Pregunta 1

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dados

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

- a. $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio 1.
- b. $\mathbf{v}$ es un vector propio de A pero no se le puede asociar ningún valor propio.
- c. $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio 0. ✔
- d. $\mathbf{v}$ no es un vector propio de A.

Explicación:

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Con lo que queda demostrado que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A y que su valor propio asociado es 0.

La respuesta correcta es: $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio 0.

Pregunta **2**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dada una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, diagonalizable por semejanza, existe una matriz diagonal, $D \in M_n(\mathbb{K})$, y una matriz inversible, $P \in M_n(\mathbb{K})$, tal que $D = P^{-1}AP$. ¿Cómo se determina P?

- a. $P = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$, siendo $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A expresada en función de la base original. ✔
- b. P es la matriz de cambio de base que transforma las coordenadas de un vector en la base original a sus coordenadas respecto a la base vectores propios.
- c. $P = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$, siendo $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ los n valores propios de A (cada uno repetido según su multiplicidad algebraica).
- d. $P = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)^t$, siendo $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A expresada en función de la base original.

Explicación: Si se denomina f al endomorfismo asociado a la matriz A, el proceso para diagonalizar f (y por lo tanto A) consiste en hallar una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios y en expresar f en esta nueva base, verificándose que su matriz asociada es diagonal. La matriz de cambio de base, P, estará formada por las coordenadas de los vectores propios en la base de referencia:

$$P = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$$

que es la matriz de cambio de base en $\mathbb{K}$ que transforma las coordenadas de un vector en la base de vectores propios a sus coordenadas en la base de referencia.

La respuesta correcta es: $P = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$, siendo $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A expresada en función de la base original.

Pregunta **3**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Considere el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ y α distinto de 0 y π. Respecto a f se puede decir lo siguiente:

- a. Es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ con valores propios 0 y 1.
- b. Es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ con valor propio $\cos\alpha$.
- c. Es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$ con valores propios α y $-\alpha$.
- d. No es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$. ✔

Explicación: El polinomio característico de f es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1$. $p(\lambda)$ no tiene raíces reales excepto en los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$. Por lo tanto si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \pi$, f no es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$.

La respuesta correcta es: No es diagonalizable en $\mathbb{R}^2$.

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Determine las bases de los subespacios propios del endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ y α distinto de 0 y π.

- a. Hay dos subsespacios propios de dimensión uno, cuyas bases respectivas son: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.
- b. Hay dos subsespacios propios de dimensión uno, cuyas bases respectivas son: $\mathbf{v}_1 = \cos\alpha\mathbf{e}_1 + i\operatorname{sen}\alpha\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$.
- c. Hay dos subsespacios propios de dimensión uno, cuyas bases respectivas son: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$. ✔
- d. Hay un subsespacio propio de dimensión dos, cuya base está formada por los vecores: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{v}_2 = i\mathbf{e}_2$.

Explicación: El polinomio característico de f es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1$. $p(\lambda)$ Hallando sus raíces se obtienen los valores propios: $\lambda_1 = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ y $\lambda_2 = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$. Como son dos valores propios distintos y el espacio sobre el que se ha definido f es de dimensión dos, f es diagonalizable (la multiplicidad algebraica de los dos valores propios es uno y su multiplicidad geométrica también puesto que no puede ser cero ni mayor que la algebraica). Se hallan los subespacios propios:

$$V_{\lambda_1} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 / (A - (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)I)\mathbf{x} = 0\right\} =$$

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} -i\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & -i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Del sistema homogéneo anterior se obtiene una base de V_{λ_1}:

$$\text{Base de } V_{\lambda_1} : \{\mathbf{c}_1 = (1, i)^t\}.$$

La multiplicidad geométrica de λ_1 es 1 (dato que ya se conocía puesto que la multiplicidad algebraica de λ_1 es 1).

$$V_{\lambda_2} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 / (A - (\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)I)\mathbf{x} = 0\right\} =$$

$$\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2 / \begin{pmatrix} i\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & i\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Resolviendo el sistema homogéneo se obtiene una base de V_{λ_2}:

$$\text{Base de } V_{\lambda_2} : \{\mathbf{c}_2 = (1, -i)^t\}.$$

La multiplicidad geométrica de λ_2 también es 1.

La respuesta correcta es: Hay dos subsespacios propios de dimensión uno, cuyas bases respectivas son: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$.

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dados una matriz cuadrada, $A \in M_n(\mathbb{R})$, un vector, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y un escalar, $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede afirmar lo siguiente:

- a. Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\alpha\mathbf{v}$ también es un vector propio de A asociado al valor propio α/λ.
- b. Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\alpha\mathbf{v}$ no es un vector propio de A.
- c. Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\alpha\mathbf{v}$ también es un vector propio de A asociado al mismo valor propio λ. ✔
- d. Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\alpha\mathbf{v}$ también es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda\alpha$.

Explicación: si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ entonces $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, de donde se deduce que $A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha A\mathbf{v} = \alpha\lambda\mathbf{v} = \lambda(\alpha\mathbf{v})$. Con lo que queda demostrado que $\alpha\mathbf{v}$ es un vector propio de A y que su valor propio asociado es λ.

La respuesta correcta es: Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\alpha\mathbf{v}$ también es un vector propio de A asociado al mismo valor propio λ.

Pregunta 6

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Hallar los valores propios de la matriz de coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

comprobando que uno de ellos es doble. Indique cuál es el valor propio doble y determine su subespacio propio asociado.

- a. Valor propio doble: 2, base de V_2: $\{(1, 1, -1)^t\}$. ✔
- b. Valor propio doble: 1, base de V_1: $\{(1, 1, -2)^t\}$.
- c. Valor propio doble: 2, base de V_2: $\{(1, 0, -1)^t\}$.
- d. Valor propio doble: 1, base de V_1: $\{(1, 2, -1)^t\}$.

Explicación: ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+2]-(1-\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)+(1-\lambda) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0,$$

de donde se obtiene que el valor propio doble es $\lambda = 2$. Las ecuaciones implícitas de su subespacio propio asociado, V_2, son

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1, 1, -1)^t\}$ es una base de V_2.

La respuesta correcta es: Valor propio doble: 2, base de V_2: $\{(1, 1, -1)^t\}$.

Pregunta 7

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Respecto a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k-2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

en donde $k \in \mathbb{R}$, se puede afirmar lo siguiente:

- a. Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, A es diagonalizable por semejanza. Si $k = 1$, A es diagonalizable por semejanza. Si $k = 2$, A no es diagonalizable por semejanza.
- b. Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, A no es diagonalizable por semejanza. Si $k = 1$, A es diagonalizable por semejanza. Si $k = 2$, A no es diagonalizable por semejanza.
- c. Si $k \neq 1$, A es diagonalizable por semejanza. Si $k = 1$, A no es diagonalizable por semejanza. ✔
- d. Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, A es diagonalizable por semejanza. Si $k = 1$ o $k = 2$, A no es diagonalizable por semejanza.

Explicación: ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & k-2 \\ 0 & 1-\lambda & k \\ 0 & 0 & k-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(k-\lambda) = 0,$$

de donde se obtienen los valores propios de A. Entonces, discutiendo en función de k, se tiene:

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, los tres valores propios son distintos y A es diagonalizable por semejanza.
- Si $k = 1$, habrá un valor simple (multiplicidad algebraica 1), $\lambda = 2$ y otro doble (multiplicidad algebraica 2), $\lambda = 1$. La dimensión de V_1 será igual a uno ya que $\operatorname{rg}(A - I) = 2$, por lo tanto A no es diagonalizable por semejanza en este caso.
- Si $k = 2$, habrá un valor simple (multiplicidad algebraica 1), $\lambda = 1$ y otro doble (multiplicidad algebraica 2), $\lambda = 2$. La dimensión de V_2 será igual a dos ya que $\operatorname{rg}(A - 2I) = 1$, por lo tanto A es diagonalizable por semejanza en este caso.

La respuesta correcta es: Si $k \neq 1$, A es diagonalizable por semejanza. Si $k = 1$, A no es diagonalizable por semejanza.

Pregunta **8**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

De la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

se sabe que tiene dos valores propios: $\lambda_1 = -2$ de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 2$ de multiplicidad algebraica 3. Obtenga una base ortonormal de vectores propios de A.

a. $\mathbf{v}_1 = (-1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{6} \quad 2/\sqrt{6} \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_4 = (2/\sqrt{6} \quad -2/\sqrt{6} \quad 3/\sqrt{6} \quad 0)^t$.

b. $\mathbf{v}_1 = (-1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_3 = (2/\sqrt{6} \quad -2/\sqrt{6} \quad 1/\sqrt{6} \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_1 = (3/\sqrt{6} \quad -2/\sqrt{6} \quad 2/\sqrt{6} \quad 1)^t$.

c. $\mathbf{v}_1 = (-1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{6} \quad 2/\sqrt{6} \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_4 = (1/\sqrt{12} \quad -1/\sqrt{12} \quad -1/\sqrt{12} \quad 3/\sqrt{12})^t$.

d. $\mathbf{v}_1 = (-1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_3 = (3/\sqrt{6} \quad -3/\sqrt{6} \quad 1/\sqrt{6} \quad 0)^t$, $\mathbf{v}_4 = (1/\sqrt{12} \quad -1/\sqrt{12} \quad -1/\sqrt{12} \quad 3/\sqrt{12})^t$.

Explicación: La matriz A es diagonalizable por semejanza por ser real y simétrica. Una base de vectores propios de A que además sea ortonormal se obtiene uniendo bases ortonormales de los subespacios propios:

1. Al ser A diagonalizable por semejanza el subespacio propio V_{-2} tiene dimensión 1. Las ecuaciones implícitas de V_{-2}, son

$$(A+2I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hay tres ecuaciones implícitas linealmente independientes y, por lo tanto, se confirma que $\dim(V_{-2}) = 1$. Una base de V_{-2} será, por ejemplo, $\{\mathbf{u}_1 = (-1,1,1,1)^t\}$. Para obtener una base ortonormal simplemente se divide $\mathbf{u}_1$ por su norma:

$$\mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{2}(-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t = (-1/2 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 1/2)^t$$

2. Por la misma razón por la que V_{-2} tiene que tener dimensión 1, V_2 tiene que tener dimensión 3. Las ecuaciones implícitas de V_2, son

$$(A-2I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hay una ecuación implícita linealmente independiente y, por lo tanto, se confirma que $\dim(V_2) = 3$. Una base de V_2 será, por ejemplo, $\{\mathbf{u}_2 = (1,1,0,0)^t, \mathbf{u}_3 = (1,0,1,0)^t, \mathbf{u}_4 = (1,0,0,1)^t\}$. Para obtener una base ortonormal simplemente se aplica el método de Gram - Schmidt a la base $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ obteniéndose

$$\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 0)^t, \mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{6} \quad 2/\sqrt{6} \quad 0)^t,$$

$$\mathbf{v}_4 = (1/\sqrt{12} \quad -1/\sqrt{12} \quad -1/\sqrt{12} \quad 3/\sqrt{12})^t$$

Por lo tanto una base formada por vectores propios de A que además sea ortonormal será:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}.$$

Observación: La solución no es única por lo que se pueden obtener bases distintas que también son correctas. En el caso de que obtenga una base que no coincida con la correcta pero crea que también lo es, puede elegir la opción correcta descartando las soluciones erróneas: es fácil comprobar que los vectores de las bases de las opciones incorrectas ni son todos vectores propios ni vectores conjugados respecto de A.

La respuesta correcta es: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^t, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^t,$
$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}^t, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} & 3/\sqrt{12} \end{pmatrix}^t.$