Pregunta **1**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, cuya expresión en una cierta base B de $\mathbb{R}^3$ es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3,$$

obtenga la matriz asociada a f en la base B.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$ ✔

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$

Explicación: La expresión matricial de f en la base B es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Pregunta **2**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, cuya expresión en una cierta base de $\mathbb{R}^3$ es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3,$$

determine el rango de f.

- a. $2.$ ✔
- b. $3.$
- c. $1.$
- d. $0.$

Explicación: La expresión matricial de f es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

El rango de f es el rango de su matriz asociada en cualquier base. Dado que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el rango de f es dos.

La respuesta correcta es: $2.$

Pregunta **3**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, cuya expresión en una cierta base B de $\mathbb{R}^3$ es

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3,$$

obtenga la matriz asociada a f en la base B', sabiendo que la expresión de las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^3$ en la base B' en función de sus coordenadas en la base B es la siguiente:

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2' &= -x_1 - x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

a. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 14 \\ 10 & 14 & 20 \end{pmatrix}.$

b. $\begin{pmatrix} 26 & -5 & -11 \\ -5 & 1 & 2 \\ -11 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

c. $\begin{pmatrix} 8/25 & 6/25 & 6/25 \\ 6/25 & 17/25 & -8/25 \\ 6/25 & -8/25 & 17/25 \end{pmatrix}.$ ✔

d. $\begin{pmatrix} 10 & 9 & -13 \\ 9 & 9 & -12 \\ -13 & -12 & 17 \end{pmatrix}.$

Explicación: La expresión matricial de f en la base B es

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Haciendo el cambio inverso al dado en el enunciado:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 & 2/5 \\ 3/5 & 6/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Entonces la expresión de f en la base B' será:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -1/5 \\ -3/5 & 6/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 & 2/5 \\ 3/5 & 6/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/25 & 6/25 & 6/25 \\ 6/25 & 17/25 & -8/25 \\ 6/25 & -8/25 & 17/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es: $\begin{pmatrix} 8/25 & 6/25 & 6/25 \\ 6/25 & 17/25 & -8/25 \\ 6/25 & -8/25 & 17/25 \end{pmatrix}.$

Pregunta **4**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Clasifique la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cuya expresión en una cierta base de $\mathbb{R}^2$ es

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

- a. es indefinida y ordinaria. ✔
- b. q es semidefinida positiva pero no definida positiva.
- c. q es definida positiva.
- d. q es indefinida y degenerada.

Explicación: (las coordenadas de los vectores están siempre referidas a la base utilizada para expresar la forma cuadrática en el enunciado) Se diagonaliza q hallando una base de vectores conjugados respecto de q. Se comienza tomando $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($q(\mathbf{c}^1) \neq 0$):

$$\langle \mathbf{c}_1 \rangle^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \to \{x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

Escogemos $\mathbf{c}_2$ de entre los vectores de una base cualquiera de $\langle \mathbf{c}_1 \rangle^{\perp}$, teniendo en cuenta que $q(\mathbf{c}^2) \neq 0$ por ejemplo $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallando $q(\mathbf{c}_1) = 1$ y $q(\mathbf{c}_2) = -3$ se obtiene la expresión diagonalizada de q en la base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$:

$$q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 - 3(x_2')^2.$$

y, por lo tanto, la forma canónica de q es indefinida y ordinaria.

La respuesta correcta es: es indefinida y ordinaria.

Pregunta **5**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Clasifique la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, cuya expresión en una cierta base de $\mathbb{R}^4$ es

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

- a. q es indefinida y degenerada. ✔
- b. es indefinida y ordinaria.
- c. q es definida positiva.
- d. q es semidefinida positiva pero no definida positiva.

Explicación: Es indefinida porque en la diagonal principal hay términos negativos y positivos, además es degenerada porque el rango de la matriz de q en la base utilizada es tres:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que implica que $\dim(\ker f) = 1$.

La respuesta correcta es: q es indefinida y degenerada.

Pregunta **6**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Obtenga la expresión canónica de la forma cuadrática $q:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, cuya expresión en una cierta base de $\mathbb{R}^4$ es

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4.$$

- a. $q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 - (x_4')^2$.
- b. $q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2$. ✔
- c. $q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2 - (x_4')^2$.
- d. $q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2$.

Explicación: (las coordenadas de los vectores están siempre referidas a la base utilizada para expresar la forma cuadrática en el enunciado) Se diagonaliza q hallando una base de vectores conjugados respecto de q. Se comienza tomando $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ($q(\mathbf{c}^1)\neq 0$):

$$\langle \mathbf{c}_1\rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0\right\} \to \{x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Escogemos $\mathbf{c}_2$ de entre los vectores de una base cualquiera de $\langle \mathbf{c}_1\rangle^\perp$, teniendo en cuenta que $q(\mathbf{c}^2)\neq 0$ por ejemplo $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\langle \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0\right\} \to \left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ -x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\end{array}\right\}.$$

Escogemos $\mathbf{c}_3$ de entre los vectores de una base cualquiera de $\langle \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\rangle^\perp$, teniendo en cuenta que $q(\mathbf{c}^3)\neq 0$ por ejemplo $\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\langle \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\rangle^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0\right\} \to \left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\\ -x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\\ 2x_3 = 0\end{array}\right\}.$$

Escogemos $\mathbf{c}_4$ de entre los vectores de una base cualquiera de $\langle \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\rangle^\perp$, por ejemplo $\mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. En este caso $q(\mathbf{c}^4) = 0$ porque todos los vectores de $\langle \mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3\rangle^\perp$ son autoconjugados respecto de q lo que indica que se trata de una forma cuadrática degenerada de rango $4-1=3$. Hallando $q(\mathbf{c}_1)=1$, $q(\mathbf{c}_2)=-1$ y $q(\mathbf{c}_3)=2$ se obtiene la expresión diagonalizada de q en la base $\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3,\mathbf{c}_4\}$:

$$q(\mathbf{x}) = (x_1'')^2 - (x_2'')^2 + 2(x_3'')^2 + 0(x_4'')^2.$$

y, por lo tanto, la forma canónica de q será:

$$q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2,$$

expresada en la base

$$\left\{\mathbf{v}_1 = \mathbf{c}_1,\ \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{c}_3,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{c}_2,\ \mathbf{v}_4 = \mathbf{c}_4\right\}$$

La respuesta correcta es: $q(\mathbf{x}) = (x_1')^2 + (x_2')^2 - (x_3')^2$.

Pregunta **7**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea A una matriz cuadrada **no diagonal** de dimensión n definida positiva. Respecto a los elementos de la diagonal de A se puede afirmar que

- a. pueden ser mayores o menores que cero pero no pueden ser nulos.
- b. son mayores o iguales que cero.
- c. pueden ser positivos, negativos o nulos pero al menos uno debe ser mayor que cero.
- d. son mayores que cero. ✔

Explicación: En una matriz A definida positiva los elementos de su diagonal siempre son mayores que cero independientemente de si la matriz es diagonal o no. Esto es así porque si A es la matriz asociada a una forma cuadrática q en una cierta base $\mathbf{e}_i$, la diagonal de A está formada por los reales $a_{ii} = q(\mathbf{e}_i), i = 1, \cdots, n$ y entonces, si q es definida positiva, $a_{ii} > 0, i = 1, \cdots, n$.

La respuesta correcta es: son mayores que cero.

Pregunta **8**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea A una matriz cuadrada **no diagonal** de dimensión n de la que se sabe que los elementos de su diagonal son todos estrictamente positivos. Respecto a la clasificación de A se puede afirmar que

- a. A es indefinida
- b. A es definida positiva.
- c. A es semidefinida positiva pero no definida positiva.
- d. Con la información del enunciado no se puede clasificar A. ✔

Explicación: Con la información del enunciado no se puede clasificar A (solo se sabe que no puede ser semidefinida negativa). Las matrices **no diagonales** definidas positivas tienen todas ellas elementos mayores que cero en la diagonal. Pero no solo ellas, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es indefinida ordinaria y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva pero no definida positiva.

La respuesta correcta es: Con la información del enunciado no se puede clasificar A.

Pregunta **9**

Correcta

Se puntúa 1.00 sobre 1.00

Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y f su forma polar tales que $q\big((1,0)^t_{\mathbf{e}_i}\big) = 0$, $q\big((1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\big) = 1$ y $f\big((1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (0,1)_{\{\mathbf{e}_i\}}\big) = 1$. Acerca de q se puede afirmar lo siguiente:

- a. q es indefinida ✔
- b. q es definida positiva.
- c. q es semidefinida negativa.
- d. q es semidefinida positiva pero no definida positiva.

Explicación: De los datos del enunciado se deduce que la matriz asociada a la forma cuadrática en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

El valor de α se obtiene a partir de $q\big((1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\big) = 1$:

$$q\big((1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha + 2 = 1 \to \alpha = -1.$$

Por lo tanto, en la base $\{\mathbf{e}_i\}$,

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Una base de vectores conjugados de q está formada por $(0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ ya que

$$q\big((0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 = 0 \to \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle.$$

y en dicha base la expresión de q es:

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

por lo que q es una forma cuadrática indefinida.

La respuesta correcta es: q es indefinida