

Ejercicios resueltos de Álgebra Lineal

Ultano Kindelán Bustelo

Grado de Ingeniería de la Energía, ETSIME (UPM)

12 de enero de 2024

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices

1. Indique si son linealmente independientes los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución: para que los tres vectores sean linealmente independientes es necesario y suficiente que la igualdad vectorial

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

se satisfaga **únicamente** para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Es fácil comprobar que el sistema homogéneo anterior es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \quad + 7\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ \quad \quad + 30\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

que es un sistema homogéneo compatible determinado que admite como única solución $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por lo tanto los tres vectores son linealmente independientes.

2. Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine si el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. En caso de que la respuesta fuera afirmativa, calcule los coeficientes de la combinación lineal indicando si son únicos.

Solución: el vector $\mathbf{u}$ se podrá expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ si la ecuación vectorial

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{u} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 8 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 13 \end{cases}$$

tiene solución. Es fácil comprobar que el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 8 \\ -\alpha_2 = -3 \end{cases}$$

que es un sistema compatible determinado que admite como única solución $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$. Por lo tanto el sistema tiene solución y es única: el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ de forma única.

3. Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine si el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. En caso de que la respuesta fuera afirmativa, calcule los coeficientes de la combinación lineal indicando si son únicos.

Solución: el vector $\mathbf{u}$ se podrá expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ si la ecuación vectorial

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{u} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 3 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \end{cases}$$

tiene solución. Es fácil comprobar que el sistema anterior es incompatible porque ningún par de números reales puede verificar la tercera ecuación. Por lo tanto el sistema no tiene solución: el vector $\mathbf{u}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

4. Dados los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

determine si el vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$. En caso de que la respuesta fuera afirmativa, calcule los coeficientes de la combinación lineal indicando si son únicos.

Solución: el vector $\mathbf{u}$ se podrá expresar como combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ si la ecuación vectorial

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{u} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 3 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 8 \end{cases}$$

tiene solución. Escalonando la matriz ampliada del sistema:

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A_b) = 2 < 3 \text{ (número de incógnitas).}$$

Es un sistema compatible indeterminado (con un grado de libertad) que admite infinitas soluciones:

$$\alpha_1 = 1 - \lambda, \quad \alpha_2 = 2 - \lambda, \quad \alpha_3 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \leftarrow \text{Solución general del sistema.}$$

Unos coeficientes válidos serían, por ejemplo,

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1 \quad \leftarrow \text{Solución particular del sistema.}$$

Pero no son los únicos válidos, como se acaba de decir, existen infinitos juegos de coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que permiten expresar $\mathbf{u}$ como combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$: todos los que verifican la solución general del sistema.

5. Dados los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

determine el rango del conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$.

Solución: se construye la matriz de dimensión 5×5 cuyas filas son las componentes de los cinco vectores del enunciado y se obtiene una matriz escalonada equivalente (E). El número de filas no nulas de E será el rango de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el rango de $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ es **cuatro**.

6. Discuta, en función de los parámetros α y β , la existencia y unicidad de soluciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}.$$

Solución: la matriz ampliada del sistema después de intercambiar las filas 1 y 3 es la siguiente:

$$A_b \sim \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando operaciones elementales en las filas de A_b se obtiene una matriz escalonada equivalente a A_b :

$$A_b \xrightarrow[F_3 - \alpha F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & 1 \\ 0 & \beta(\alpha - 1) & 1 - \alpha & \beta - 1 \\ 0 & \beta(1 - \alpha) & 1 - \alpha^2 & 1 - \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & 1 \\ 0 & \beta(\alpha - 1) & 1 - \alpha & \beta - 1 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha^2 - \alpha & \beta - \alpha \end{pmatrix} = A'_b$$

La submatriz formada por las tres filas de A'_b y sus tres primeras columnas es una matriz escalonada equivalente a la matriz de coeficientes del sistema (A) a la que denominaremos A' :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \beta(\alpha - 1) & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & 2 - \alpha^2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Discutiremos las soluciones del sistema en función de los rangos de A y A_b , iguales, respectivamente, a los de A' y A'_b . El término $2 - \alpha^2 - \alpha$ se anula para $\alpha = 1$ y $\alpha = -2$. Clasificaremos, por lo tanto, las soluciones según α sea igual a 1, igual a -2 o distinto de 1 y -2:

a) $\alpha = 1$

- Si $\beta \neq 1$ entonces $\text{rg}(A) = 1 \neq \text{rg}(A_b) = 2 \rightarrow$ **Sistema incompatible.**
- Si $\beta = 1$ entonces $\text{rg}(A) = 1 = \text{rg}(A_b) = 1 \rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.**

b) $\alpha = -2$

- Si $\beta \neq -2$ entonces $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema incompatible.**
- Si $\beta = -2$ entonces $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A_b) = 2 \rightarrow$ **Sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.**

c) $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$

- Si $\beta \neq 0$ entonces $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**
- Si $\beta = 0$ entonces $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema incompatible.**

Observación 1: si al comienzo del escalonamiento se hubieran intercambiado las filas 1 y 2:

$$A_b \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - \alpha F_1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta(1 - \alpha^2) & 1 - \alpha & 1 - \alpha\beta \\ 0 & \beta(1 - \alpha) & \alpha - 1 & 1 - \beta \end{pmatrix} \\ (1 + \alpha)F_3 - F_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta(1 - \alpha)(1 + \alpha) & 1 - \alpha & 1 - \alpha\beta \\ 0 & 0 & (\alpha + 2)(\alpha - 1) & \alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

En el último paso se ha multiplicado la fila 3 por $(1 + \alpha)$, por lo tanto la discusión de los rangos de A y A_b **habrá que hacerla con $\alpha \neq -1$** . Si se tiene en cuenta la restricción anterior la discusión es exactamente igual que la realizada más arriba. Faltaría estudiar el caso $\alpha = -1$ a partir de

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ 0 & \beta(1 - \alpha^2) & 1 - \alpha & 1 - \alpha\beta \\ 0 & \beta(1 - \alpha) & \alpha - 1 & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

que se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 & 1+\beta \\ 0 & 2\beta & -2 & 1-\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 1 & \beta \\ 0 & 2\beta & -2 & 1-\beta \\ 0 & 0 & 2 & 1+\beta \end{pmatrix},$$

de donde se deduce

- a) Si $\beta \neq 0$ entonces $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**
- b) Si $\beta = 0$ entonces $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema incompatible.**

que se pueden incluir en el caso c). Por lo tanto el resultado de la discusión es el mismo que con el primer procedimiento.

Observación 2: si al comienzo del escalonamiento no se realiza ningún cambio de fila:

$$A_b \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ 1 & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\alpha F_2 - F_1, \alpha F_3 - F_1} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 1 \\ 0 & \beta(\alpha^2 - 1) & \alpha - 1 & \alpha\beta - 1 \\ 0 & \beta(\alpha - 1) & \alpha^2 - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \xleftrightarrow{\sim} F_2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 1 \\ 0 & \beta(\alpha - 1) & \alpha^2 - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \beta(\alpha^2 - 1) & \alpha - 1 & \alpha\beta - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} F_3 - (\alpha + 1)F_2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 1 \\ 0 & \beta(\alpha - 1) & \alpha^2 - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & -(\alpha - 1)(\alpha + 2) & \beta - \alpha \end{pmatrix}.$$

En este caso, en el primer paso se han multiplicado las filas 2 y 3 por α , por lo tanto la discusión de los rangos de A y A_b **habrá que hacerla con $\alpha \neq 0$** . Si se tiene en cuenta la restricción anterior la discusión es exactamente igual que las realizadas más arriba. Faltaría estudiar el caso $\alpha = 0$ a partir de

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 & \beta \\ 1 & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

que se convierte en

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \beta \end{pmatrix}$$

de donde se deduce

- a) Si $\beta \neq 0$ entonces $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema compatible determinado.**
- b) Si $\beta = 0$ entonces $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A_b) = 3 \rightarrow$ **Sistema incompatible.**

que se pueden incluir en el caso c). Por lo tanto el resultado de la discusión es el mismo que con los dos procedimientos anteriores.

7. Determine el rango de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solución: Se realizan operaciones en la filas de la matriz para obtener una matriz escalonada equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El número de filas no nulas de la matriz escalonada es tres, por lo que el rango de la matriz del enunciado es **tres**.

8. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$, halle A^n ($n \in \mathbb{N}$).

Solución: se calculan las cuatro primeras potencias para conjeturar la expresión de A^n :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 2k & 1 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} k^2 & 2k & 1 \\ 0 & k^2 & 2k \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^3 & 3k^2 & 3k \\ 0 & k^3 & 3k^2 \\ 0 & 0 & k^3 \end{pmatrix}, \\ A^4 &= \begin{pmatrix} k^3 & 3k^2 & 3k \\ 0 & k^3 & 3k^2 \\ 0 & 0 & k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^4 & 4k^3 & 6k^2 \\ 0 & k^4 & 4k^3 \\ 0 & 0 & k^4 \end{pmatrix}, \\ &\dots \\ A^n &= \begin{pmatrix} k^n & nk^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}k^{n-2} \\ 0 & k^n & nk^{n-1} \\ 0 & 0 & k^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A continuación se demuestra por inducción que la conjetura es cierta:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} k^n & nk^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}k^{n-2} \\ 0 & k^n & nk^{n-1} \\ 0 & 0 & k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^{n+1} & (n+1)k^n & \frac{(n+1)n}{2}k^{(n+1)-2} \\ 0 & k^{n+1} & (n+1)k^n \\ 0 & 0 & k^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, efectivamente,

$$A^n = \begin{pmatrix} k^n & nk^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}k^{n-2} \\ 0 & k^n & nk^{n-1} \\ 0 & 0 & k^n \end{pmatrix}.$$

9. Explique en qué consiste la técnica del pivote parcial aplicada al método de Gauss para resolver un sistema lineal $Ax = b$ de n ecuaciones y n incógnitas e indique cuál es su objetivo.

Solución: en la iteración k del método de Gauss, la técnica del pivote parcial consiste en buscar entre los elementos de la columna k aquel que tenga **mayor valor absoluto para colocarlo en la posición** (k, k) mediante el oportuno intercambio de filas. Después se utilizará como pivote para hacer ceros todos los elementos situados por debajo.

El objetivo de la técnica del pivote parcial es disminuir la ampliación de los errores de redondeo al **evitar** que en las operaciones de pivoteo (hacer ceros por debajo del pivote) **se divida por números muy pequeños que produzcan factores muy grandes** que propagan y amplifican los errores en cuestión.

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) halle las matrices F , L y U de la factorización $FA = LU$ con pivote parcial.
 b) Determine las tres matrices de pivoteo, P^1 , P^2 y P^3 , que se utilizan en la factorización. ¿Qué relación hay entre L y estas tres matrices?

Solución:

1. **Factorización** $FA = LU$.

a) Primera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:

1) Se busca el pivote de la primera columna y se intercambian las filas correspondientes:

$$F^1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Se hacen cero los elementos de la primera columna por debajo del pivote con $m_{21} = 1/2$, $m_{31} = -1/2$ y $m_{41} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Segunda etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:

1) Se busca el pivote de la segunda columna y se intercambian las filas correspondientes:

$$F^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

2) En este caso los elementos de la segunda columna por debajo del pivote ya son cero, por lo tanto $m_{32} = 0$ y $m_{42} = 0$

c) Tercera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:

1) Se busca el pivote de la tercera columna y se intercambian las filas correspondientes (en este caso no hay cambio de filas porque el pivote ya se encuentra en la tercera fila, $F^3 = I_4$)

$$F^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

2) Se hacen cero los elementos de la tercera columna por debajo del pivote con $m_{43} = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{41} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{42} & -m_{43} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F = F^3 F^2 F^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificándose $FA = LU$.

Observación: En la primera columna de L se han intercambiado $-m_{41}$ y $-m_{21}$, esto es debido a que en los cambios de filas de las etapas posteriores se intercambian las filas 2 y 4. En el siguiente apartado se justifica este intercambio con más detalle.

2. a) **Matrices de pivoteo.** La matriz de pivoteo P^k es una matriz elemental tal que al **premultiplicar** a otra matriz A se obtiene una nueva matriz A' tal que A' es el resultado de realizar la k -ésima etapa de la triangularización gaussiana (haciendo ceros por debajo del pivote a_{kk}) en A . Por tanto

1)

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe como, efectivamente,

$$P^1 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe como, efectivamente,

$$P^2 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

3)

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe como, efectivamente,

$$P^3 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

b) **Relación entre L y las matrices de pivoteo.** Una vez obtenidas las matrices de pivoteo y las matrices elementales de cambio de fila, la triangularización gaussiana se puede representar mediante un producto de matrices:

$$P^3 F^3 P^2 F^2 P^1 F^1 A = U. \quad (1)$$

Observe que

$$F^2 P^1 = P_{2 \leftrightarrow 4}^1 F^2, \quad (2)$$

donde

$$P_{2 \leftrightarrow 4}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F^3 P^2 P_{2 \leftrightarrow 4}^1 = P^2 P_{2 \leftrightarrow 4}^1 F^3. \quad (3)$$

En este caso ni P^2 ni $P_{2 \leftrightarrow 4}^1$ se modifican porque F^3 es la matriz identidad. Si F^3 hubiera sido la matriz elemental que intercambia las filas 3 y 4 al premultiplicar por ella, entonces, para pasar F^3 a la derecha, habría que haber intercambiado los elementos m_{31} y m_{21} en $P_{2 \leftrightarrow 4}^1$ y los elementos m_{32} y m_{42} (son los dos cero en este caso) en P^2 .

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$P^3 P^2 P_{2 \leftrightarrow 4}^1 F^3 F^2 F^1 A = U \Rightarrow F^3 F^2 F^1 A = (P^3 P^2 P_{2 \leftrightarrow 4}^1)^{-1} U$$

de donde se deduce que $F = F^3 F^2 F^1$ y

$$L = (P^3 P^2 P_{2 \leftrightarrow 4}^1)^{-1} = (P_{2 \leftrightarrow 4}^1)^{-1} (P^2)^{-1} (P^3)^{-1}.$$

que es la relación entre L y las matrices de pivoteo. Si se desarrolla el producto anterior se obtiene la matriz L calculada en el apartado anterior:

$$L = (P_{2 \leftrightarrow 4}^1)^{-1} (P^2)^{-1} (P^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{41} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ -m_{21} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & -m_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{43} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{41} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{42} & -m_{43} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Determine el número de operaciones de coma flotante (FLOPs) que se necesitan para realizar las siguientes operaciones en una matriz A , cuadrada e inversible, de dimensión 100:
- Reemplazar la fila 7 por ella misma más la fila 1 multiplicada por un escalar.
 - Suponiendo que se estuviera realizando la triangularización gaussiana de la matriz A y se hubiera completado la etapa $k = 6$ (se habrían obtenido ceros por debajo de los pivotes $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$ y $(6,6)$), ¿cuántas FLOPs se necesitan para completar la etapa $k = 7$?
 - Suponiendo que A fuera la matriz de coeficientes del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y se utilizara el método de Gauss para resolverlo, ¿cuántas FLOPs habría que realizar para despejar la incógnita x_{58} en el proceso de remonte.

Solución:

- a) La operación que hay que realizar es

$$a_{7j} = a_{7j} + \alpha a_{1j} \quad j = 1, \dots, 100$$

que para completarla es necesario realizar 100 sumas y 100 multiplicaciones. Por lo tanto el número total de FLOPs necesarias para realizar esta operación elemental es 200.

- b) En la etapa $k = 7$ hay que realizar las $100 - 7 = 93$ operaciones elementales siguientes:

$$F_i = F_i + m_{i7}F_7 \quad i = 8, \dots, 100$$

y en cada una de las 93 operaciones elementales anteriores se realizan 93 sumas y 93 multiplicaciones:

$$a_{ij} = a_{ij} + m_{i7}a_{7j} \quad j = 8, \dots, 100.$$

Por otro lado hay que tener en cuenta que para calcular los 93 coeficientes

$$m_{i7} = -a_{i7}/a_{77} \quad i = 8, \dots, 100$$

hay que realizar 93 divisiones. Por lo tanto, en total, hay que realizar

$$2 \times 93^2 + 93 = 17391 \text{ FLOPs.}$$

- c) Despejando x_{58} se obtiene

$$x_{58} = \frac{b_{58} - \sum_{k=59}^{100} a_{58,k}x_k}{a_{58,58}},$$

en donde se realizan $100 - 58$ multiplicaciones, $100 - 58$ sumas y una división. En total

$$2 \times 42 + 1 = 85 \text{ FLOPs.}$$

2. Determinantes

1. ¿Cuáles deben ser los valores de i y k para que el producto

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

aparezca con el signo $+$ en el desarrollo del determinante de una matriz $A \in M_7(\mathbb{R})$.

Solución:

$$\begin{aligned} \det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_7} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{7\sigma(7)} = & +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}a_{66}a_{77} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}a_{67}a_{76} \\ & +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{57}a_{65}a_{76} + \cdots - a_{17}a_{26}a_{35}a_{44}a_{53}a_{62}a_{71}. \end{aligned}$$

El desarrollo del determinante de A consta de $7! = 5040$ sumandos de la forma $\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{7\sigma(7)}$ en donde $\varepsilon(\sigma)$ representa el signo de la permutación σ . El producto del enunciado se puede ordenar de la forma

$$a_{1i}a_{24}a_{31}a_{47}a_{55}a_{63}a_{7k}$$

Por lo tanto en este ejercicio se trata de determinar los valores de i y k que hacen que el signo de la permutación $i41753k$ sea positivo. En primer lugar hay que tener en cuenta que i y k únicamente pueden tomar (cada uno de ellos) los valores 2 y 6 (debido a que los índices de la permutación no se pueden repetir: en los términos del desarrollo de un determinante aparece un representante de cada fila y columna y solamente uno). En consecuencia solo hay dos permutaciones posibles:

$$2417536 \rightarrow 7 \text{ inversiones} \rightarrow \text{permutación impar} \rightarrow \varepsilon(\sigma) = -,$$

$$6417532 \rightarrow 14 \text{ inversiones} \rightarrow \text{permutación par} \rightarrow \varepsilon(\sigma) = +.$$

Por lo tanto la solución es $i = 6$, $k = 2$.

Observación: En una permutación $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ se dice que hay una inversión si para $i < j$ se verifica $\sigma(i) > \sigma(j)$. Para contar el número total de inversiones se empieza por $\sigma(1)$ (el número situado más a la izquierda de la permutación) y se anotan las inversiones con respecto a los números situados a la derecha, a continuación se sigue con $\sigma(2)$ y así sucesivamente hasta llegar a $\sigma(n)$ (el número situado más a la derecha). A lo largo del proceso se cuentan **únicamente** las inversiones con respecto a los números **situados a la derecha**. Sumando el número de inversiones que tiene cada número con respecto a los que están a su derecha se tiene el número total de inversiones de la permutación. Cuando el número de inversiones es impar se dice que la permutación es impar y su signo ($\varepsilon(\sigma)$) es negativo, cuando es par la permutación es par y su signo es positivo.

2. Encuentre los sumandos que, conteniendo al factor a_{32} , aparecen con el signo $+$ en el desarrollo de un determinante de una matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$.

Solución: los sumandos que contienen al factor a_{32} son de la forma

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{32}a_{4\sigma(4)}$$

donde $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4)$ pueden tomar los valores 1, 3, 4. Por lo tanto hay $3! = 6$ permutaciones posibles:

$$1423, \quad 3124, \quad 4321, \quad 1324, \quad 3421, \quad 4123$$

teniendo las tres primeras un número de inversiones par y las otras tres un número impar. Entonces los sumandos que, conteniendo al factor a_{32} , aparecen con el signo $+$ en el desarrollo de un determinante de una matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ son:

$$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}, \quad a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

3. Calcule el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 & (x_5)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 & (x_5)^3 \\ (x_1)^4 & (x_2)^4 & (x_3)^4 & (x_4)^4 & (x_5)^4 \end{pmatrix}.$$

Solución: realizando operaciones elementales en la matriz A :

(Se le resta a cada fila la anterior multiplicada por x_1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) & x_5(x_5 - x_1) \\ 0 & (x_2)^2(x_2 - x_1) & (x_3)^2(x_3 - x_1) & (x_4)^2(x_4 - x_1) & (x_5)^2(x_5 - x_1) \\ 0 & (x_2)^3(x_2 - x_1) & (x_3)^3(x_3 - x_1) & (x_4)^3(x_4 - x_1) & (x_5)^3(x_5 - x_1) \end{vmatrix} =$$

(Se desarrolla el determinante por la primera columna)

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) & x_5(x_5 - x_1) \\ (x_2)^2(x_2 - x_1) & (x_3)^2(x_3 - x_1) & (x_4)^2(x_4 - x_1) & (x_5)^2(x_5 - x_1) \\ (x_2)^3(x_2 - x_1) & (x_3)^3(x_3 - x_1) & (x_4)^3(x_4 - x_1) & (x_5)^3(x_5 - x_1) \end{vmatrix}$$

(Se divide cada columna por $(x_k - x_1)$, con $k = 2, 3, 4, 5$ y se aplica recursivamente el mismo procedimiento hasta llegar a un determinante de orden dos)

$$\begin{aligned} \prod_{1 < k \leq 5} (x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 & (x_5)^2 \\ (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 & (x_5)^3 \end{vmatrix} &= \prod_{1 < k \leq 5} (x_k - x_1) \prod_{2 < k \leq 5} (x_k - x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_3)^2 & (x_4)^2 & (x_5)^2 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 < k \leq 5} (x_k - x_1) \prod_{2 < k \leq 5} (x_k - x_2) \prod_{3 < k \leq 5} (x_k - x_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{1 < k \leq 5} (x_k - x_1) \prod_{2 < k \leq 5} (x_k - x_2) \prod_{3 < k \leq 5} (x_k - x_3)(x_5 - x_4) = \prod_{1 \leq j < k \leq 5} (x_k - x_j). \end{aligned}$$

3. Espacios vectoriales

1. Demuestre que el conjunto de las matrices simétricas de coeficientes reales de orden n ($S_n(\mathbb{R})$) es un s.e.v. del espacio vectorial de las matrices cuadradas de coeficientes reales de orden n ($M_n(\mathbb{R})$).

Solución: hay que demostrar que cualquier combinación lineal de matrices simétricas es también una matriz simétrica:

$$\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}) \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t = \alpha A + \beta B$$

y, por lo tanto, $\alpha A + \beta B \in S_n(\mathbb{R})$.

2. Siendo $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -3)^t$, $\mathbf{v}_3 = (3, 1, -7)^t$ y $\mathbf{v}_4 = (5, 2, -11)^t$; determine si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

Solución: para que S sea un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ hay que demostrar, en primer lugar, que $S \subset \mathbb{R}^3$ (trivial: los cuatro vectores son vectores de tres componentes y por lo tanto pertenecen a $\mathbb{R}^3$) y, en segundo lugar, que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de S : existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

o, lo que es lo mismo, que el siguiente sistema tiene solución $\forall (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -7 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Realizando operaciones elementales en la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & x_1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & x_2 \\ 1 & -3 & -7 & -11 & x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & x_1 \\ 0 & -2 & -5 & -8 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -4 & -10 & -16 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & x_1 \\ 0 & -2 & -5 & -8 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo que el sistema únicamente será compatible para aquellos vectores de $\mathbb{R}^3$ que verifican $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. En consecuencia S no es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ porque existen vectores de $\mathbb{R}^3$ que no se pueden expresar como combinación lineal de vectores de S .

3. Determine las coordenadas del vector $(1, 3, 6)_{\{\mathbf{u}_i\}}^t$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{u}_i\}$ está formada por los vectores $(1, 2, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$, $(-1, 0, 2)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$ y $(2, 1, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$.

Solución: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{u}_i\}$ en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3)_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ a coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$. Entonces, aplicando el cambio de base al vector $(1, 3, 6)_{\{\mathbf{u}_i\}}^t$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

4. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que dos se considera la base

$$B = \{p_1(t) = 1 + t, p_2(t) = t + t^2, p_3(t) = 1 + 2t + 2t^2\}.$$

¿Cuáles son las coordenadas del polinomio $p(t) = (1, 1, -1)_B^t$ en la base $\{1, t, t^2\}$?

Solución: llamando B_0 a la base $\{1, t, t^2\}$,

$$p(t) = (1, 1, -1)_B^t = p_1(t) + p_2(t) - p_3(t) = 1 + t + t + t^2 - 1 - 2t - 2t^2 = -t^2 = (0, 0, -1)_{B_0}.$$

5. Dadas tres bases de un espacio vectorial V de dimensión n : $B_1 = \{\mathbf{e}_i\}$, $B_2 = \{\mathbf{u}_i\}$ y $B_3 = \{\mathbf{w}_i\}$, exprese las coordenadas de un vector cualquiera de V en la base B_3 en función de sus coordenadas en la base B_1 , si se conoce que la relación entre las bases B_1 y B_2 es:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j$$

y la relación entre las bases B_2 y B_3 es

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} \mathbf{w}_j.$$

Solución: un vector cualquiera $\mathbf{u} \in V$ se puede expresar como:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{w}_i$$

Denotando $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A^{-1} = (a_{ji}^{-1})$, $B^{-1} = (b_{ji}^{-1})$ y reemplazando los $\mathbf{e}_i$ y los $\mathbf{w}_i$ en función de los $\mathbf{u}_i$ se tiene

$$\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji}^{-1} \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^n z_i \sum_{j=1}^n b_{ji}^{-1} \mathbf{u}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ji}^{-1} x_i = \sum_{i=1}^n b_{ji}^{-1} z_i \quad (j = 1, \dots, n) \Rightarrow$$

$$z_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{kj} b_{ji}^{-1} x_i \quad (k = 1, \dots, n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}_{B_3} = BA^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1}.$$

También se puede resolver matricialmente. Con los datos del enunciado nos están dando el cambio de base de B_2 a B_1 y de B_2 a B_3 :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{B_2}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}_{B_3} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{B_2}.$$

Despejando $(y_1, \dots, y_n)^t$ de la primera expresión y sustituyéndola en la segunda se tiene

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}_{B_3} = BA^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B_1}.$$

6. Dado un espacio vectorial V de dimensión cuatro y un s.e.v de V , W , de dimensión 3, del que se conoce una base:

$$B = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

determine unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de W .

Solución:

- Ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x} \in W \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 + \gamma \mathbf{u}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha & & + 2\gamma \\ x_2 = \alpha & + \beta & + \gamma \\ x_3 = & + \beta & + \gamma \\ x_4 = \alpha & & \end{cases} \quad (4)$$

- Ecuaciones implícitas

Eliminando los parámetros α , β y γ de las ecuaciones paramétricas anteriores se obtiene una ecuación implícita de V :

$$\begin{aligned} 4^{\text{a}} \text{ ecuación} &\rightarrow \alpha = x_4 \\ 1^{\text{a}} \text{ ecuación} &\rightarrow \gamma = \frac{x_1}{2} - \frac{x_4}{2} \\ 3^{\text{a}} \text{ ecuación} &\rightarrow \beta = x_3 - \frac{x_1}{2} + \frac{x_4}{2} \end{aligned}$$

sustituyendo en la 2^a ecuación $\rightarrow x_2 = x_4 + x_3 \rightarrow x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

Observación 1: El sistema de ecuaciones paramétricas es compatible determinado, tiene una única solución: las tres coordenadas (α, β, γ) del vector $\mathbf{x}$ de W respecto a la base B . Para obtener el sistema de ecuaciones implícitas se despejan los parámetros de las ecuaciones linealmente independientes (en este caso la 1^a, la 3^a y la 4^a) y se sustituyen en las restantes (en este caso una sola, la 2^a). El sistema de ecuaciones implícitas es siempre homogéneo y determina las condiciones (en nuestro caso solo una) que deben cumplir las coordenadas de un vector de V para pertenecer a W . Si se conoce la dimensión del subespacio, p (en este caso $p = 3$), **se sabe a priori el número de ecuaciones implícitas:** $r = n - p$, siendo n la dimensión del espacio de referencia (en este caso $n = 4$).

Observación 2: Un sistema de ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial no es único, cualquier otro **sistema equivalente** es válido como sistema de ecuaciones implícitas del subespacio en cuestión. Por ejemplo, en este ejercicio, la ecuación $2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$ también vale como ecuación implícita de W . Lo mismo sucede con el sistema de ecuaciones paramétricas, tampoco es único, cualquier sistema de ecuaciones paramétricas **formado a partir de una base cualquiera del subespacio en cuestión** es válido, por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha & & + \gamma \\ x_2 = 2\alpha & + \beta & + \gamma/2 \\ x_3 = & + \beta & + \gamma/2 \\ x_4 = 2\alpha & & \end{cases}$$

también vale como sistema de ecuaciones paramétricas de W .

Observación 3: El proceso (que se ha utilizado en este ejercicio) de obtener las ecuaciones implícitas despejando los parámetros de las ecuaciones paramétricas linealmente independientes para después introducirlos en las restantes puede ser engorroso en el caso de subespacios de dimensión elevada y bases con pocos ceros en sus coordenadas. Para evitar errores en estos casos es aconsejable resolver

el sistema de ecuaciones paramétricas (4) por el método de Gauss (trabajando directamente con la matriz ampliada de (4)):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Las tres primeras ecuaciones permiten despejar los parámetros α , β y γ en función de x_1 , x_2 , x_3 y x_4 pero esto no es lo que se pide en el ejercicio. Lo que se pide es hallar la ecuación implícita, para ello hay que fijarse en la cuarta ecuación: para que el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ pertenezca a W es condición necesaria y suficiente que el sistema (4) sea compatible y para ello es necesario y suficiente que $-x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Por lo tanto esta última ecuación sería una ecuación implícita de W .

7. Dados los s.e.v de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\} \text{ y } W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\},$$

Halle:

- Unas ecuaciones paramétricas y unas ecuaciones implícitas de $W_1 + W_2$.
- Unas ecuaciones implícitas de $W_1 \cap W_2$.

Solución:

a)

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \right\} \Rightarrow \text{Base de } W_1 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \text{Base de } W_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La unión de las bases de W_1 y W_2 es un sistema generador de $W_1 + W_2$. Por lo tanto

$$W_1 + W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \text{Base de } W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En consecuencia $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

Ecuaciones paramétricas:

$$W_1 + W_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \end{cases} \right\}$$

No hay ecuaciones implícitas porque **todos** los vectores de $\mathbb{R}^3$ pertenecen a $W_1 + W_2$. Observe que si se eliminan los parámetros de las paramétricas no queda ninguna ecuación dependiente en la que sustituir los valores de los parámetros.

- Para que un vector pertenezca a $W_1 \cap W_2$ tiene que pertenecer a W_1 y W_2 . Por tanto tendrá que verificar la ecuación implícita de W_1 y la ecuación implícita de W_2 :

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

8. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle (1, 0, 0, 0, 0)^t, (1, 1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, 0, 1, 0)^t, (2, 3, 0, 1, 0)^t \rangle, \\ U_2 &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0, x_3 - x_5 = 0 \}, \end{aligned}$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^5$, halle unas ecuaciones implícitas de

a) $U_1 + U_2$,

b) $U_1 \cap U_2$.

Solución:

a) A partir del sistema generador de U_1 se obtiene una base de U_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Base de } U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y a partir de las implícitas de U_2 una base de U_2 :

$$U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 = \alpha - \beta + \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases} \right\} \Rightarrow \text{Base de } U_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Uniendo las bases de U_1 y U_2 se obtiene un sistema generador de $U_1 + U_2$:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\Rightarrow \text{Base de } U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Ecuaciones paramétricas de $U_1 + U_2$:

$$U_1 + U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \delta \\ x_5 = \gamma \end{cases} \right\}$$

y a partir de las paramétricas se obtienen las ecuaciones implícitas (en este caso una sola, $1 = 5 - 4$) despejando los parámetros de las cuatro primeras ecuaciones y reemplazándolos en la quinta:

$$U_1 + U_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / x_3 - x_5 = 0 \}.$$

- b) Los vectores de $U_1 \cap U_2$ tienen que verificar a la vez las ecuaciones implícitas de U_1 y las de U_2 . Unas ecuaciones paramétricas de U_1 se obtienen a partir de su base y a partir de las paramétricas de U_1 se obtienen unas ecuaciones implícitas:

$$U_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \gamma \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow U_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

Uniendo las ecuaciones implícitas de U_1 y U_2 y eliminando las linealmente independientes se tendrán las ecuaciones implícitas buscadas:

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Por lo tanto $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$. Dato que se conocía a priori por la fórmula de Grassman: $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \rightarrow 2 = 3 + 3 - 4$.

Ejercicios del final del capítulo

1. (**Ejercicio 3**) Indique si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se indican en cada apartado:

- a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solución: es un subespacio vectorial porque

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha v_1 + \beta v_1 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in W_1.$$

- b) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 1\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Solución: no es un subespacio vectorial porque sumando dos vectores de W_2 se obtiene otro vector que no pertenece a W_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_4 + v_4 \end{pmatrix}.$$

- c) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución: no es un subespacio vectorial porque se pueden encontrar combinaciones lineales de vectores de W_3 que no pertenecen a W_3 :

$$(-1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 - v_1 \\ -u_2 - v_2 \end{pmatrix}.$$

2. (**Ejercicio 10**) Sea $W = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ y sea $\mathbf{v} = (2, -1, -1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t \in W$. Se pide:

a) Comprobar que $B_W = \{(-1, 0, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t, (-1, 3, -2)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t\}$ es una base de W .

Solución: hay que demostrar que

1) B_W es un conjunto linealmente independiente. Para ello habrá que demostrar que el sistema homogéneo

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admite únicamente la solución trivial $(\alpha, \beta)^t = (0, 0)^t$. Como

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el rango de la matriz de coeficientes es **dos** y la única solución del sistema es $(\alpha, \beta)^t = (0, 0)^t$.

Observación: se llegaría a la misma conclusión calculando el rango de la matriz de coeficientes traspuesta (cuyas filas son las coordenadas de los dos vectores de B_W)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) B_W es un sistema generador de W . Para que B_W sea un sistema generador hay que demostrar, en primer lugar, que $B_W \subset W$ (trivial: los dos vectores de B_W verifican que la suma de sus coordenadas es igual cero) y, en segundo lugar, que cualquier vector de W se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B_W :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -u_1 - u_2 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar que α y β existen, se comprueba que el sistema anterior es compatible:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & u_1 \\ 0 & 3 & u_2 \\ 1 & -2 & -u_1 - u_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & u_1 \\ 0 & 3 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

como efectivamente lo es al coincidir los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, concluimos que es un sistema generador.

Observación 1: se podría haber comprobado a la vez que B_W es un conjunto linealmente independiente y un sistema generador y, por lo tanto, una base, verificando (tras comprobar $B_W \subset W$) que el sistema (5), además de compatible, es **compatible determinado**, lo que implica que los coeficientes α y β son **únicos**.

Observación 2: W está definida mediante **una** ecuación implícita, lo que implica que su dimensión es **dos** ($\dim(W) = \dim(\mathbb{R}^3) - r$, con $r = n^0$ de ecuaciones implícitas linealmente independientes de W). Sabiendo que la dimensión de W es dos no es necesario comprobar que B_W es un sistema generador de W , bastaría con comprobar que los dos vectores de B_W son linealmente independientes ya que un conjunto de dos vectores linealmente independientes de un subespacio vectorial de dimensión dos siempre es un sistema generador del subespacio.

- b) Hallar las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto de B_W .

Solución: si se resuelve el sistema (5) se obtiene:

$$\begin{aligned}\alpha &= -u_1 - u_2/3, \\ \beta &= u_2/3,\end{aligned}$$

donde α y β serán las coordenadas de un vector cualquiera de W en la base B_W y u_1 y u_2 las dos primeras coordenadas del mismo vector en la base $\{\mathbf{e}_i\}$. Por lo tanto en el caso de $\mathbf{v}$ se tendrá:

$$\left. \begin{aligned}\alpha &= -2 + 1/3 = -5/3 \\ \beta &= -1/3\end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}_{B_W}.$$

- c) Hallar las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto de la base B de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1, 1, 0)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t, (0, 1, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t, (2, 0, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t\}$.

Solución: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base B en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}$, por lo tanto se conoce el cambio de base desde B a $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B.$$

Como hay que hacer el cambio inverso, se resuelve el sistema anterior (compatible determinado si B es una base de $\mathbb{R}^3$) y las soluciones serán las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base B . También se puede invertir la matriz del cambio de base de B a $\{\mathbf{e}_i\}$ (más costoso en operaciones pero con la ventaja de tener la matriz del cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}$ a B calculada para futuros cambios de base) y multiplicarla por $\mathbf{v}_B$. Haciendo esto último:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

4. Aplicaciones lineales

1. Si las soluciones de los sistemas

$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 & & 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 7 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -1 & \text{y} & 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 2 & & 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

son, respectivamente, $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ y $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$, obtenga la solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 17 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 & = & 5 \end{array}$$

utilizando el principio de superposición.

Solución: denotando

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y, sabiendo que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es la imagen de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se tiene que

$$A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2.$$

Por lo tanto si se conocen las soluciones de los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ es posible obtener la solución del sistema $A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2$ sin resolver el sistema, simplemente haciendo $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ (**principio de superposición**).

Para poder aplicar el principio de superposición en este ejercicio hay que comprobar si existen α y β tales que

$$\mathbf{b}_3 = \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Haciendo operaciones en las filas:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 17 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Por lo que la solución del sistema utilizando el principio de superposición es

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{lcl} f : & V & \rightarrow W \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B & \rightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}_{B'} \end{array}$$

y

$$g : \begin{matrix} W \\ \left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \right)_{B'} \end{matrix} \rightarrow U \rightarrow g(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 2y_1 - 2y_2 \\ 2y_3 + 4y_4 \end{pmatrix}_{B''},$$

obtenga la matriz de la aplicación lineal $g \circ f : V \rightarrow U$ asociada a las bases B y B'' .

Solución: matriz asociada a f en las bases B y B' :

$$f : \begin{matrix} V \\ \left(\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right)_B \end{matrix} \rightarrow W \rightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}_{B'} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}^{A_f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = A_f \mathbf{x}.$$

Matriz asociada a g en las bases B' y B'' :

$$g : \begin{matrix} W \\ \left(\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} \right)_{B'} \end{matrix} \rightarrow U \rightarrow g(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 2y_1 - 2y_2 \\ 2y_3 + 4y_4 \end{pmatrix}_{B''} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}}^{A_g} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}_{B'} = A_g \mathbf{y}.$$

Entonces, aplicando la definición de aplicación compuesta:

$$\begin{aligned} g \circ f : V &\rightarrow U \\ \mathbf{x} &\rightarrow g(f(\mathbf{x})) = g(A_f(\mathbf{x})) = A_g A_f \mathbf{x} = A_{g \circ f} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

y la matriz asociada a $g \circ f$ será:

$$A_{g \circ f} = A_g A_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 10 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Estudiar si la aplicación lineal

$$f : V \rightarrow W \quad \text{tal que} \quad f(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, y_3)^t = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1)^t,$$

donde $(y_1, y_2, y_3)^t$ son las coordenadas de $f(\mathbf{x})$ en una cierta base de W y $(x_1, x_2)^t$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en una cierta base de V , es biyectiva, inyectiva pero no biyectiva, sobreyectiva pero no biyectiva o ninguna de las tres cosas.

Solución: expresión matricial de f en las bases de referencia:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

No puede ser sobreyectiva porque $\dim(W) > \dim(V)$ con lo que $\dim(\text{Im } f)$ nunca podrá ser igual a $\dim(W)$. Por otro lado

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 = \dim(\text{Im } f).$$

De donde se deduce que $\dim(\ker f) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im} f) = 2 - 2 = 0$ y por tanto al ser $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, f es **inyectiva pero no biyectiva**.

4. Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow W \\ \mathbf{x} &\rightarrow (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_1)^t \end{aligned}$$

referida a las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W . Dado el vector $\mathbf{z} = \mathbf{e}'_1 + 3\mathbf{e}'_2$, determine la expresión de $f(\mathbf{z})$ en la base B^* , sabiendo que la relación entre las bases $\overline{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ y B es la siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{cases}.$$

Solución: la matriz de la aplicación lineal en las bases B y B^* es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B es

$$P = (\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2)_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Realizando el correspondiente cambio de base, la matriz asociada a f en las bases $\overline{B}$ y B^* es

$$A' = AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y, hallando $f(\mathbf{z})$,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}_{B^*}.$$

5. Espacio euclídeo

1. Dado el espacio euclídeo E , formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 5x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 6x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2 + 2x_3y_3,$$

en donde las coordenadas de los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están expresadas en en cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ de E , determine la expresión de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ en la base

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}.$$

Solución: expresión matricial del producto escalar en la base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}.$$

Cambio de base de la base $\{\mathbf{u}_i\}$ a la base $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = P \mathbf{y}'.$$

El mismo cambio de base trasponiendo los vectores:

$$\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}'^t P^t.$$

Reemplazando las dos igualdades anteriores en la expresión de $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ se obtiene su expresión en la base $\{\mathbf{u}_i\}$:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = (\mathbf{x}')^t P^t G P \mathbf{y}' = (\mathbf{x}')^t G' \mathbf{y}'$$

donde

$$G' = P^t G P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dado el espacio euclídeo E , en el que la matriz de Gram del producto escalar, referida a un cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

halle

- el ángulo que forman los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$,
- el ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 0)_B^t$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 1)_B^t$.

Solución:

a)

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_2\|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 0.4623 \text{ rad},$$

donde

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = g_{12}, \quad \|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1} = \sqrt{g_{11}} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2} = \sqrt{g_{22}}.$$

b)

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{22}{\sqrt{29} \sqrt{18}} \approx 0.9629 \rightarrow \widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \approx \arccos(0.9629) \approx 0.2732 \text{ rad},$$

donde

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 22,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 29 \text{ y}$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 18.$$

3. Dados el espacio euclídeo E , formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 \quad \{\mathbf{e}_i\}$$

y los vectores $\mathbf{a} = (1, 2, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$ y $\mathbf{b} = (1, 1, 0)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$ pertenecientes a E , calcule

a) $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$,b) ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$,c) $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.**Solución:**

a)

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \rightarrow \|\mathbf{a}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$\|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \|\mathbf{b}\| = 1.$$

b)

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \approx 0.5774 \rightarrow \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \approx \arccos(0.5774) \approx 0.9553 \text{ rad},$$

donde

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.$$

c)

$$d(a, b) = \|b - a\| = \|(0, -1, -1)^t\|,$$

$$d(a, b)^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 7$$

y, por lo tanto

$$d(a, b) = \sqrt{7}.$$

4. Dados el espacio euclídeo E , formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3 \quad \{\mathbf{e}_i\},$$

los subespacios

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in E \left/ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} \text{ y } V = \left\{ \mathbf{x} \in E \left/ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

y el vector $\mathbf{a} = (1, 2, 1)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$ perteneciente a E , determine

- a) si $\mathbf{a}$ es ortogonal a W ,
- b) si los subespacios W y V son ortogonales,
- c) una base de $W^\perp$.

Solución:

- a) Base de $W : \{\mathbf{w}_1 = (1, -1, 0)^t\}$. Para que comprobar si $\mathbf{a}$ es ortogonal a W hay que comprobar si es ortogonal a los vectores de una base cualquiera de W :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -7.$$

Por lo tanto $\mathbf{a}$ no es ortogonal a W .

- b) Base de $V : \{\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)^t\}$. Para que dos subespacios sean ortogonales es necesario y suficiente que los vectores de dos bases cualesquiera de cada uno de ellos sean ortogonales entre sí:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Por lo tanto W y V son dos subespacios de E ortogonales entre sí.

- c) $W^\perp$ está formado por los vectores de E que son ortogonales a W :

$$W^\perp = \left\{ \mathbf{x} \in E \left/ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \right. \right\}.$$

$W^\perp$ es un subespacio de dimensión dos y a partir de su ecuación implícita se puede obtener una base que estará formada por dos vectores:

$$\text{Base de } W^\perp : \{(1, 0, 4)^t, (0, 1, -5)^t\}$$

5. En $\mathbb{R}^4$ se considera el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \{\mathbf{e}_i\}.$$

- a) Halle la proyección ortogonal del vector $\mathbf{u} = (4, -1, 0, -2)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$ sobre el subespacio $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ donde $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0, 0)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 0)_{\{\mathbf{e}_i\}}^t$.
- b) Obtenga una base del subespacio ortogonal a V , $V^\perp$, así como la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $V^\perp$.

Solución: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t \mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 x_i y_i.$$

La base de referencia es, por lo tanto, ortonormal: $G = I_4$.

- a) Base de V : $B = \{\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0, 0)^t, \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1, 0)^t\}$. Se calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre V de tres formas distintas:

1) Utilizando la base B :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v}_1 &= 0 \Rightarrow (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1)\alpha_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\alpha_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} \\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{v}_2 &= 0 \Rightarrow (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1)\alpha_1 + (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2)\alpha_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

en donde $\mathbf{u}_1 = \text{Pr}|_V \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ es la proyección ortogonal pedida.

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \quad (G = I_4),$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 6, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 4,$$

el sistema queda

$$\begin{aligned} 8\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 6 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 4 \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 5/3$. La proyección pedida es, por lo tanto,

$$\text{Pr}|_V \mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Hallando una base ortonormal de V :

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1} \mathbf{z}_1 = (1, 0, -1, 0)^t - \frac{1}{4}(2, 2, 0, 0)^t = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0\right)^t, \\ \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1 &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 8, \quad \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 2.\end{aligned}$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ por su norma se obtiene una base ortonormal:

$$\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2.$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 2, 0, 0)^t, \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1/2, -1/2, -1, 0)^t.$$

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\text{Pr}|_V \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_2)\mathbf{c}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{c}_1 + \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 & -5/3 & 0 \end{pmatrix}^t.$$

3) Hallando la matriz de proyección: si se denota

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz de proyección sobre V es

$$P_V = A(A^tGA)^{-1}A^tG = A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{Pr}|_V \mathbf{u} = P_V \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Unas ecuaciones implícitas de $V^\perp$ son:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} &= 0 \rightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} &= 0 \rightarrow x_1 - x_3 = 0\end{aligned}.$$

A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene una base de $V^\perp$: $\{(1, -1, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}$.
Proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $V^\perp$:

$$\mathbf{u} = \text{Pr}|_V \mathbf{u} + \text{Pr}|_{V^\perp} \mathbf{u} \rightarrow \text{Pr}|_{V^\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{Pr}|_V \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -5/3 \\ 5/3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

6. Diagonalización de endomorfismos

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que, respecto a una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$, está definido por las relaciones:

$$f(\mathbf{e}_1) = 9\mathbf{e}_2, \quad f(\mathbf{e}_2) = 9\mathbf{e}_1, \quad f(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_3.$$

Compruebe si f es diagonalizable. En el caso de que lo sea, determine su expresión diagonal, indicando cuál es la nueva base en la cual el endomorfismo tiene una expresión diagonal.

Solución: expresión matricial del endomorfismo:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Ecuación característica:

$$\rho(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 9 & 0 \\ 9 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda - 9)(\lambda + 9) = 0,$$

de donde se obtiene que f tiene tres valores propios distintos: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$ y $\lambda_3 = -9$. Las multiplicidades algebraicas de los tres valores son, por tanto, iguales entre sí e iguales a uno: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_3 , son

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(0, 0, 1)^t\}$ es una base de V_3 con lo que la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 3$ es $s_1 = \dim(V_3) = 1$.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_9 , son

$$\begin{pmatrix} -9 & 9 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1, 1, 0)^t\}$ es una base de V_9 , siendo $s_2 = \dim(V_9) = 1$.

Por último las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{-9} , son

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1, -1, 0)^t\}$ es una base de V_{-9} , siendo $s_3 = \dim(V_{-9}) = 1$.

Al ser

$$\sum_{i=1}^3 m_i = 3 \quad \text{y} \quad m_i = s_i, \quad i = 1, \dots, 3$$

f es diagonalizable.

Observación 1: el que un endomorfismo definido sobre un espacio vectorial de dimensión tres tenga tres valores propios distintos implica que el endomorfismo es diagonalizable (no es necesario hallar

las multiplicidades geométricas para comprobarlo), puesto que siempre se verifica que $1 \leq s_i \leq m_i$, lo que implica que las tres multiplicidades geométricas (s_i) tienen que ser necesariamente uno.

Observación 2: Cuando se estudien los endomorfismos simétricos se comprobará que los endomorfismos que tienen asociada una matriz simétrica de coeficientes reales (como es el caso de este ejercicio) son siempre diagonalizables por semejanza.

La expresión diagonal es:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = D\mathbf{x}'$$

referida a la base de $\mathbb{R}^3$ formada por tres vectores propios:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La relación entre la matriz diagonal D y la matriz original A es $D = P^{-1}AP$ con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dado el endomorfismo

$$f : \begin{matrix} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B & \rightarrow & f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + ix_2 \\ ix_1 + 2x_2 \end{pmatrix}_B \end{matrix},$$

estudie si f es diagonalizable o no y en el caso de que lo sea determine sus valores y subespacios propios y la expresión del endomorfismo diagonalizado.

Solución: expresión matricial del endomorfismo:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Ecuación característica:

$$\rho(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & i \\ i & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - i^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

de donde se obtiene que f tiene dos valores propios distintos: $\lambda_1 = 2+i$ y $\lambda_2 = 2-i$. Las multiplicidades algebraicas de los dos valores son, por tanto, iguales entre sí e iguales a uno: $m_1 = m_2 = 1$. Como las multiplicidades geométricas de los valores propios no pueden ser mayores que las algebraicas y no pueden ser cero porque entonces no serían valores propios, se verifica $m_1 = s_1 = m_2 = s_2 = 1$ y f es diagonalizable.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{2+i} , son

$$\begin{pmatrix} 2 - (2+i) & i \\ i & 2 - (2+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1, 1)^t\}$ es una base de V_{2+i} con lo que se verifica que la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 2+i$ es $s_1 = \dim(V_{2+i}) = 1$.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{2-i} , son

$$\begin{pmatrix} 2 - (2 - i) & i \\ i & 2 - (2 - i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1, -1)^t\}$ es una base de V_{2-i} con lo que se verifica que la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2 - i$ es $s_2 = \dim(V_{2-i}) = 1$.

La expresión diagonal de f es:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & 2 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = D\mathbf{x}'$$

referida a la base de $\mathbb{C}^2$ formada por dos vectores propios:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La relación entre la matriz diagonal D y la matriz original A es $D = P^{-1}AP$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Dado el endomorfismo

$$f : \begin{matrix} \mathbb{C}^4 & \rightarrow & \mathbb{C}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B & \rightarrow & f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} ax_1 + ax_2 \\ ax_2 \\ ax_3 + x_4 \\ -x_3 - ax_4 \end{pmatrix}_B \end{matrix},$$

en donde $a \in \mathbb{R}$, estudie en función de a si f es diagonalizable o no y en el caso de que lo sea determine sus valores y subespacios propios y la expresión del endomorfismo diagonalizado.

Solución: expresión matricial del endomorfismo:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

Ecuación característica:

$$\rho(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & a & 0 & 0 \\ 0 & a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -a - \lambda \end{vmatrix} = -(a - \lambda)^2(\lambda^2 - a^2 + 1) = 0,$$

de donde se obtiene que f tiene tres valores propios distintos: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = \sqrt{a^2 - 1}$ y $\lambda_3 = -\sqrt{a^2 - 1}$. Las multiplicidades algebraicas de los tres valores son $m_1 = 2$ y $m_2 = m_3 = 1$.

a) $a \neq 0$.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_a , son

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto, al ser el rango de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones implícitas igual a tres: $s_1 = \dim(V_a) = 4 - 3 = 1 < m_1$, lo que implica que si $a \neq 0$, f **no es diagonalizable**.

b) $a = 0$ ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$).

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_0 , son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, 0, 0)^t\}$ es una base de V_0 , siendo $s_1 = \dim(V_0) = 2 = m_1$, lo que implica que si $a = 0$, f **es diagonalizable** puesto que al ser $m_2 = m_3 = 1$ necesariamente $s_2 = s_3 = 1$.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_i , son

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(0, 0, 1, i)^t\}$ es una base de V_i , con lo que se comprueba que, efectivamente, $s_2 = \dim(V_i) = 1$.

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{-i} , son

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(0, 0, 1, -i)^t\}$ es una base de V_{-i} , con lo que se comprueba que, efectivamente, $s_3 = \dim(V_{-i}) = 1$.

La expresión diagonal de f es:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = D\mathbf{x}'$$

referida a la base de $\mathbb{C}^4$ formada por dos vectores propios:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

La relación entre la matriz diagonal D y la matriz original A es $D = P^{-1}AP$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}.$$

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & \delta & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

- a) determine los valores de α, β, γ y δ para que A y A' sean semejantes,
 b) con los valores de α, β, γ y δ obtenidos en el apartado anterior, halle una matriz regular (invertible) P de dimensión tres tal que $PA' = AP$.

Solución:

- a) $\lambda_1 = -1$ ($m_1 = 2$) y $\lambda_2 = 2$ ($m_2 = 1$) son los dos valores propios de A si A' es semejante a A . Para que A sea diagonalizable por semejanza se tiene que verificar

$$\begin{aligned} m_1 &= s_1 = 2, \\ m_2 &= s_2 = 1. \end{aligned}$$

Imponiendo las dos condiciones anteriores se obtendrán los valores de α, β, γ y δ :

- Para que $s_1 = \dim(V_{-1})$ sea igual a dos es necesario que el rango de $A - \lambda_1 I = A + I$ sea igual a uno:

$$\begin{aligned} A + I &= \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \beta & \gamma \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & \delta & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & \delta & 3 \\ \alpha + 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 3\beta & 3\gamma - 3(\alpha + 1) \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\delta \neq 0} \\ &\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 3\gamma - 3(\alpha + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, por lo tanto, es necesario que $\delta = 0$, $\beta = 0$ y $3\gamma - 3(\alpha + 1) = 0 \rightarrow \gamma = \alpha + 1$. Observe que hay que fijarse en la penúltima matriz equivalente, la última (que solo es válida para $\delta \neq 0$) tiene siempre rango mayor que uno.

- Para que $s_2 = \dim(V_2)$ sea igual a uno es necesario que el rango de $A - \lambda_2 I = A - 2I$ sea igual a dos:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & 0 & \gamma \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ \alpha - 2 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que $\gamma = 0$, lo que, a su vez, implica que $\alpha = \gamma - 1 = -1$.

En consecuencia para que A y A' sean semejantes es necesario y suficiente que

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{y} \quad \delta = 0.$$

Comprobación:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1 - \lambda & 3 \\ 3 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 + \lambda)[-(1 + \lambda)(2 - \lambda)] = (1 + \lambda)^2(2 - \lambda) = 0,$$

con lo que, efectivamente, A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = -1$ ($m_1 = 2$) y $\lambda_2 = 2$ ($m_2 = 1$) iguales a los de A' y, al ser

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

la dimensión de V_{-1} es dos, con lo que $s_1 = \dim(V_{-1}) = 2$ y A es diagonalizable por semejanza siendo A y A' dos matrices semejantes.

b) Se pide la matriz P tal que:

$$A' = P^{-1}AP,$$

matriz cuyas tres columnas serán las coordenadas de tres vectores propios de A que se obtienen uniendo las bases de V_{-1} y V_2 :

$$V_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + 3x_3 = 0\} \rightarrow \text{Base de } V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} 3x_1 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Base de } V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Diagonalice ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

sabiendo que $\lambda_1 = -2$ es un valor propio de A . Debe obtener la matriz diagonal semejante a A , D , y la matriz ortogonal de cambio de base utilizada, P ($D = P^{-1}AP$ y $P^t = P^{-1}$).

Solución: en primer lugar se calculan los valores propios y los subespacios propios de A .

El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6 - \lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98.$$

Sabiendo que $\lambda = -2$ es un valor propio de A y, por lo tanto, una raíz de $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda - 7)^2.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 7$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz A es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos. A continuación se obtienen las ecuaciones implícitas de V_{-2} y V_7 , comprobando que, efectivamente, $s_1 = \dim(V_{-2}) = 1$ y $s_2 = \dim(V_7) = 2$:

$$V_{-2} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\},$$

$$V_7 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}.$$

La matriz D semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Para hallar una matriz de cambio de base ortogonal se unen dos bases ortonormales de los dos subespacios propios de A :

$$\text{Base de } V_{-2} : \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Base de } V_7 : \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$$

$$\text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

La base ortonormal de V_7 se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una matriz de cambio de base ortogonal es

$$P = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

Verificándose

$$D = P^{-1}AP \quad \text{y} \quad P^t = P^{-1}.$$

Observación: La matriz P no es única. Escogiendo bases distintas de los subespacios propios o cambiando el orden en la aplicación del método de Gram-Schmidt se obtienen matrices de cambio de base ortogonales distintas.

6. Diagonalice ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

sabiendo que $\lambda_1 = 6$ es un valor propio de A . Debe obtener la matriz diagonal semejante a A , D , y la matriz ortogonal de cambio de base utilizada, P ($D = P^{-1}AP$ y $P^t = P^{-1}$).

Solución: en primer lugar se calculan los valores propios y los subespacios propios de A .

El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda + 54.$$

Sabiendo que $\lambda = 6$ es un valor propio de A y, por lo tanto, una raíz de $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda + 3)^2.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -3$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz A es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos. A continuación se obtienen las ecuaciones implícitas de V_6 y V_{-3} , comprobando que, efectivamente, $s_1 = \dim(V_6) = 1$ y $s_2 = \dim(V_{-3}) = 2$:

$$V_6 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\},$$

$$V_{-3} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}.$$

La matriz D semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para hallar una matriz de cambio de base ortogonal se unen dos bases ortonormales de los dos subespacios propios de A :

$$\text{Base de } V_6 : \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Base de } V_{-3} : \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$$

$$\text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

La base ortonormal de V_{-3} se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una matriz de cambio de base ortogonal es

$$P = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

Verificándose

$$D = P^{-1}AP \quad \text{y} \quad P^t = P^{-1}.$$

Observación: La matriz P no es única. Escogiendo bases distintas de los subespacios propios o cambiando el orden en la aplicación del método de Gram-Schmidt se obtienen matrices de cambio de base ortogonales distintas.

7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

calcule A^{13} . Sugerencia: diagonalice A por semejanza.

Solución: El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1).$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. A continuación se obtienen las ecuaciones implícitas de V_1 y V_3 para determinar las multiplicidades geométricas de λ_1 y λ_2 :

$$V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{array} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0 \right\}.$$

Por lo tanto $s_1 = \dim(V_1) = 1$ y $s_2 = \dim(V_3) = 2$ y A es diagonalizable por semejanza al verificarse $m_1 = s_1 = 1$ y $m_2 = s_2 = 2$. La matriz diagonal semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Uniendo las bases de los subespacios propios se obtiene una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios:

$$\text{Base de } V_1 : \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Base de } V_3 : \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Base de } \mathbb{R}^3 = \text{Base de } V_1 \cup \text{Base de } V_3 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

En esta base de vectores propios, el endomorfismo representado por A en la base de referencia original tiene una expresión diagonal representada por la matriz D , verificándose que

$$A = PDP^{-1}, \tag{6}$$

con

$$P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si en la ecuación (6) elevamos a 13 ambos miembros queda:

$$A^{13} = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^{13}P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3188645 & 0 & -3188644 \\ 0 & 1594323 & 0 \\ 1594323 & 0 & 1594323 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios del final del capítulo

1. (**Ejercicio 7**) Dos empresas fabricantes de automóviles (A y B) controlan el mercado de un país repartiéndoselo al 60 % y 40 % respectivamente. Este año en el mercado se mueven treinta mil millones de euros. Si los compradores de la marca A son cada año fieles en un 30 % y se cambian cada año a la otra marca un 70 % y en el caso de la marca B , son fieles el 40 % y optan por la otra marca un 60 %. ¿Cómo se repartirán el mercado al cabo de 10 años, suponiendo que la fidelidad a ambas marcas permanece constante? Si se quiere estudiar el reparto del mercado en años sucesivos se observa que la variación es muy pequeña, prácticamente despreciable (el reparto del mercado permanece cuasi-constante al cabo de un cierto número de años)? Cómo se justificaría este comportamiento desde el punto de vista de la diagonalización de endomorfismos?

- $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k)^t$; x_1^k : ventas de coches (en euros) de la empresa A en el año k , x_2^k : ventas de coches de la empresa B en el año k .

Aplicación lineal que transforma la distribución de ventas de un año al siguiente:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= 0.3x_1^k + 0.6x_2^k \\ x_2^{k+1} &= 0.7x_1^k + 0.4x_2^k \end{aligned} \Rightarrow \mathbf{x}^{k+1} = A\mathbf{x}^k \text{ con } A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{x}^0 = (18 \times 10^9, 12 \times 10^9)^t$. La distribución de las ventas dentro de 10 años será: $\mathbf{x}^{10} = A^{10}\mathbf{x}^0$. Para calcular A^{10} se diagonaliza por semejanza la matriz A :

Resolviendo la ecuación característica $|A - \lambda I| = \lambda^2 - \frac{7}{10}\lambda - \frac{3}{10} = 0$ se obtienen los valores propios, $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad algebraica 1 ($m_1 = 1$) y $\lambda_2 = -\frac{3}{10}$ de multiplicidad algebraica 1 ($m_2 = 1$).

Se hallan los subespacios propios:

$$V_{\lambda_1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 / (A - I)\bar{x} = 0\} =$$

$$\left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} -0.7 & 0.6 \\ 0.7 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Del sistema homogéneo anterior se obtiene una base de V_{λ_1} :

$$\text{Base de } V_{\lambda_1} : \{\mathbf{c}_1 = (1, 7/6)^t\}.$$

La multiplicidad geométrica de λ_1 es 1 (dato que ya se conocía puesto que la multiplicidad algebraica de λ_1 es 1).

$$V_{\lambda_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / (A + 0.3I)\mathbf{x} = 0\} =$$

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Resolviendo el sistema homogéneo se obtiene una base de V_{λ_2} :

$$\text{Base de } V_{\lambda_2} : \{\mathbf{c}_2 = (-1, 1)^t\}.$$

La multiplicidad geométrica de λ_2 es 1 (dato que ya se conocía puesto que la multiplicidad algebraica de λ_2 es 1).

Al coincidir las multiplicidades algebraicas con las multiplicidades geométricas A es diagonalizable por semejanza (dato que ya se conocía al ser los dos valores propios distintos) y uniendo las bases de los dos subespacios propios se obtiene una base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios: $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$. En esta base la expresión del endomorfismo será:

$$f(\mathbf{y}) = (y_1, -0.3y_2)^t.$$

Si se denomina D a la matriz (diagonal) asociada a f en la base $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, se verifica:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

en donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7/6 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{c}_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ ($P = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)_{\{\mathbf{e}_i\}}$). Si se despeja A de la expresión anterior se obtiene $A = PDP^{-1}$. Elevando A a 10:

$$\begin{aligned} A^{10} &= (PDP^{-1})^{10} = PD^{10}P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & (-0.3)^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{pmatrix} \approx \\ &= \begin{pmatrix} 0.461541641 & 0.4615357362 \\ 0.538458359 & 0.5384642638 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la distribución de ventas (en euros) después de 10 años es:

$$\mathbf{x}^{10} = A^{10}\mathbf{x}^0 \approx \begin{pmatrix} 0.461541641 & 0.4615357362 \\ 0.538458359 & 0.5384642638 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \times 10^9 \\ 12 \times 10^9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 13846178374 \\ 16153821625 \end{pmatrix}$$

- ¿Qué sucede a largo plazo? Para responder a la pregunta se calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^n$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (PDP^{-1})^n = P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} D^n \right) P^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ -7/13 & 6/13 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \times 10^9 \\ 12 \times 10^9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 13846153846 \\ 16153846153 \end{pmatrix},$$

que sería el límite al que tiende la distribución de ventas. Observe que ya en los primeros diez años se ha obtenido una distribución muy similar a la de equilibrio.

- Justificación desde el punto de vista de la diagonalización de endomorfismos: si se expresa el endomorfismo en la base formada por los vectores propios se tiene

$$\mathbf{y}^k = D^k \mathbf{y}^0 = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-0.3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-0.3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}}.$$

Por lo tanto el vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{c}_1$, es el que determina la distribución de equilibrio:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/6 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \rightarrow \text{distribución de ventas} = \begin{pmatrix} 1/(13/6) \approx 0.4615385 \\ 7/6/(13/6) \approx 0.5384615 \end{pmatrix}.$$

Expresando el resultado anterior en la base original:

$$\mathbf{x}^\infty = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2) \begin{pmatrix} y_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} = y_1^0 \mathbf{c}_1 = y_1^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 7/6 \end{pmatrix} = \frac{6}{13}(x_1^0 + x_2^0) \begin{pmatrix} 1 \\ 7/6 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \approx \begin{pmatrix} 13846153846 \\ 16153846153 \end{pmatrix}.$$

(la misma distribución que habíamos obtenido trabajando en la base original desde el principio)

- Resumiendo: a largo plazo la distribución de las ventas será:

Ventas de la empresa $A \approx 46.15385\% \approx 13846153846$

Ventas de la empresa $B \approx 53.84615\% \approx 16153846153$.

7. Formas bilineales y formas cuadráticas

1. Siendo q una forma cuadrática definida sobre un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial V y f su forma polar asociada, demuestre que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Solución: se sabe que $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ y $q(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Por otro lado

$$q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + 2f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

por ser f simétrica. Despejando $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de la expresión anterior se obtiene

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

2. Considere la forma cuadrática $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(\mathbf{x}) = 3(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3,$$

en donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de los vectores de V en una cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

- a) Expresar matricialmente q en la base B .
 b) Expresar matricialmente q en la base $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sabiendo que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{u}_3 &= 9\mathbf{e}_1 - 18\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Solución:

a)

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}_B$$

- b) A partir de la relación entre las bases B' y B se pueden expresar las coordenadas de cualquier vector de V en la base B en función de sus coordenadas en la base B' :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'}.$$

Expresando las coordenadas en la base B en función de las coordenadas en la base B' en la expresión matricial de q se obtiene:

$$q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}')^t P^t A P \mathbf{x}' = (\mathbf{x}')^t A' \mathbf{x}'.$$

Verificándose que la matriz asociada a q en la base B' es

$$A' = P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 9 & -18 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

3. Dada la forma cuadrática $q : V \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + (x_3)^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3,$$

en donde (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de los vectores de V en una cierta base B , determine una base de $\ker q$ e indique si q es degenerada o no.

Solución:

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B.$$

Por lo tanto

$$\ker q = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in V \mid \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

de donde se deduce que $\ker q$ tiene dimensión uno y una base de $\ker q$ es, por ejemplo,

$$\text{Base de } \ker q : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\}.$$

Al ser $\ker q \neq \{0\}$, q es una forma cuadrática degenerada.

4. Sea $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya expresión en una cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V es

$$q(\mathbf{x}) = 3(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

Obtenga, utilizando operaciones elementales en su matriz asociada, una base de V en la que la matriz de q sea una matriz diagonal. Clasifique q , indicando su signatura.

Solución: expresión matricial de q :

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}_B$$

A continuación se realiza la triangularización gaussiana de la matriz A con la particularidad de que después de cada operación elemental sobre las **filas** de A se realiza la misma operación sobre las **columnas** de A . El proceso se detendrá cuando se obtenga una matriz diagonal que será congruente con la original. En paralelo se realizan las mismas operaciones elementales **solo sobre las filas** de la matriz unidad, obteniéndose la traspuesta de la matriz de cambio de base.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_3 - F_1]{3F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3C_3 - C_1]{3C_2 - 2C_1} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & | & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3 - 6F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & | & 9 & -18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{3C_3 - 6C_2} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 81 & | & 9 & -18 & 9 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia la matriz asociada a q en la base $B' = \{(1, 0, 0)^t, (-2, 3, 0)^t, (9, -18, 9)^t\}$ es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = 3(x'_1)^2 - 3(x'_2)^2 + 81(x'_3)^2.$$

q es indefinida y su signatura es $(2, 1)$.

5. Sea $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya expresión en una cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V es

$$q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + \frac{3}{2}(x_2)^2 + \frac{3}{2}(x_3)^2 - x_2x_3.$$

- Obtenga mediante diagonalización ortogonal una base de V en la que la matriz de q sea una matriz diagonal. Clasifique q especificando su signatura.
- Indique cuál es la forma canónica de q . Obtenga una base de V respecto a la cual la expresión de q sea la de su forma canónica.

Solución:

- a) Expresión matricial de q :

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}_B.$$

Para diagonalizar ortogonalmente q en primer lugar hay que calcular los valores propios y los subespacios propios de A .

El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 - \lambda & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)((3/2 - \lambda)^2 - 1/4) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz A es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos. A continuación se obtienen las ecuaciones implícitas de V_2 y V_1 , comprobando que, efectivamente, $s_1 = \dim(V_2) = 1$ y $s_2 = \dim(V_1) = 2$:

$$V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{array}{l} -x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\},$$

$$V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Para hallar una matriz de cambio de base ortogonal se unen dos bases ortonormales de los dos subespacios propios de A :

$$\text{Base de } V_2 : \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\} \rightarrow \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Base de } V_1 : \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\} \rightarrow \\ \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\}. \end{aligned}$$

La base ortonormal de V_1 se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Por lo tanto una matriz de cambio de base ortogonal es

$$P = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Verificándose

$$D = P^{-1}AP, \quad P^t = P^{-1} \quad \text{y} \quad D = P^tAP.$$

La matriz D semejante y congruente con A es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la expresión diagonal de q en la base $B' = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = 2(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2.$$

A partir de su expresión diagonal se concluye que es una forma cuadrática definida positiva y su signatura es $(3, 0)$.

b) La forma canónica de q es:

$$q(\mathbf{x}) = (x''_1)^2 + (x''_2)^2 + (x''_3)^2,$$

que es la expresión de q en la base

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}_B \right\}.$$

Ejercicios del final del capítulo

1. Sea $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal (no simétrica) definida mediante

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 7x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_1y_3 - 5x_2y_3 + 3x_3y_2$$

En una cierta base B de V . Considérese la aplicación $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Expresar matricialmente g y q en la base B .

Solución: expresión matricial de g :

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t A_g \mathbf{y}.$$

Por otro lado

$$q(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3(x_1)^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t A_q \mathbf{x},$$

ya que la matriz de una forma cuadrática coincide con la de su forma polar que es siempre simétrica. Observe que siempre

$$A_q = \frac{1}{2} (A_g + A_g^t).$$

2. Dada la forma cuadrática real

$$q(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3,$$

definida sobre un espacio vectorial V de dimensión tres y expresada en una cierta base B de V ,

- determine su expresión matricial en la base B ,
- halle una base respecto a la cual su matriz asociada sea diagonal y clasifíquela.

Solución:

a)

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

en la base B .

- Se diagonaliza q realizando operaciones elementales en las filas y las columnas de su matriz asociada en la base B :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -11 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 - 3C_1 \\ C_3 - 2C_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -11 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{8F_3 - 11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -11 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 904 & | & 17 & -11 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{8C_3 - 11C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 904 & | & 17 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia la matriz asociada a q en la base $B' = \{(1, 0, 0)^t, (-3, 1, 0)^t, (17, -11, 8)^t\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 904 \end{pmatrix}.$$

$$q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 904 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = (x'_1)^2 - 8(x'_2)^2 + 904(x'_3)^2.$$

q es indefinida y su signatura es $(2, 1)$.

3. Dada la forma cuadrática real

$$q(\mathbf{x}) = 4(x_1)^2 + 4(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

definida sobre un espacio vectorial V de dimensión tres y expresada en una cierta base B de V ,

- determine su expresión matricial en la base B .
- Sabiendo que $\lambda = 6$ es un valor propio de q , diagonalícela ortogonalmente hallando una base respecto a la cual su matriz asociada sea diagonal y clasifíquela.

Solución

a)

$$q(\mathbf{x}) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

en la base B .

- Para diagonalizar ortogonalmente q en primer lugar hay que calcular los valores propios y los subespacios propios de A .

El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 4 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54.$$

Sabiendo que $\lambda = 6$ es un valor propio de A y, por lo tanto, una raíz de $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)^2.$$

Los valores propios de A son, por tanto, $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz A es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos. A continuación se obtienen las ecuaciones implícitas de V_6 y V_3 , comprobando que, efectivamente, $s_1 = \dim(V_6) = 1$ y $s_2 = \dim(V_3) = 2$:

$$V_6 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle/ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Para hallar una matriz de cambio de base ortogonal se unen dos bases ortonormales de los dos subespacios propios de A :

$$\text{Base de } V_6 : \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\} \rightarrow \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Base de } V_3 : \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right\} \rightarrow \\ \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\}. \end{aligned}$$

La base ortonormal de V_3 se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Por lo tanto una matriz de cambio de base ortogonal es

$$P = (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Verificándose

$$D = P^{-1}AP, \quad P^t = P^{-1} \quad \text{y} \quad D = P^tAP.$$

La matriz D semejante y congruente con A es

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la expresión diagonal de q en la base $B' = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}_{B'} = 6(x'_1)^2 + 3(x'_2)^2 + 3(x'_3)^2.$$

A partir de su expresión diagonal se concluye que es una forma cuadrática definida positiva y su signatura es $(3, 0)$.

Observación: La solución a esta ejercicio no es única: existen infinitas bases ortonormales de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ en las que la expresión de q es $6(x_1)^2 + 3(x_2)^2 + 3(x_3)^2$. En particular la base obtenida en esta solución es distinta a la que aparece en la solución de las presentaciones siendo las dos correctas. Lo que siempre hay que comprobar es que las columnas de la matriz P constituyan una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ ($P^t = P^{-1}$) y que sean las coordenadas de tres vectores propios de A .