y } V = \left\{ \mathbf{x} \in E \Big/ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

y el vector $\mathbf{a} = (1, 2, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ perteneciente a E, determine

1. si $\mathbf{a}$ es ortogonal a W,
2. si los subespacios W y V son ortogonales,
3. una base de $W^{\perp}$.

5. En R^4 se considera el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \ _{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

1. Halle la proyección ortogonal del vector $\mathbf{u} = (4, -1, 0, -2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ donde $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
2. Obtenga una base del subespacio ortogonal a V, $V^\perp$, así como la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $V^\perp$.