Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Indique cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**.

- a. La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un conjunto linealmente independiente de vectores de V.
- b. La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.
- c. La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores que constituyen una base cualquiera de V.
- d. La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V. ✔

Explicación: La proposición ``La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V" es falsa porque a cualquier sistema generador de V se le puede añadir otro vector cualquiera de V sin que deje de ser un sistema generador de V. Las otras tres proposiciones son ciertas.

La respuesta correcta es: La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

Pregunta **2**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Suponga que se conoce la relación entre dos bases de un espacio vectorial V de dimensión tres:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{21}\mathbf{e}_2 + s_{31}\mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{e}'_2 &= s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + s_{32}\mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{e}'_3 &= s_{13}\mathbf{e}_1 + s_{23}\mathbf{e}_2 + s_{33}\mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Exprese las coordenadas de un vector $\mathbf{v}$ del espacio vectorial V en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ en función de sus coordenadas en la base $\{\mathbf{e}'_i\}$. Se recuerda que

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

a. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S^t \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

b. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

c. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = (S^t)^{-1} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

d. $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$ ✔

Explicación: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} = (v'_1, v'_2, v'_3)^t_{\{\mathbf{e}'_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}.$$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

Pregunta 3

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Determine las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en la base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$, formada por las matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a. $x_1 = a - c + d, x_2 = -b, x_3 = a - c, x_4 = c.$
- b. $x_1 = a - b - c + d, x_2 = -a + b + c, x_3 = d - c, x_4 = c - a.$
- c. $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d.$
- d. $x_1 = a - b - c + d, x_2 = -a + b + c, x_3 = a - c, x_4 = c.$ ✔

Explicación: resolviendo el sistema

$$x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3 + x_4 M_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

se obtienen las coordenadas pedidas.

La respuesta correcta es: $x_1 = a - b - c + d, x_2 = -a + b + c, x_3 = a - c, x_4 = c.$

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

En el e.v. de los polinomios de grado menor o igual que cuatro, se consideran los polinomios: $p_1(x) = 3 - 2x + x^2 + 4x^3 + x^4$ $p_2(x) = 4 - x + x^2 + 6x^3 - 2x^4$ $p_3(x) = 7 - 8x + 3x^2 + 8x^3 + 9x^4$ Hallar una base del subespacio que engendran p_1, p_2 y p_3 y determinar las coordenadas en ella de los tres polinomios dados.

- a. Base del s.e.v.: $B = \{p_1, p_2, p_3\}$. Coordenadas $p_1 = (1,0,0)^t_B$, $p_2 = (0,1,0)^t_B$, $p_3 = (0,0,1)^t_B$.
- b. Base del s.e.v.: $B = \{p_1, p_2\}$. Coordenadas $p_1 = (1,0)^t_B$, $p_2 = (0,1)^t_B$, $p_3 = (5,-2)^t_B$. ✔
- c. Base del s.e.v.: $B = \{p_1, p_2, p_3\}$. Coordenadas $p_1 = (1,0,0)^t_B$, $p_2 = (4,-1,1)^t_B$, $p_3 = (7,-8,3)^t_B$.
- d. Base del s.e.v.: $B = \{p_1, p_2\}$. Coordenadas $p_1 = (1,0)^t_B$, $p_2 = (0,1)^t_B$, $p_3 = (7,-8)^t_B$.

Explicación: Para hallar una base de $V : \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, en primer lugar hay que determinar la dimensión de V (n) y en segundo lugar extraer n polinomios linealmente independientes de $\{p_1, p_2, p_3\}$. Se pueden hacer las dos cosas a la vez realizando operaciones elementales en las filas de la matriz que tiene por filas las coordenadas de los tres polinomios en la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 6 & -2 \\ 7 & -8 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que $\operatorname{rg}(\{p_1, p_2, p_3\}) = 2$ y, por lo tanto, $\dim(V) = 2$. Por otro lado, a partir de la matriz escalonada, se deduce que p_1, p_2 son linealmente independientes por lo que constituyen una base de V: $B = \{p_1, p_2\}$. Para determinar las coordenadas de p_3 en la base B, se resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $x_1 = 5, x_2 = -2$. Por lo tanto las coordenadas pedidas son $p_1 = (1,0)^t_B$, $p_2 = (0,1)^t_B$, $p_3 = (5,-2)^t_B$.

Observación 1: La solución a este ejercicio no es única puesto que se podía haber escogido otra base distinta de V pero una vez determinada una base, las coordenadas sí son únicas. Por lo tanto, una vez descartadas las soluciones con bases de tres polinomios (implican $\dim(V) = 3$), quedaría escoger, entre las dos soluciones con base $\{p_1, p_2\}$, cuál tiene las coordenadas correctas de p_3. Para ello, más rápido que resolver el sistema anterior, es probar cuál de los dos juegos posibles lo verifica.

Observación 2: Otra forma de resolver el ejercicio es trabajar con la matriz 3×5 que tiene por **columnas** las coordenadas de los tres polinomios en la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ y obtener su forma escalonada reducida equivalente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de está última matriz se deduce:

1. $\operatorname{rg}(\{p_1, p_2, p_3\}) = 2 \to \dim(V) = 2$.
2. Base de V: $B = \{p_1, p_2\}$. Las dos primeras columnas (linealmente independientes) siguen siendo las coordenadas de p_1 y p_2 (aunque referidas a una base distinta a la original, en este caso a la formada por ellos mismos). La tercera columna es linealmente dependiente de las dos primeras.
3. Las coordenadas de p_3 son $(5,-2)^t_B = 5p_1 - 2p_2$ (la tercera columna, que representa las coordenadas de p_3 en la base B, es igual a 5 veces la primera menos 2 veces la segunda).

La respuesta correcta es: Base del s.e.v.: $B = \{p_1, p_2\}$. Coordenadas $p_1 = (1,0)^t_B$, $p_2 = (0,1)^t_B$, $p_3 = (5,-2)^t_B$.

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que dos se considera la base $B = \{p_1(t) = 1 + t, p_2(t) = t + t^2, p_3(t) = 1 + 2t + 2t^2\}$. ¿Cuáles son las coordenadas del polinomio $p(t) = 1 + t - t^2$ en la base B?

- a. $2, 0, -1.$
- b. $2, -1, 1.$
- c. $2, 1, -1.$ ✔
- d. $2, 1, 1.$

Explicación: resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

se obtienen las coordenadas pedidas:

$$x_1 = 2, x_2 = 1; x_3 = -1.$$

Que no es otra cosa que el cambio de base de $\{1, t, t^2\}$ a $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$.

Observación: Al conocer las cuatro posibles soluciones, es más rápido probar cuál de los cuatro juegos de coordenadas es el correcto, realizando la operación

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es: $2, 1, -1.$

Pregunta 6

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea la base de $\mathbb{R}^3$ $\{(0,0,1)^t_B, (0,1,0)^t_B, (1,0,0)^t_B\}$. Las coordenadas del vector $(1,0,0)^t_B$ en dicha base son

Seleccione una:

1. $(1,1,1)^t$
2. $(0,0,1)^t$ ✔
3. $(0,1,0)^t$
4. $(1,0,0)^t$

Para hallar las coordenadas de $(1,0,0)^t$ hay que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $(x_1, x_2, x_3)^t = (0,0,1)^t$.

La respuesta correcta es: $(0,0,1)^t$

Pregunta **7**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 = -\lambda, x_2 = 2\lambda, x_3 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^3\}.$$

Respecto a U y V se puede afirmar que

- a. $U + V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$.
- b. $U + V \neq \mathbb{R}^3$ y $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.
- c. $U + V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. ✔
- d. $U + V \neq \mathbb{R}^3$ y $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$.

Explicación: En primer lugar se obtienen las bases de U y V: base de U: $B_U = \{(1, 0, -2)^t, (0, 1, -3)^t\}$, base de V: $B_V = \{(-1, 2, 1)^t\}$. Para hallar una base de $U + V$ hay que partir de $B_U \cup B_V$ que es un sistema generador de $U + V$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

como el rango de $B_U \cup B_V$ es tres, los tres vectores constituyen una base de $U + V$ y $\dim(U + V) = 3$, lo que implica que $U + V = \mathbb{R}^3$. Por otro lado $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$, de donde despejando se obtiene $\dim(U \cap V) = 0$ y por tanto $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Resultado al que también se podía haber llegado planteando las ecuaciones implícitas de $U \cap V$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \, . \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones que se han obtenido uniendo las ecuaciones implícitas de U y V (los vectores que pertenecen a la intersección tienen que verificar las ecuaciones implícitas de los dos subespacios a la vez). Se comprueba fácilmente que el sistema homogéneo admite solamente la solución trivial.

La respuesta correcta es: $U + V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

Pregunta **8**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ que admite las siguientes ecuaciones paramétricas en una cierta base B:

$$\begin{cases} x_1 &= & \lambda+\mu \\ x_2 &= & 2\lambda-\mu \\ x_3 &= & -\lambda+3\mu \\ x_4 &= & \lambda+2\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R}).$$

Obtenga las ecuaciones implícitas de V.

- a. $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)_B^t\in\mathbb{R}^4/x_1-4x_2-3x_3=0,\ 5x_1-3x_2+2x_4=0\}$
- b. $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)_B^t\in\mathbb{R}^4/2x_1-x_2-4x_3=0,\ 5x_1-3x_2+2x_4=0\}$.
- c. $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)_B^t\in\mathbb{R}^4/5x_1-4x_2-3x_3=0,\ 5x_1-x_2-3x_4=0\}$. ✔
- d. $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)_B^t\in\mathbb{R}^4/x_1-4x_2-2x_3=0,\ 2x_1-3x_2-x_4=0\}$

Explicación: A partir de las ecuaciones paramétricas se deduce que una base de V está formada por los vectores $(1,2,-1,1)_B^t$ y $(1,-1,3,2)_B^t$. Por lo tanto $\dim(V)=2$ y se necesitarán dos ecuaciones implícitas linealmente independientes para determinar V. Para obtenerlas hay que despejar los parámetros λ y μ de las ecuaciones paramétricas en función de las coordenadas x_1,x_2,x_3,x_4. La eliminación de λ y μ se realiza resolviendo el sistema cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & x_2 \\ -1 & 3 & x_3 \\ 1 & 2 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -3 & x_2-2x_1 \\ 0 & 4 & x_3+x_1 \\ 0 & 1 & x_4-x_1 \end{pmatrix} =\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -3 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 5x_1+4x_2+3x_3 \\ 0 & 0 & 5x_1-x_2-3x_4 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible se debe verificar $5x_1-4x_2-3x_3=0$ y $5x_1-x_2-3x_4=0$ que son las ecuaciones implícitas de V buscadas. **Observación**: Otra forma ``menos ordenada" de proceder sería despejar los parámetros λ y μ de dos de las ecuaciones paramétricas y sustituir sus valores en las otras dos sin realizar la triangularización gaussiana. Compruebe que el resultado es el mismo.

La respuesta correcta es: $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)_B^t\in\mathbb{R}^4/5x_1-4x_2-3x_3=0,\ 5x_1-x_2-3x_4=0\}$.