Ejercicios de Diagonalización de endomorfismos

Tema 6

Ultano Kindelán

Titulaciones de grado. ETSIME(UPM)

Álgebra

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que, respecto a una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$, está definido por las relaciones:

$$f(\mathbf{e}_1) = 9\mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = 9\mathbf{e}_1, \quad f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_3.$$

   Compruebe si f es diagonalizable. En el caso de que lo sea, determine su expresión diagonal, indicando cuál es la nueva base en la cual el endomorfismo tiene una expresión diagonal.

2. Dado el endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B & \to & f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + ix_2 \\ ix_1 + 2x_2 \end{pmatrix}_B \end{array},$$

   estudie si f es diagonalizable o no y en el caso de que lo sea determine sus valores y subespacios propios y la expresión del endomorfismo diagonalizado.

3. Dado el endomorfismo

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 & \rightarrow & \mathbb{C}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B & \rightarrow & f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 \\ ax_2 \\ ax_3 + x_4 \\ -x_3 - ax_4 \end{pmatrix}_B \end{array},$$

en donde $a \in R$, estudie en función de a si f es diagonalizable o no y en el caso de que lo sea determine sus valores y subespacios propios y la expresión del endomorfismo diagonalizado.

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & \delta & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

1. determine los valores de α, β, γ y δ para que A y A' sean semejantes,
2. con los valores de α, β, γ y δ obtenidos en el apartado anterior, halle una matriz regular (inversible) P de dimensión tres tal que $PA' = AP$.

5. Diagonalice ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

sabiendo que $\lambda_1 = -2$ es un valor propio de A. Debe obtener la matriz diagonal semejante a A, D, y la matriz ortogonal de cambio de base utilizada, P ($D = P^{-1}AP$ y $P^t = P^{-1}$).

6. Diagonalice ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

sabiendo que $\lambda_1 = 6$ es un valor propio de A. Debe obtener la matriz diagonal semejante a A, D, y la matriz ortogonal de cambio de base utilizada, P ($D = P^{-1}AP$ y $P^t = P^{-1}$).

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

calcule A^{13}. Sugerencia: diagonalice A por semejanza.