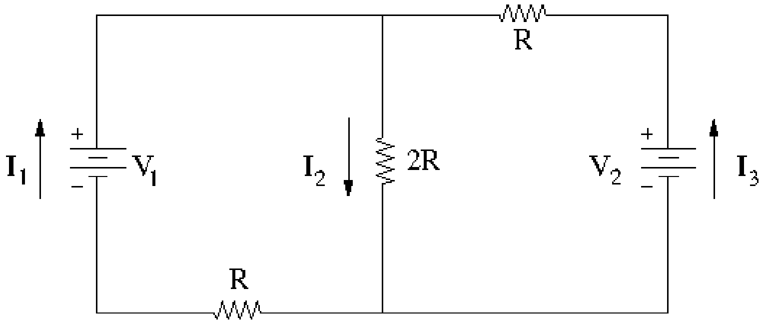
Pregunta 1

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el circuito eléctrico de la figura, obtenga las intensidades en las distintas ramas del circuito en función de R $(R \neq 0)$, V_1 y V_2.



Observaciones:

1. Se recuerdan las dos leyes de Kirchhoff, necesarias para resolver el circuito:
   - La suma de caídas de potencial en un lazo cerrado del circuito es nula.
   - La suma de corrientes que llegan a un nodo es igual a la suma de las que salen del nodo.

2. También se recuerda que la caída de tensión en una resistencia de R ohmios situada en una rama con intensidad de I amperios es de RI voltios (en el sentido de circulación de la corriente) y en un generador la caída se produce del polo positivo al negativo.

- a. $I_1 = \frac{2V_1-3V_2}{5R}$, $I_2 = \frac{V_1-V_2}{5R}$, $I_3 = \frac{3V_2-4V_1}{5R}$.
- b. $I_1 = \frac{4V_1+3V_2}{5R}$, $I_2 = \frac{V_1-V_2}{5R}$, $I_3 = \frac{V_2+2V_1}{5R}$.
- c. $I_1 = \frac{3V_1-2V_2}{2R}$, $I_2 = \frac{2V_1+V_2}{2R}$, $I_3 = \frac{5V_2+2V_1}{2R}$.
- d. $I_1 = \frac{3V_1-2V_2}{5R}$, $I_2 = \frac{V_1+V_2}{5R}$, $I_3 = \frac{3V_2-2V_1}{5R}$. ✔

Explicación: Aplicando las dos leyes de Kirchhoff al circuito de la figura se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} I_1 - I_2 + I_3 & = & 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 & = & 0 \\ RI_1 + 2RI_2 & = & V_1 \\ 2RI_2 + RI_3 & = & V_2 \end{array}\right\}.$$

La segunda ecuación es igual a la primera por lo que se puede eliminar, quedando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ R & 2R & 0 & V_1 \\ 0 & 2R & R & V_2 \end{pmatrix},$$

matriz que es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3R & -R & V_1 \\ 0 & 0 & (5/3)R & V_2-(2/3)V_1 \end{pmatrix}.$$

A partir de la matriz escalonada anterior es fácil comprobar que el rango de la matriz de coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada e igual a tres por lo que el sistema es compatible determinado. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$I_1 = \frac{3V_1-2V_2}{5R}, \qquad I_2 = \frac{V_1+V_2}{5R}, \qquad I_3 = \frac{3V_2-2V_1}{5R}.$$

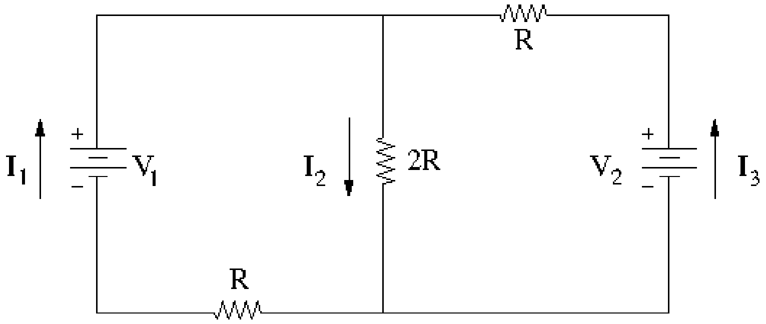
La respuesta correcta es: $I_1 = \frac{3V_1-2V_2}{5R}$, $I_2 = \frac{V_1+V_2}{5R}$, $I_3 = \frac{3V_2-2V_1}{5R}$.

Pregunta 2

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el circuito eléctrico de la figura, obtenga las intensidades en las distintas ramas del circuito si $R = 5\Omega$, $V_1 = 5$V y $V_2 = 10$ V.



Observaciones:

1. Se recuerdan las dos leyes de Kirchhoff, necesarias para resolver el circuito:
   - La suma de caídas de potencial en un lazo cerrado del circuito es nula.
   - La suma de corrientes que llegan a un nodo es igual a la suma de las que salen del nodo.

2. También se recuerda que la caída de tensión en una resistencia de R ohmios situada en una rama con intensidad de I amperios es de RI voltios (en el sentido de circulación de la corriente) y en un generador la caída se produce del polo positivo al negativo.

- a. $I_1 = -\frac{1}{5}\text{A},\ I_2 = \frac{3}{5}\text{A},\ I_3 = \frac{4}{5}\text{A}.$ ✔
- b. $I_1 = -\frac{2}{5}\text{A},\ I_2 = \frac{6}{5}\text{A},\ I_3 = \frac{1}{5}\text{A}.$
- c. $I_1 = -\frac{1}{5}\text{A},\ I_2 = \frac{2}{5}\text{A},\ I_3 = \frac{8}{5}\text{A}.$
- d. $I_1 = -\frac{1}{6}\text{A},\ I_2 = \frac{4}{5}\text{A},\ I_3 = \frac{1}{5}\text{A}.$

Explicación: Aplicando las dos leyes de Kirchhoff al circuito de la figura se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} I_1 - I_2 + I_3 & = & 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 & = & 0 \\ RI_1 + 2RI_2 & = & V_1 \\ 2RI_2 + RI_3 & = & V_2 \end{array}\right\}.$$

La segunda ecuación es igual a la primera por lo que se puede eliminar, quedando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ R & 2R & 0 & V_1 \\ 0 & 2R & R & V_2 \end{pmatrix},$$

matriz que es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3R & -R & V_1 \\ 0 & 0 & (5/3)R & V_2 - (2/3)V_1 \end{pmatrix}.$$

A partir de la matriz escalonada anterior es fácil comprobar que el rango de la matriz de coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada e igual a tres por lo que el sistema es compatible determinado. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$I_1 = \frac{3V_1 - 2V_2}{5R}, \qquad I_2 = \frac{V_1 + V_2}{5R}, \qquad I_3 = \frac{3V_2 - 2V_1}{5R}.$$

Si en la solución anterior se hace $R = 5\Omega$, $V_1 = 5$V y $V_2 = 10$V, se obtiene:

$$I_1 = -\tfrac{1}{5}\mathrm{A}, \qquad I_2 = \tfrac{3}{5}\mathrm{A}, \qquad I_3 = \tfrac{4}{5}\mathrm{A}.$$

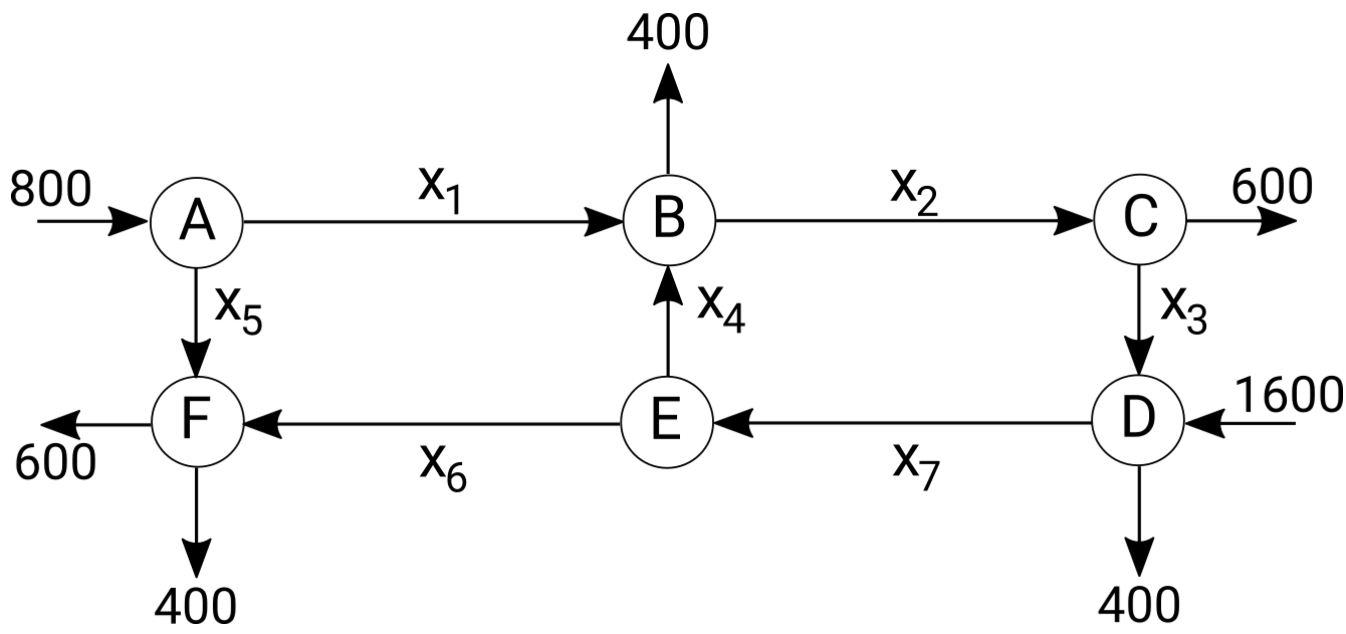
La respuesta correcta es: $I_1 = -\frac{1}{5}\mathrm{A},\ I_2 = \frac{3}{5}\mathrm{A},\ I_3 = \frac{4}{5}\mathrm{A}.$

Pregunta 3

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

En la red de tráfico del dibujo (con calles de sentido único), el flujo está dado en número de vehículos por hora (valor medio en horas punta). Por ejemplo en el nodo B entran $x_1 + x_4$ vehículos por hora y salen $x_2 + 400$ vehículos por hora. Plantee el sistema de ecuaciones lineales que representa el flujo medio de vehículos en la red en horas punta.



- a. $x_1 + x_5 = 800, \quad x_1 - x_2 - x_4 = 400, \quad x_2 + x_3 = 600, \quad x_3 + x_7 = -1200, \quad x_4 + x_6 + x_7 = 0, \quad x_5 + x$
- b. $x_1 - x_5 = 800, \quad x_1 + x_2 - x_4 = 400, \quad x_2 + x_3 = 600, \quad x_3 - x_7 = 2000, \quad x_4 + x_6 - x_7 = 0, \quad x_5 + x_6$
- c. $x_1 + x_5 = 800, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 400, \quad -x_2 + x_3 = 600, \quad x_3 + x_7 = 1200, \quad x_4 + x_6 + x_7 = 0, \quad x_5 + x$
- d. $x_1 + x_5 = 800, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 400, \quad x_2 - x_3 = 600, \quad x_3 - x_7 = -1200, \quad x_4 + x_6 - x_7 = 0, \quad x_5 + x$

Explicación: Imponiendo en los seis nudos de la red que el flujo de tráfico se conserva: el flujo que entra es igual al que sale (no desaparecen coches) se obtiene el sistema lineal de seis ecuaciones y siete incógnitas pedido:

$x_1 + x_5 = 800,\ x_1 - x_2 + x_4 = 400,\ x_2 - x_3 = 600,\ x_3 - x_7 = -1200,\ x_4 + x_6 - x_7 = 0,\ x_5 + x_6 = 1000.$

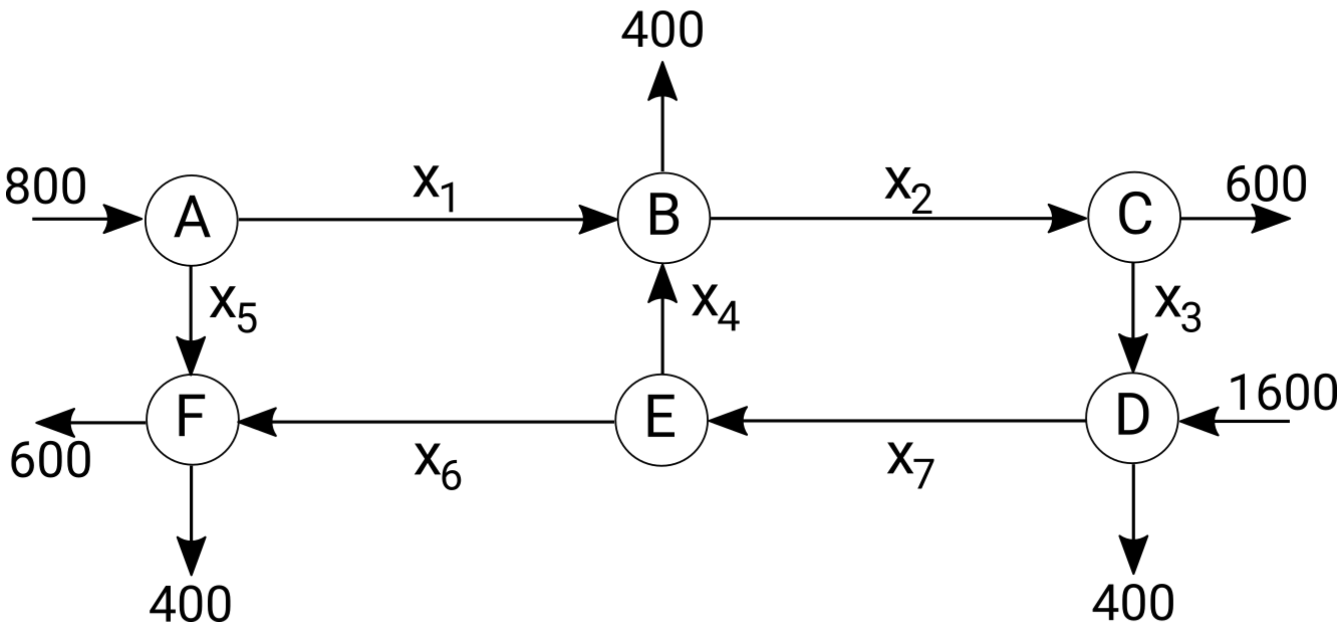
La respuesta correcta es:
$x_1 + x_5 = 800, \quad x_1 - x_2 + x_4 = 400, \quad x_2 - x_3 = 600, \quad x_3 - x_7 = -1200, \quad x_4 + x_6 - x_7 = 0, \quad x_5 + x_6 = 1000$

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

En la red de tráfico del dibujo (con calles de sentido único), el flujo está dado en número de vehículos por hora (valor medio en horas punta). Por ejemplo en el nodo B entran $x_1 + x_4$ vehículos por hora y salen $x_2 + 400$ vehículos por hora. Determine el flujo medio de vehículos en cada una de las calles de la red en horas punta.



- a. $x_1 = 200 - \alpha, \quad x_2 = \beta - 1200, \quad x_3 = \alpha - 1200, \quad x_4 = -\beta + \alpha, \quad x_5 = 1000 - \alpha, \quad x_6 = \alpha, \quad x_7 = \beta$
- b. $x_1 = \alpha - 200, \quad x_2 = \beta - 600, \quad x_3 = \beta - 1200, \quad x_4 = \alpha + \beta, \quad x_5 = 1000 - \alpha, \quad x_6 = \beta, \quad x_7 = \alpha$
- c. $x_1 = \alpha - 200, \quad x_2 = \beta - 600, \quad x_3 = \beta - 1200, \quad x_4 = \beta - \alpha, \quad x_5 = 1000 - \alpha, \quad x_6 = \alpha, \quad x_7 = \beta$ ✔
- d. $x_1 = 200, \quad x_2 = -600, \quad x_3 = -1200, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1000, \quad x_6 = 1000, \quad x_7 = 800$

Explicación: Imponiendo en los seis nudos de la red que el flujo de tráfico se conserva: el flujo que entra es igual al que sale (no desaparecen coches) se obtiene el sistema lineal de seis ecuaciones y siete incógnitas que representa el flujo en cada una de las siete ramas:

$$x_1 + x_5 = 800,\ x_1 - x_2 + x_4 = 400,\ x_2 - x_3 = 600,\ x_3 - x_7 = -1200,\ x_4 + x_6 - x_7 = 0,\ x_5 + x_6 = 1000.$$

El sistema es compatible indeterminado y, al resolverlo, se obtiene

$$x_1 = \alpha - 200, \quad x_2 = \beta - 600, \quad x_3 = \beta - 1200, \quad x_4 = \beta - \alpha, \quad x_5 = 1000 - \alpha, \quad x_6 = \alpha, \quad x_7 = \beta$$

La respuesta correcta es:
$x_1 = \alpha - 200, \quad x_2 = \beta - 600, \quad x_3 = \beta - 1200, \quad x_4 = \beta - \alpha, \quad x_5 = 1000 - \alpha, \quad x_6 = \alpha, \quad x_7 = \beta$

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Un parque de atracciones cobra $70€$ a los adultos, $20€$ a los jóvenes, y $5€$ a los niños. Si entran 150 personas y pagan un total de $1000€$, determine el número de adultos, jóvenes y niños que acceden al parque. **Nota**: para resolver el ejercicio se deberá tener en cuenta que la solución está formada por números enteros no negativos.

- a. 2 adultos, 8 jóvenes y 140 niños. ✔
- b. 4 adultos, 10 jóvenes y 136 niños.
- c. 4 adultos, 6 jóvenes y 140 niños.
- d. 2 adultos, 12 jóvenes y 136 niños.

Explicación: Llamando x al número de adultos, y al número de jóvenes y z al de niños; se tiene:

$$\text{Número total de personas} = \quad x+y+z=150$$

$$\text{Coste total de las entradas} = \quad 70x+20y+5z=1000$$

y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema será:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 150 \\ 70x+20y+5z & = & 1000 \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 70 & 20 & 5 & 1000 \end{pmatrix}$$

realizando operaciones elementales en sus filas se obtiene la siguiente matriz escalonada equivalente a la anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -50 & -65 & -9500 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que el rango de la matriz ampliada es 2 y el rango de la matriz de coeficientes es 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado por ser 3 el número de incógnitas. Por consiguiente el sistema tiene infinitas soluciones reales:

$$x = -40 + \tfrac{3}{10}z$$

$$y = 190 - \tfrac{13}{10}z$$

Sin embargo no todas las soluciones anteriores son válidas: tal como se dice en la nota del enunciado únicamente son aceptables las soluciones enteras no negativas. Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow z \geq \frac{400}{3} \\ \\ y \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{1900}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \tfrac{400}{3} \leq z \leq \tfrac{1900}{13}.$$

En el intervalo $[\frac{400}{3}, \frac{1900}{13}]$ solamente hay trece números enteros: los que van del 134 al 146. Pero de estos trece enteros solamente hay uno que consigue que x e y sean también enteros: $z = 140$ (para que x e y sean enteros es necesario y suficiente que z sea múltiplo de 10). Por lo tanto el problema tiene una única solución: en el parque de atracciones entran **2** adultos, **8** jóvenes y **140** niños.

La respuesta correcta es: 2 adultos, 8 jóvenes y 140 niños.

Pregunta **6**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el sistema lineal de ecuaciones

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

en donde A es una matriz de m filas y n columnas de rango r, se pide determinar cuál de las siguientes relaciones entre m, n y r es correcta si se supone que existen valores de $\mathbf{b}$ para los que el sistema no tiene solución.

- a. $r = m < n$.
- b. $r = n \leq m$.
- c. $r < m$ y $r \leq n$. ✔
- d. $r = n = m$.

Explicación: Siempre se verifica $r \leq n$ y $r \leq m$. Si para un cierto $\mathbf{b}$ el sistema es incompatible el rango de la matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$ será mayor que el rango de A y entonces

$$r < \operatorname{rg}\left((A|\mathbf{b})\right) \leq m,$$

puesto que el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que el número de filas de A. Se concluye por tanto que $r < m$. Por otro lado siempre será $r \leq n$: si $r = n$ será compatible determinado o incompatible dependiendo de $\mathbf{b}$ y si $r < n$ será compatible indeterminado o incompatible dependiendo de $\mathbf{b}$.

La respuesta correcta es: $r < m$ y $r \leq n$.

Pregunta **7**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+by+z=c \\ x+ay+bz=0 \\ ax+by+az=c \end{cases},$$

discuta la existencia y unicidad de soluciones del sistema en función de los valores de a, b y c $(a,b,c\in\mathbb{R})$.

a.

$$\begin{array}{l} a=1\begin{cases} b=1\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b\neq 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad } \forall c\in\mathbb{R} \\ \end{cases} \\ a\neq 1: \text{ compatible determinado } \forall b,c\in\mathbb{R} \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{l} b=1\begin{cases} a=1\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ a\neq 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad } \forall c\in\mathbb{R} \\ \end{cases} \\ b\neq 1\begin{cases} a=b^2\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ a\neq b^2: \text{ compatible determinado } \forall c\in\mathbb{R} \end{cases} \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{l} a\neq 1\begin{cases} b=1\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b\neq 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad } \forall c\in\mathbb{R} \\ \end{cases} \\ a=1\begin{cases} b\neq a^2\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b=a^2: \text{ compatible determinado } \forall c\in\mathbb{R} \end{cases} \end{array}$$

d. ✔

$$\begin{array}{l} a=1\begin{cases} b=1\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b\neq 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad } \forall c\in\mathbb{R} \end{cases} \\ a\neq 1\begin{cases} b=a^2\begin{cases} c=0: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c\neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b\neq a^2: \text{ compatible determinado } \forall c\in\mathbb{R} \end{cases} \end{array}$$

Explicación: Para estudiar la existencia y unicidad de soluciones se obtiene la forma escalonada de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes del sistema:

$$A_b=\begin{pmatrix} a & b & 1 & c \\ 1 & a & b & 0 \\ a & b & a & c \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & b-a^2 & 1-ab & c \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b-a^2 & 1-ab \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce lo siguiente:

1. $a = 1$.
    1. $a = 1$ y $b = 1$
        1. $a = 1, b = 1$ y $c = 0$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_b) = 1 < 3$, sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.
        2. $a = 1, b = 1$ y $c \neq 0$: $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A_b) = 2$, sistema incompatible.
    2. $a = 1, b \neq 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_b) = 2 < 3$, sistema compatible indeterminado con un grado de libertad para cualquier valor de c.
2. $a \neq 1$
    1. $a \neq 1$ y $b = a^2$
        1. $a \neq 1, b = a^2$ y $c \neq 0$: $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A_b) = 3$, sistema incompatible.
        2. $a \neq 1, b = a^2$ y $c = 0$: $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A_b) < 3$, sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.
    2. $a \neq 1$ y $b \neq a^2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_b) = 3$, sistema compatible determinado para cualquier valor de c.

La respuesta correcta es:

$$a = 1 \begin{cases} b = 1 \begin{cases} c = 0: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c \neq 0: \text{ incompatible} \end{cases} \\ b \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$a \neq 1 \begin{cases} b = a^2 \begin{cases} c = 0: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c \neq 0: \text{ incompatible} \end{cases} \\ b \neq a^2: \text{ compatible determinado } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pregunta **8**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el sistema lineal de ecuaciones

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

en donde A es una matriz de m filas y n columnas de rango r, se pide determinar la relación entre m, n y r si el sistema tiene una única solución para todo $\mathbf{b}$.

- a. $r < m$ y $r \leq n$.
- b. $r = m < n$.
- c. $r = n = m$. ✔
- d. $r = n < m$.

Explicación: Si el sistema tiene una única solución para todo $\mathbf{b}$, el sistema es compatible determinado para todo $\mathbf{b}$ y, en consecuencia, el rango de A coincide con el número de sus columnas y con el número de sus filas: $\boxed{r = n = m}$. Esto es debido a que

1. Siempre se verifica $r \leq m$
2. $r = n$ para que el sistema tenga solución única.
3. $r = n \geq m$ para asegurar que el sistema sea compatible para **cualquier** vector de m componentes que aparezca en el término independiente: si $m > n$ al escalonar el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la ecuación $r + 1$ quedaría de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots 0x_n = f(b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

y todos los vectores $\mathbf{b}$ que no verificaran $f(b_1, b_2, \cdots, b_m) = 0$ harían incompatible el sistema.

La respuesta correcta es: $r = n = m$.

Pregunta 9

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea M una matriz cuadrada de dimensión 4 tal que los elementos de su diagonal son todos nulos y el resto son unos:

$$M = (m_{i,j})_{4\times 4} \text{ con } m_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Indique cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**.

- a. $M^2 - 2M - 3I_4 = 0$.
- b. $M + I_4$ no es inversible.
- c. M es inversible.
- d. $M - 3I_4$ es inversible. ✔

Explicación:

1.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$2M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

con lo que:

$$2M + 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = M^2,$$

como se quería demostrar.

2.

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ rango de } M = 4,$$

y por lo tanto la matriz es inversible.

3. $M + I$ es una matriz cuyos elementos son todos unos. En consecuencia su rango es uno y por lo tanto no es inversible.

4. Finalmente

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

siendo fácil comprobar que la cuarta fila de $M - 3I$ es igual a la suma cambiada de signo de las tres primeras, por lo tanto $\text{rg}\,(M - 3I) \leq 3 < 4$ con lo queda demostrado que no es inversible.

La respuesta correcta es: $M - 3I_4$ es inversible.

Pregunta 10

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, entonces

- a. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- b. $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- c. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. ✔
- d. $(AB)^t = A^t B^t$.

Explicación: Al ser el producto de matrices no conmutativo la única la respuesta correcta es

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

La respuesta correcta es: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Pregunta 11

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

determine la factorización LU sin pivote parcial de A.

a. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

b. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ ✔

c. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

d. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Explicación:

1. Primera etapa de la triangularización gaussiana con $m_{21} = -2$ y $m_{31} = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Segunda etapa de la triangularización gaussiana con $m_{32} = -4$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

La respuesta correcta es: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Pregunta **12**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

determine la factorización LU con pivote parcial de A.

a. $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5/2 & 1 \\ -9/4 & 25/8 & 25/4 \end{pmatrix}.$

b. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/7 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}.$ ✔

c. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

d. $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Explicación:

1. Primera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial
   1. Se busca el pivote de la primera columna y se intercambian las filas correspondientes:

$$F^1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   2. Se hacen cero los elementos de la primera columna por debajo del pivote con $m_{21} = -1/2$ y $m_{31} = -1/2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \end{pmatrix}.$$

2. Segunda etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:
   1. Se busca el pivote de la segunda columna y se intercambian las filas correspondientes:

$$F^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

   2. Se hacen cero los elementos de la segunda columna por debajo del pivote con $m_{32} = 1/7$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F = F^2 F^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificándose $FA = LU$.

La respuesta correcta es: $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/7 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$.

Pregunta 13

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dadas las matrices

$$F = I_{3\leftrightarrow 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determine la matriz P_1 que verifica $FP = P_1F$.

a. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ ✔

b. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

c. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

d. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Explicación: es fácil comprobar que

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica $FP = P_1F$.

La respuesta correcta es: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Pregunta **14**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Indique cuál de los algoritmos siguientes realiza correctamente el "pivoteo" hacia abajo en la etapa k de la factorización LU de una matriz cuadrada de dimensión n.

a.

$$\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad m_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ \quad \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ \quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} + m_{ik} a_{kj} \\ \quad \text{Fin bucle en } j \\ \text{Fin bucle en } i \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad a_{ik} \leftarrow -\frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ \quad \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ \quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \\ \quad \text{Fin bucle en } j \\ \text{Fin bucle en } i \end{array}$$

c. ✔

$$\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad a_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ \quad \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ \quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \\ \quad \text{Fin bucle en } j \\ \text{Fin bucle en } i \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad m_{ik} \leftarrow -\frac{a_{kk}}{a_{ik}} \\ \quad \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ \quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{kj} + m_{ik} a_{kj} \\ \quad \text{Fin bucle en } j \\ \text{Fin bucle en } i \end{array}$$

Explicación: El algoritmo correcto es

$$\begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \ldots, n \\ \quad a_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ \quad \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ \quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \\ \quad \text{Fin bucle en } j \\ \text{Fin bucle en } i \end{array}$$

La respuesta correcta es:

$$\begin{array}{l}
\text{Para } i = k+1, \ldots, n \\
\quad a_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\
\quad \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\
\quad\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} a_{kj} \\
\quad \text{Fin bucle en } j \\
\text{Fin bucle en } i
\end{array}$$