Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{pmatrix}$$

- a. $x^3 + 2x^2 - x + 1$.
- b. $(x-1)^2(x+9)$. ✔
- c. $x^3 + 2x^2 - 3x + 9$.
- d. $x^3 - 2x^2 + 3x + 9$.

Explicación:

$$\begin{aligned} \det(A) = & -\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 5 \\ x+1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 5 \\ 0 & 6-(x^2+3x+2) & 10-5(x+1) \\ 0 & 3-(x+2) & x-1 \end{vmatrix} \\ = & -\frac{2}{2}\begin{vmatrix} 6-(x^2+3x+2) & 10-5(x+1) \\ 3-(x+2) & x-1 \end{vmatrix} = -\left(-(x-1)^2(x+4) - 5(x-1)^2\right) \end{aligned}$$

$$= (x-1)^2(x+4+5) = (x-1)^2(x+9).$$

La respuesta correcta es: $(x-1)^2(x+9)$.

Pregunta 2

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & (x-1) \end{pmatrix}$$

- a. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x.$
- b. $x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$ ✔
- c. $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$
- d. $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1.$

Explicación:

$$\begin{aligned} \det(A) = & \quad x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 2 & 3 & 4 & (x-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} \\ = & \quad x \left(x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 3 & 4 & (x-1) \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} \right) + 1 \end{aligned}$$

$$= x\left(x\left(x\left(x^2 - x + 4\right) + 3\right) + 2\right) + 1 = x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

La respuesta correcta es: $x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

Pregunta 3

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 2$. ¿Cuál es el valor de $|3A^{-1}|$?

- a. $9/2.$
- b. $27/2.$ ✔
- c. $3/2.$
- d. $6.$

Explicación:

$$|3A^{-1}| = 3^3|A^{-1}| = \frac{27}{|A|} = \frac{27}{2}.$$

La respuesta correcta es: $27/2.$

Pregunta 4

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Indique cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**.

- a. Si k es una escalar y A una matriz cuadrada de dimensión $n > 1$ entonces $|kA| = k|A|$. ✔
- b. Si una matriz cuadrada A de dimensión n tiene una fila proporcional a otra, entonces $|A| = 0$.
- c. Sean A, A' y A'' tres matrices cuadradas de dimensión n que verifican lo siguiente: la fila i de A es igual a la suma de la fila i de A' más la fila i de A'', el resto de los elementos de A (no pertenecientes a la fila i) son iguales a los de A' y a los de A''. Bajo esta hipótesis $|A| = |A'| + |A''|$.
- d. Si A es una matriz cuadrada y A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una fila de A a otra fila de A entonces $|A'| = |A|$.

Explicación: La única proposición falsa es "Si k es una escalar y A una matriz cuadrada de dimensión $n > 1$ entonces $|kA| = k|A|$" ya que $|kA| = k^n|A|$. Las otras tres son ciertas:

1. Si una matriz cuadrada B de dimensión n tiene una fila proporcional a otra, entonces $|B| = 0$. Demostración: supóngase que la fila j de B es igual a su fila i multiplicada por λ, entonces:

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{i1} & \dots & \lambda b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \lambda|B'|.$$

Por otro lado si se intercambian las filas i y j de la matriz B', el determinante de la nueva matriz deberá ser igual a $-|B'|$; entonces, si se tiene en cuenta que esta nueva matriz es igual a B' (puesto que las fila i es igual a la fila j):

$$|B'| = -|B'| \Rightarrow |B'| = 0 \Rightarrow |B| = 0.$$

2. Sean B, B' y B'' tres matrices cuadradas de dimensión n que verifican lo siguiente:

$$b_{k,j} = b'_{kj} = b''_{kj}, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n;$$

$$b_{i,j} = b'_{i,j} + b''_{i,j}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

(La fila i de B es igual a la suma de la fila i de B' más la fila i de B'', el resto de los elementos de B (no pertenecientes a la fila i) son iguales a los de B' y a los de B''). Bajo esta hipótesis $|B| = |B'| + |B''|$. Demostración: si se calcula el determinante de B desarrollando por la fila i, se obtiene:

$$|B| = \textstyle\sum_{j=1}^n b_{i,j}B_{i,j} = \sum_{j=1}^n (b'_{i,j} + b''_{i,j})B_{i,j} = \sum_{j=1}^n b'_{i,j}B_{i,j} + \sum_{j=1}^n b''_{i,j}B_{i,j}.$$

Debido a que $B_{i,j} = B'_{i,j} = B''_{i,j}$, $j = 1, \dots, n$ (los adjuntos de los elementos de la fila i son iguales en las tres matrices), se deduce que:

$$|B| = \textstyle\sum_{j=1}^n b'_{i,j}B'_{i,j} + \sum_{j=1}^n b''_{i,j}B''_{i,j} = |B'| + |B'|.$$

A continuación se utilizarán las dos proposiciones anteriores para demostrar que la proposición "Si A es una matriz cuadrada y A'

es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de una fila de A a otra fila de A entonces $|A'| = |A|$" es cierta.

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{jn} + \lambda b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{(prop. 2)}} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}}_{\underset{\text{(prop. 1)}}{0}}.$$

La igualdad anterior es cierta por la proposición 2 y como debido a la proposición 1 el segundo determinante de la suma es 0, se concluye que:

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{jn} + \lambda b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A|.$$

La respuesta correcta es: Si k es una escalar y A una matriz cuadrada de dimensión $n > 1$ entonces $|kA| = k|A|$.

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$. ¿Cuál es el signo del sumando $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ en el cálculo de $\det(A)$?

- a. $+$ si la matriz es simétrica, $-$ si la matriz es antisimétrica e indefinido en otro caso.
- b. $+$.
- c. No se puede saber a priori.
- d. $-$. ✔

Explicación:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_4} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(2)} a_{4\sigma(2)},$$

que es una suma de 24 sumandos cada uno de ellos con el signo $\epsilon(\sigma)$: $+$ si el número de inversiones de la permutación σ es par y $-$ si es impar. En este caso la permutación 2413 tiene tres inversiones y por lo tanto el signo del sumando $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ es $-$.

La respuesta correcta es: $-$.