Pregunta 1

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio euclídeo, E, de dimensión 3 que verifica:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1, \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 3$$

y además $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^{\perp}$. Obtenga la matriz del producto escalar respecto de la base B.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. ✔

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Explicación:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 = 1, \\ (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 = 0. \end{cases}$$

Con los dos productos escalares que se acaban de calcular se tienen todos los elementos de la matriz de Gram:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Considere el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 4 x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1$$

expresado en una cierta base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Halle una base ortonormal del espacio euclídeo.

- a. $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3,0,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$
- b. $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{2}(0,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$
- c. $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_3 = (0,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$
- d. $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$ ✔

Explicación: $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son ortogonales y unitarios por lo que se pueden escoger como los dos primeros vectores de la base ortonormal:

$$\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \; \mathbf{c}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

El tercer vector de la base se obtiene aplicando el método de Gram-Schmidt:
$\mathbf{z}_3 = \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{c}_2)\mathbf{c}_2 = (0,0,1)^t - (1,0,0)^t = (-1,0,1)^t$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

La respuesta correcta es: $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$

Pregunta **3**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}},$$

halle una base ortonormal del subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 2, 1, 0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(1, 2, 3, 2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

- a. $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{c}_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}^t.$
- b. $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{c}_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{56}}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}^t.$ ✔
- c. $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}^t.$
- d. $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t, \mathbf{c}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}^t.$

Explicación: base de $W = \{\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 0)^t, \mathbf{a}_2 = (1, 2, 3, 2)^t\}$. Se ortonormaliza la base de W utilizando el método de Gram-Schmidt:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t,$$

$$\|\mathbf{a}_1\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 12,$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{56}}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}^t,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{c}_1) = (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{a}_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{10}{3}\sqrt{3},$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{56}{3}.$$

Observación: todos los resultados están referidos a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de $\mathbb{R}^4$.

La respuesta correcta es: $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{c}_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{56}}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}^t.$

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + 3x_3y_3\ _{\{\mathbf{e}_i\}},$$

determinar la proyección ortogonal del vector $\mathbf{a} = (1,1,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \diagup 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

- a. $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$. ✔
- b. $\begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- c. $\begin{pmatrix} \frac{12}{5} & \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- d. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{15}{5} \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

Explicación: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G\mathbf{y}$$

1. Base de $S:\{\mathbf{a}_1 = (1,2,0)^t, \mathbf{a}_2 = (0,1,1)^t\}$.
2. Base ortonormal de S:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)^t,$$

$$\|\mathbf{a}_1\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,1)^t,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (0,1,1)^t - (1,2,0)^t = (-1,-1,1)^t,$$

$$(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{5}},$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

3. Se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada,

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{8}{\sqrt{5}}\mathbf{u}_1 + \frac{6}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}^t.$$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Acerca de la proyección ortogonal $\mathbf{x}_1$ de un vector $\mathbf{x}$ de un espacio euclídeo E sobre un subespacio V de E, se puede afirmar lo siguiente:

- a. $\mathbf{x}_1$ es ortogonal a V.
- b. $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 \in V$.
- c. $\mathbf{x}_1$ es la mejor aproximación de $\mathbf{x}$ con vectores de V. ✔
- d. $\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{p}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$, en donde $\{\mathbf{u}_i\}$ es una base cualquiera de V y $\dim(V) = p$.

Explicación: $\mathbf{x}_1$ es la mejor aproximación de $\mathbf{x}$ con vectores de V.

La respuesta correcta es: $\mathbf{x}_1$ es la mejor aproximación de $\mathbf{x}$ con vectores de V.

Pregunta **6**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dado un conjunto **no ortogonal** de un espacio euclídeo formado por los vectores $\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_p\}$, se verifica

- a.
$||\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p||^2 = ||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2$.
- b. ✔
$||\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p||^2 = ||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2 + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$.
- c.
$||\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p||^2 = ||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2 + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$.
- d.
$||\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p||^2 = ||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2 + \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$.

Explicación:

$$||\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p||^2 = (\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p) \cdot (\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p) =$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_p + \cdots + \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{x}_p =$$

(teniendo en cuenta que el producto escalar es una aplicación simétrica)

$$||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2 + 2\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 2\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_p + 2\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 + \cdots + 2\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_p + \cdots + 2\mathbf{x}_{p-1} \cdot \mathbf{x}_p =$$

$$||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2 + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

La respuesta correcta es:

$$||\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_p||^2 = ||\mathbf{x}_1||^2 + \cdots + ||\mathbf{x}_p||^2 + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$