Álgebra

1^{er} Curso, Grado en Ingeniería de la Energia
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas y Energía

Universidad Politécnica de Madrid

Exámenes resueltos del curso 2021-22

Este documento recopila los exámenes resueltos de Álgebra Lineal (Álgebra según el nombre oficial del la asignatura en el plan de estudios) correspondientes al curso 2021-22, tanto de la convocatoria ordinaria (incluyendo la evaluación continua) como de la extraordinaria.

2024 Ultano Kindelán Bustelo

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **Grupo:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **30 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con la respuesta correcta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **entregar esta hoja**, colocándola en el montón correspondiente al grupo en el que está matriculado.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (2 ptos.) Suponga que se conoce la relación entre dos bases de un espacio vectorial W de dimensión tres:

$$\begin{array}{l}\mathbf{u}_1 = t_{11}\mathbf{u}'_1 + t_{21}\mathbf{u}'_2 + t_{31}\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_2 = t_{12}\mathbf{u}'_1 + t_{22}\mathbf{u}'_2 + t_{32}\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 = t_{13}\mathbf{u}'_1 + t_{23}\mathbf{u}'_2 + t_{33}\mathbf{u}'_3\end{array},$$

Exprese las coordenadas de un vector $\mathbf{w}$ del espacio vectorial W en la base $\{\mathbf{u}'_i\}$ en función de sus coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$.
En las respuestas se utiliza la notación

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = T^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = T^{t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = \left(T^{t}\right)^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

*(*) **Explicación:*** $\mathbf{v} = (w_1, w_2, w_3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = (w'_1, w'_2, w'_3)^t_{\{\mathbf{u}'_i\}}$*:*

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

(2) (2 ptos.) Sean $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ y $T = \{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_1\}$ dos conjuntos de vectores de un espacio vectorial V. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

☐ *(a)* T siempre es linealmente independiente.

☐ *(b)* Si S es linealmente independiente, también lo es T.

☐ *(c)* [=] T siempre es linealmente dependiente.

☐ *(d)* T y S generan el mismo subespacio vectorial.

*(*) **Explicación:***

1. *Si S es **linealmente dependiente**, el subespacio generado por S tendrá dimensión **menor que cuatro** y entonces cualquier conjunto de cuatro vectores de dicho subespacio tendrá que ser linealmente dependiente. Por lo tanto en este caso T será linealmente dependiente.*

2. *Si S es **linealmente independiente**, generará un subespacio (V_S) de dimensión **cuatro** al que pertenecen los vectores de T. Si se calcula el rango de T expresando sus vectores en la base de V_S formada por los vectores de S:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   *se comprueba que es igual a **tres** y, en consecuencia, T es un sistema linealmente dependiente.*

Se concluye por tanto que T siempre es linealmente dependiente.

(3) (2 ptos.) Determine las coordenadas del vector $(-1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $\{\mathbf{u}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{u}_i\}$ está formada por los vectores $(2,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(a)* [=] $-3/2, 2$.
☐ *(b)* $0, 2$.
☐ *(c)* $-2, 1$.
☐ *(d)* $-1/2, 5/2$.

(*) ***Explicación****: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{u}_i\}$ en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}$:*

$$\left(\begin{array}{cc}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\end{array}\right)_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ a coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$. En el enunciado se pide el cambio inverso (transformar coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ a coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$), aplicando el cambio inverso al vector $(-1,2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) (2 ptos.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \langle (1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t \rangle \text{ y } U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0\},$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^4$, halle unas ecuaciones implícitas de $U_1 + U_2$.

☐ *(a)* $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
☐ *(b)* $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - 3x_2 = 0\}$.
☐ *(c)* [=] $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_3 = 0\}$.
☐ *(d)* $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0\}$.

(*) ***Explicación****: en primer lugar se obtienen las bases de U_1 y U_2: base de U_1: $B_{U_1} = \{(1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t\}$ porque los dos vectores que generan U_1 son linealmente independientes, base de U_2: $B_{U_2} = \{(2,1,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$. Esta segunda base se ha obtenido a partir de las ecuaciones paramétricas de U_2, que a su vez se obtienen a partir de las implícitas:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{array}.$$

Para hallar una base de $U + V$ hay que partir de $B_{U_1} \cup B_{U_2}$ que es un sistema generador de $U_1 + U_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como el rango de $B_{U_1} \cup B_{U_2}$ es tres, los tres vectores cuyas coordenadas en la base de referencia coinciden con las tres primeras filas de la matriz anterior forman una base de $U_1 + U_2$: $B_{U_1+U_2} = \{(1,0,0,0)^t, (0,1,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$ y $\dim(U_1 + U_2) = 3$. A partir de la base se obtienen unas ecuaciones paramétricas y a partir de estas la ecuación implícita pedida:

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \gamma \end{array} \middle/ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow U_1 + U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **Grupo:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **30 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con la respuesta correcta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **entregar esta hoja**, colocándola en el montón correspondiente al grupo en el que está matriculado.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (2 ptos.) Suponga que se conoce la relación entre dos bases de un espacio vectorial V de dimensión tres:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= s_{11}\mathbf{e}'_1 + s_{21}\mathbf{e}'_2 + s_{31}\mathbf{e}'_3,\\ \mathbf{e}_2 &= s_{12}\mathbf{e}'_1 + s_{22}\mathbf{e}'_2 + s_{32}\mathbf{e}'_3,\\ \mathbf{e}_3 &= s_{13}\mathbf{e}'_1 + s_{23}\mathbf{e}'_2 + s_{33}\mathbf{e}'_3.\end{aligned}$$

Exprese las coordenadas de un vector $\mathbf{v}$ del espacio vectorial V en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ en función de sus coordenadas en la base $\{\mathbf{e}'_i\}$. Tenga en cuenta que en las respuestas se utiliza la notación

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix}.$$

☐ *(a)* [=] $\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S^{-1}\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ v'_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S^{t}\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ v'_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \left(S^{t}\right)^{-1}\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ v'_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = S\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ v'_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}'_i\}}$

*(*) **Explicación:*** $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} = (v'_1, v'_2, v'_3)^t_{\{\mathbf{e}'_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3\end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ v'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ v'_3\end{pmatrix}.$$

(2) (2 ptos.) Indique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

☐ *(a)* [=] La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

☐ *(b)* La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores de V que son linealmente independientes entre sí.

☐ *(c)* La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores que constituyen un conjunto cualquiera de vectores linealmente independientes.

☐ *(d)* La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

*(*) **Explicación**: si un sistema generador de V es un conjunto **linealmente dependiente** se le podrá quitar algún vector sin que deje de ser un sistema generador. Por el contrario, si es un conjunto **linealmente independiente**, al quitarle cualquier vector dejará de ser un sistema generador. Por lo tanto un sistema generador de V formado por **el menor número** de vectores posible es siempre un conjunto de vectores linealmente independiente y, en consecuencia, será una **base** de V. A partir de lo anterior se deduce que la única proposición cierta es "La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V".*

(3) (2 ptos.) Determine las coordenadas del vector $(-1, 2, 3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{u}_i\}$ está formada por los vectores $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

☐ *(a)* [=] $3, 1, 6$.

☐ *(b)* $9/7, 8/7, -4/7$.

☐ *(c)* $6, 7, 3$.

☐ *(d)* $-12/7, 16/7, 13/7$.

*(*) **Explicación**: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{u}_i\}$ en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}$:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ a coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$. Entonces, aplicando el cambio de base al vector $(-1,2,3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(4) (2 ptos.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0\} \text{ y } U_2 = \langle (2,1,1,1)^t, (0,0,0,1)^t \rangle,$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^4$, halle unas ecuaciones implícitas de $U_1 \cap U_2$.

☐ *(a)* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}$.

☐ *(b)* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_3 - x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0\}$.

☐ *(c)* [=] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0\}$.

☐ *(d)* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0\}$.

*(*) **Explicación**: los vectores que pertenecen a $U_1 \cap U_2$ deben verificar a la vez las ecuaciones implícitas de U_1 y las ecuaciones implícitas de U_2. Se conocen las ecuaciones implícitas de U_1, faltan las de U_2. Para obtenerlas se parte de una base de U_2: los dos vectores que forman el sistema generador (es fácil comprobar que son linealmente independientes). A partir de la base se obtienen unas ecuaciones paramétricas y a partir de estas las ecuaciones implícitas de U_2:*

$$U_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha + \beta \end{array} \quad / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

Por lo tanto

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \\ x_1 - 2x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right\} \rightarrow U_1 \cap U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0 \right\}.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1 \end{array}$$

en donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de W. ¿Existen vectores de W que no tengan antecedente por f?

☐ *(a)* Sí, por ejemplo $(2,-1)^t_{B^*}$.
☐ *(b)* Sí, por ejemplo $(0,1)^t_{B^*}$.
☐ *(c)* [=] No porque la aplicación es sobreyectiva
☐ *(d)* No porque la aplicación es inyectiva

(*) ***Explicación****: la matriz asociada a f en las bases B y B^* es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\operatorname{rg}(A) = 2$ *se verifica* $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 = \dim(W)$ *y, por lo tanto, f es sobreyectiva. Al ser sobreyectiva todos los vectores de W tienen antecedente.*

(2) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es A. Si $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$ indique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

☐ *(a)* $\forall \mathbf{u} \in \ker f$, si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{u}$.
☐ *(b)* El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única si $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} f$.
☐ *(c)* [=] $\forall \mathbf{u} \in \ker f$, si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ también es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
☐ *(d)* El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible incluso si $\mathbf{b} \notin \operatorname{Im} f$.

(*) ***Explicación****: si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{u} \in \ker f$ entonces $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$,*

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = \mathbf{b}.$$

(3) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales tal que:

$$(y_1, y_2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3, 2x_1 + x_2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

en donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de W. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ y $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, sabiendo que

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 = 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \end{cases}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 1/2 \\ -3/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$.
☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ *a* $\{\mathbf{e}_i\}$ *es:*

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

y la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}'_i\}$ *a* $\{\mathbf{u}_i\}$ *es:*

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que la matriz asociada a f *en las bases* $\{\mathbf{e}'_i\}$ *y* $\{\mathbf{u}'_i\}$ *es:*

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 1/2 \\ -3/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

(4) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, en el que la matriz de Gram del producto escalar, referida a un cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

halle el coseno del ángulo que forman $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$.

☐ *(a)* $-1/2$. | ☐ *(b)* $2/\sqrt{5}$. | ☐ *(c)* [=] $1/\sqrt{10}$. - | ☐ *(d)* 0.

(*) ***Explicación:***

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3}{||\mathbf{e}_2||||\mathbf{e}_3||} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

(5) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \ _{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{a} = (1,2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

1. *Base de* S : $\{\mathbf{a}_1 = (1,0,1)^t, \mathbf{a}_2 = (0,1,1)^t\}$.

2. Base ortonormal de S:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^t,$$

$$\|\mathbf{a}_1\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = (-1,1,0)^t,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (0,1,1)^t - (1,0,1)^t = (-1,1,0)^t,$$

$$(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

3. Se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada,

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t.$$

(6) (1 pto.) Dados una matriz cuadrada, A, de dimensión n y un vector, $\mathbf{v}$, también de dimensión n, se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^k y su valor propio asociado es el propio λ.

☐ *(b)* [=] Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^k y su valor propio asociado es λ^k.

☐ *(c)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^k y su valor propio asociado es $\lambda^{1/k}$.

☐ *(d)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ entonces $\mathbf{v}$ no es un vector propio de A^k.

*(*) **Explicación**: si λ es un valor propio de A y $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado a λ, se verifica:*

$$A^k\mathbf{v} = \underbrace{(AA...A)}_{k}\mathbf{v} = \underbrace{(AA...A)}_{k-1}\underbrace{A\mathbf{v}}_{\lambda\mathbf{v}} = \underbrace{(AA...A)}_{k-2}\underbrace{A\lambda\mathbf{v}}_{\lambda^2\mathbf{v}} = \ldots = A\lambda^{k-1}\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v},$$

de donde se deduce que λ^k es un valor propio de A^k y $\mathbf{v}$ es un vector propio de A^k asociado a λ^k. En consecuencia los valores propios de A^k son los de A elevados a k y los vectores propios de A son iguales a los de A^k aunque asociados a valores propios distintos.

(7) (1 pto.) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, elija el par de matrices D y P que verifican $D = P^{-1}BP$.

☐ *(a)* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* [=] $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: ecuación característica:*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2] - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = \lambda(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0,$$

de donde se obtiene que los valores propios de B son $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{-1}, son

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1,0,-1)^t\}$ es una base de V_{-1}. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_1, son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(0,1,0)^t\}$ es una base de V_1. Por último las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_3, son

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1,0,1)^t\}$ es una base de V_3. En consecuencia $D = P^{-1}BP$ con

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8) (1 pto.) Dada la matriz $A \in S_4(\mathbb{R})$ (matriz cuadrada, simétrica, de coeficientes reales y dimensión cuatro), de la que se sabe que sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ (doble), $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -1$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

☐ *(a)* A es definida negativa.

☐ *(b)* A es definida positiva.

☐ *(c)* [=] A es indefinida.

☐ *(d)* A es semidefinida positiva.

(*) ***Explicación****: al tener valores propios positivos y negativos, la matriz A es una matriz indefinida.*

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal de la que se conocen las imágenes de los dos vectores de una base de V expresadas en función de una base de W: $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ y $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W.

☐ *(a)* [=] $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: la matriz asociada a f en las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ tiene como columnas las imágenes de los vectores de B expresadas en la base B^*.*

(2) (1 pto.) Considere la aplicación lineal $f : V \to W$, cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuánto valen $\mathrm{rg}(f)$ y $\dim(\ker(f))$?

☐ *(a)* [=] $\mathrm{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 0$.

☐ *(b)* $\mathrm{rg}(f) = 2, \dim(\ker(f)) = 2$.

☐ *(c)* $\mathrm{rg}(f) = 2, \dim(\ker(f)) = 1$.

☐ *(d)* $\mathrm{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 1$.

(*) ***Explicación****:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $\mathrm{rg}(A) = 3$ *y por lo tanto* $\mathrm{rg}(f) = 3$. *Por otro lado* $\dim(V) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = 3$, *lo que implica que* $\dim(\ker(f)) = 0$.

(3) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

en donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ y $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$, sabiendo que

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}'_1 - 2\mathbf{e}'_2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_2 \end{cases}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ *a* $\{\mathbf{e}_i\}$ *es:*

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

y la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}'_i\}$ *a* $\{\mathbf{u}_i\}$ *es:*

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

de donde se deduce que la matriz asociada a f *en las bases* $\{\mathbf{e}'_i\}$ *y* $\{\mathbf{u}'_i\}$ *es:*

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, en el que la matriz de Gram del producto escalar, referida a un cierta base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

halle el coseno del ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} = (1,2,0)^t_B$ y $\mathbf{v} = (0,1,0)^t_B$.

☐ *(a)* [=] $4/\sqrt{17}$. | ☐ *(b)* $8/\sqrt{17}$. | ☐ *(c)* $4/\sqrt{68}$. | ☐ *(d)* $8/\sqrt{28}$.

(*) ***Explicación:***

$$\cos(\widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||} = \frac{8}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

El producto escalar y las normas se han calculado utilizando la matriz de Gramm:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 17$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

(5) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \;{}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{a} = (1,3,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [=] $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 0 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

1. *Base de* S : $\{\mathbf{a}_1 = (0,1,1)^t, \mathbf{a}_2 = (1,0,1)^t\}$.

2. *Base ortonormal de* S:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^t,$$

$$\|\mathbf{a}_1\|^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = (1,-1,0)^t,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (1,0,1)^t - \frac{2}{2}(0,1,1)^t = (1,-1,0)^t,$$

$$(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

3. *Se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada,*

$$\mathrm{Pr}|_S \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^t.$$

(6) (1 pto.) Dados una matriz cuadrada e invertible, A, de dimensión n y un vector, $\mathbf{v}$, también de dimensión n, se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* [=] Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^{-1} asociado al valor propio $1/\lambda$.

☐ *(b)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ ($\lambda \neq 1$), entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^{-1} asociado al mismo valor propio λ.

☐ *(c)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^{-1} solo si A es una matriz simétrica.

☐ *(d)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\mathbf{v}$ no es un vector propio de A^{-1}.

*(*) **Explicación**: si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ entonces $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, de donde se deduce, multiplicando en ambos lados de la igualdad anterior por A^{-1}, que $A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v}$, lo que equivale a $A^{-1}\mathbf{v} = (1/\lambda)\mathbf{v}$. Queda demostrado entonces que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A^{-1} y que su valor propio asociado es $1/\lambda$.*

(7) (1 pto.) Sea el endomorfismo $f : V \to V$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Respecto a f se puede afirmar lo siguiente (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$) :

☐ *(a)* f tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 0$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle (1,1,0)^t, (0,1,0)^t \rangle$ y $V_{\lambda_2} = \langle (0,1,0)^t \rangle$.

☐ *(b)* f tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 0$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle (0,0,1)^t, (-1,1,0)^t \rangle$ y $V_{\lambda_2} = \langle (0,1,0)^t \rangle$.

☐ *(c)* [=] f tiene valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle (-1,1,0)^t \rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle (0,0,1)^t \rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle (1,1,0)^t \rangle$.

☐ *(d)* f tiene valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle (0,1,1)^t \rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle (0,1,0)^t \rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle (-1,1,0)^t \rangle$.

(*) ***Explicación****: ecuación característica:*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 2) = 0,$$

de donde se obtiene que los valores propios de f son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_0, son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(-1,1,0)^t\}$ es una base de V_0. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_1, son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(0,0,1)^t\}$ es una base de V_1. Por último las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_2, son

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1,1,0)^t\}$ es una base de V_2.

(8) (1 pto.) Sean V un espacio euclídeo y $f : V \to V$ un endomorfismo simétrico. Indique cuál de las siguientes proposiciones relativas a f es cierta.

☐ *(a)* Los valores propios de f pueden ser complejos con parte imaginaria no nula.

☐ *(b)* $f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

☐ *(c)* [=] Los subespacios propios de f son ortogonales entre sí.

☐ *(d)* Si A es la matriz asociada a f en una base ortonormal, A es una matriz ortogonal.

(*) ***Explicación****: dos vectores propios de un endomorfismo simétrico asociados a valores propios distintos son siempre ortogonales entre sí:*
Si $\mathbf{v} \in V_\lambda$ y $\mathbf{w} \in V_\mu$, se verifica

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \text{ y } f(\mathbf{w}) = \mu \mathbf{w},$$

entonces

$$\mathbf{v}\cdot f(\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot \mu\mathbf{w} = \mu(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$$
$$\mathbf{w}\cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$$

y, al ser el endomorfismo simétrico ($\mathbf{v}\cdot f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot f(\mathbf{v})$)*, se verifica*

$$\mu(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \Leftrightarrow (\mu-\lambda)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = 0.$$

Lo que implica que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **Grupo:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **30 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con la respuesta correcta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **entregar esta hoja**, colocándola en el montón correspondiente al grupo en el que está matriculado.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (2 ptos.) Sean $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de un espacio vectorial, V, definido sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ un vector de V con $a \neq 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

☐ *(a)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es un sistema linealmente dependiente.

☐ *(b)* [=] $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V.

☐ *(c)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es un sistema linealmente independiente pero no es generador de V.

☐ *(d)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V.

*(*) **Explicación**: $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ no puede ser una base de V porque la dimensión de V es tres. Por lo tanto para ver cuál de las otras tres opciones es la correcta hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz que tiene como filas las coordenadas de los tres vectores tiene rango tres, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, al ser la dimensión de V tres, forman una base de V.

(2) (2 ptos.) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{y} \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 = -\lambda, x_2 = 2\lambda, x_3 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Respecto a U y V se puede afirmar que

☐ *(a)* $U + V \neq \mathbb{R}^3$ y $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

☐ *(b)* [=]$U + V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

☐ *(c)* $U + V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$.

☐ *(d)* $U + V \neq \mathbb{R}^3$ y $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$.

*(*) **Explicación**: en primer lugar se obtienen las bases de U y V: base de U: $B_U = \{(1,0,-2)^t, (0,1,3)^t\}$, base de V: $B_V = \{(-1,2,1)^t\}$. Para hallar una base de $U + V$ hay que partir de $B_U \cup B_V$ que es un sistema generador de $U + V$:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

como el rango de $B_U \cup B_V$ es tres, los tres vectores constituyen una base de $U + V$ y $\dim(U + V) = 3$, lo que implica que $U + V = \mathbb{R}^3$. Por otro lado $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$, de donde despejando se obtiene $\dim(U \cap V) = 0$ y por tanto $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.
Resultado al que también se podía haber llegado planteando las ecuaciones implícitas de $U \cap V$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}.$$

Ecuaciones que se han obtenido uniendo las ecuaciones implícitas de U y V (los vectores que pertenecen a la intersección tienen que verificar las ecuaciones implícitas de los dos subespacios a la vez). Se comprueba fácilmente que el sistema homogéneo admite solamente la solución trivial.

(3) (2 ptos.) Determine la expresión del vector $-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, sabiendo que $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{u}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

☐ *(a)* [=] $-(1/3)\mathbf{u}_1 + (4/3)\mathbf{u}_2$.

☐ *(b)* $-5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

☐ *(c)* $-\mathbf{u}_1$.

☐ *(d)* $-3\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$.

(*) ***Explicación****: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base* $\{\mathbf{u}_i\}$ *en función de la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ *a coordenadas en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*. En el enunciado se pide el cambio inverso (transformar coordenadas en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$ *a coordenadas en la base* $\{\mathbf{u}_i\}$*), aplicando el cambio inverso al vector* $(-2,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$*:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

(4) (2 ptos.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\} \text{ y } U_2 = \langle (2,1,-1,1)^t, (0,0,0,1)^t \rangle,$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^4$, halle unas ecuaciones implícitas de $U_1 + U_2$.

☐ *(a)* $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_3 = 0\}$.

☐ *(b)* $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - 3x_2 = 0\}$.

☐ *(c)* [=] $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 + x_3 = 0\}$.

☐ *(d)* $U_1 + U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_4 = 0\}$.

(*) ***Explicación****: en primer lugar se obtienen las bases de* U_1 *y* U_2*: base de* U_1*:* $B_{U_1} = \{(1,0,0,0)^t, (0,1,-1,1)^t\}$*, base que se ha obtenido a partir de las ecuaciones paramétricas de* U_1*, que a su vez se obtienen a partir de las implícitas:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 - x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{rl} x_1 = & \alpha \\ x_2 = & \beta \\ x_3 = & -\beta \\ x_4 = & \beta \end{array}.$$

Base de U_2*:* $B_{U_2} = \{(2,1,-1,1)^t, (0,0,0,1)^t\}$*, porque los dos vectores que generan* U_2 *son linealmente independientes, Para hallar una base de* $U + V$ *hay que partir de* $B_{U_1} \cup B_{U_2}$ *que es un sistema generador de* $U_1 + U_2$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como el rango de $B_{U_1} \cup B_{U_2}$ *es tres, los tres vectores cuyas coordenadas en la base de referencia coinciden con las tres primeras filas de la matriz anterior forman una base de* $U_1 + U_2$*:* $B_{U_1+U_2} = \{(1,0,0,0)^t, (0,1,-1,1)^t, (0,0,0,1)^t\}$ *y* $\dim(U_1 + U_2) = 3$*. A partir de la base se obtienen unas ecuaciones paramétricas y a partir de estas la ecuación implícita pedida:*

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & \alpha \\ x_2 = & \beta \\ x_3 = & -\beta \\ x_4 = & \beta + \gamma \end{array} \middle/ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow U_1 + U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$
$$f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$$

en donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. ¿Existen vectores de W que no tengan antecedente por f?

☐ *(a)* No porque la aplicación es sobreyectiva.
☐ *(b)* [=] Sí, por ejemplo $(0,0,1)^t_{B^*}$.
☐ *(c)* Sí, por ejemplo $(1,1,1)^t_{B^*}$.
☐ *(d)* No porque la aplicación es inyectiva.

(*) ***Explicación****: la matriz asociada a f en las bases B y B^* es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Al ser $\operatorname{rg}(A) = 2$ *se verifica* $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 < \dim(W) = 3$ *y, por lo tanto, f no es sobreyectiva. Al no ser sobreyectiva existen vectores* $\mathbf{y} \in W$ *que no tienen antecedente: todos aquellos que hagan incompatible el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

o, lo que es equivalente, todos aquellos vectores $\mathbf{y} \in W$ *tales que* $\mathbf{y} \notin \operatorname{Im} f$. *Como* $(1,1,1)^t_{B^*}$ *y* $(1,0,-1)^t_{B^*}$ *forman una base de* $\operatorname{Im} f$, *a partir de esta base se pueden obtener unas ecuaciones implícitas de* $\operatorname{Im} f$*:*

$$\operatorname{Im} f = \{\mathbf{y} \in W / y_1 - 2y_2 + y_3 = 0\}.$$

Por lo tanto el vector $(0,0,1)^t_{B^*}$ *no pertenece a* $\operatorname{Im} f$ *y no tiene antecedente en V por f.*

(2) (1 pto.) Considere la aplicación lineal $f : V \to W$, cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

¿Cuánto valen $\operatorname{rg}(f)$ y $\dim(\ker(f))$?

☐ *(a)* [=] $\operatorname{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 1$.
☐ *(b)* $\operatorname{rg}(f) = 2, \dim(\ker(f)) = 2$.
☐ *(c)* $\operatorname{rg}(f) = 2, \dim(\ker(f)) = 1$.
☐ *(d)* $\operatorname{rg}(f) = 3, \dim(\ker(f)) = 0$.

(*) ***Explicación****:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 20 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $\operatorname{rg}(A) = 3$ *y por lo tanto* $\operatorname{rg}(f) = 3$. *Por otro lado* $\dim(V) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = 4$, *lo que implica que* $\dim(\ker(f)) = 1$.

(3) (1 pto.) Considere la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

con $\alpha \in (-\pi, \pi]$. ¿Qué transformación en el plano representa f?

☐ *(a)* $f(\mathbf{x})$ representa un giro de α radianes en el sentido positivo (hacia la izquierda) del vector $\mathbf{x}$.

☐ *(b)* [=] $f(\mathbf{x})$ representa un giro de α radianes en el sentido negativo (hacia la derecha) del vector $\mathbf{x}$.

☐ *(c)* $f(\mathbf{x})$ representa un giro de $\pi/2+\alpha$ radianes en el sentido positivo (hacia la izquierda) del vector $\mathbf{x}$.

☐ *(d)* $f(\mathbf{x})$ representa un giro de 2α radianes en el sentido positivo (hacia la izquierda) del vector $\mathbf{x}$.

*(*) **Explicación**: las coordenadas cartesianas de un vector $\mathbf{x}$ de radio r y que forma un ángulo θ con el eje x son $x_1 = r\cos\theta$ y $x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Por lo tanto:*

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha \\ -\mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\alpha\cos\theta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ r(-\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta-\alpha) \\ r\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia $f(\mathbf{x})$ representa un giro de α radianes en el sentido negativo (hacia la derecha) del vector $\mathbf{x}$.

(4) Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio euclídeo, E, de dimensión 3 que verifica:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1, \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 3$$

y además $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^{\perp}$. Obtenga la matriz del producto escalar respecto de la base B.

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**:*

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 = 1, \\ (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0. \end{cases}$$

Con los dos productos escalares que se acaban de calcular se tienen todos los elementos de la matriz de Gram:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(5) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \;{}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{a} = (1,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 = 0 \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 5/13 & 3/13 & 2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} -3/13 & 5/13 & 0 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} 16/13 & 8/13 & 2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

1. *Base de* S : $\{\mathbf{v}_1 = (0,0,1)^t, \mathbf{v}_2 = (2,1,0)^t\}$.

2. *Base ortonormal de* S:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = (0,0,1)^t,$$

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,1,0)^t,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 = (2,1,0)^t - 0(0,0,1)^t = (2,1,0)^t,$$

$$(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{c}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}.$$

3. *Se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada,*

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_1)\mathbf{c}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_2)\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_1 + \frac{8}{\sqrt{13}}\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{13} & \frac{8}{13} & 2 \end{pmatrix}^t.$$

(6) (1 pto.) Si λ es un valor propio de $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces

☐ *(a)* no se sabe si λ es un valor propio de A^t. Hay que estudiar cada caso particular.

☐ *(b)* λ no es un valor propio de A^t.

☐ *(c)* [=] λ es un valor propio de A^t.

☐ *(d)* λ es un valor propio de A^t solo si A es invertible.

(*) ***Explicación****: como*

$$(A - \lambda I)^t = \left(A^t - \lambda I\right),$$

se verifica

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| = |A^t - \lambda I|.$$

De la igualdad anterior se deduce que

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |A^t - \lambda I| = 0,$$

lo que implica que A *y* A^t *tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos valores propios.*

(7) (1 pto.) Sea el endomorfismo $f : V \to V$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Sabiendo que $\lambda = 1$ es un valor propio de f, se puede afirmar lo siguiente (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$) :

☐ *(a)* $\{(1,1,0)^t, (-1,0,1)^t, (0,1,0)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

☐ *(b)* $\{(-1,1,0)^t, (1,0,1)^t, (0,1,0)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

☐ *(c)* [=] $\{(-1,1,0)^t, (-1,0,1)^t, (-1,-1,1)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

☐ *(d)* $\{(1,1,2)^t, (1,0,1)^t, (-1,-1,1)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

(*) ***Explicación****: ecuación característica de f:*

$$\rho(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0,$$

de donde, sabiendo que $\lambda = 1$ es un valor propio de f, se obtiene:

$$\rho(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

y, por lo tanto los valores propios de f son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_1, son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(-1,1,0)^t, (-1,0,1)^t\}$ es una base de V_1. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_2, son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(-1,-1,1)^t\}$ es una base de V_2.
En consecuencia $(-1,1,0)^t$, $(-1,0,1)^t$ y $(-1,-1,1)^t$ son ***tres*** *vectores propios de f.*

(8) (1 pto.) Si A es una matriz definida positiva de dimensión n, entonces

☐ *(a)* $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \geq 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$.

☐ *(b)* todos los coeficientes de A son estrictamente positivos.

☐ *(c)* [=] $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$.

☐ *(d)* todos los coeficientes de A son no negativos.

(*) ***Explicación****: una matriz definida positiva de dimensión n es una matriz simétrica de coeficientes reales que verifica*

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}).$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **Grupo:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **30 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con la respuesta correcta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **entregar esta hoja**, colocándola en el montón correspondiente al grupo en el que está matriculado.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (0.5 ptos.) Suponga que se conoce la relación entre dos bases de un espacio vectorial W de dimensión tres:

$$\begin{array}{l}\mathbf{u}_1 = t_{11}\mathbf{u}'_1 + t_{21}\mathbf{u}'_2 + t_{31}\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_2 = t_{12}\mathbf{u}'_1 + t_{22}\mathbf{u}'_2 + t_{32}\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 = t_{13}\mathbf{u}'_1 + t_{23}\mathbf{u}'_2 + t_{33}\mathbf{u}'_3\end{array},$$

Exprese las coordenadas de un vector $\mathbf{w}$ del espacio vectorial W en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ en función de sus coordenadas en la base $\{\mathbf{u}'_i\}$. En las respuestas se utiliza la notación $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$.

☐ *(a)* [0.5] $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = T^{-1} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

☐ *(b)* [-0.1] $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = T^{t} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

☐ *(c)* [-0.1] $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = \left(T^{t}\right)^{-1} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

☐ *(d)* [-0.1] $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = T \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}$

*(*) **Explicación**:* $\mathbf{v} = (w_1, w_2, w_3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = (w'_1, w'_2, w'_3)^t_{\{\mathbf{u}'_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}.$$

(2) (0.5 ptos.) Sean $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ y $T = \{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4, 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4\}$ dos conjuntos de vectores de un espacio vectorial V. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

☐ *(a)* [-0.1]T siempre es linealmente independiente.

☐ *(b)* [0.5] Si S es linealmente independiente, también lo es T.

☐ *(c)* [-0.1]T siempre es linealmente dependiente.

☐ *(d)* [-0.1]Si S es linealmente independiente entonces T es linealmente dependiente.

*(*) **Explicación**:*

1. *Si S es **linealmente dependiente**, el subespacio generado por S tendrá dimensión **menor que cuatro** y entonces cualquier conjunto de cuatro vectores de dicho subespacio tendrá que ser linealmente dependiente. Por lo tanto en este caso T será linealmente dependiente.*

2. *Si S es **linealmente independiente**, generará un subespacio (V_S) de dimensión **cuatro** al que pertenecen los vectores de T. Si se calcula el rango de T expresando sus vectores en la base de V_S formada por los vectores de S:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

   *se comprueba que es igual a **cuatro** y, en consecuencia, T es un sistema linealmente independiente.*

Se concluye, por tanto, que si S es linealmente independiente, también lo es T.

(3) (1 pto.) Sabiendo que las coordenadas de los vectores $(-1, 2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ y $(4, 2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ de $\mathbb{R}^2$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ son, respectivamente, $(-3/2, 2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ y $(1, 2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ en la base $\{\mathbf{u}_i\}$, determine la expresión de los dos vectores de la base $\{\mathbf{u}_i\}$ en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}$.

☐ *(a)* [=] $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

☐ *(b)* $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

☐ *(c)* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_2$.

☐ *(d)* $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

*(*) **Explicación**: del enunciado se sabe que:*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} \text{ y } \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}},$$

con

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

Por lo tanto se tienen dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas para hallar los cuatro coeficientes de la matriz de cambio de base:

$$\begin{cases} -3/2a_{11} + 2a_{12} = -1 \\ a_{11} + 2a_{12} = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} -3/2a_{21} + 2a_{22} = 2 \\ a_{21} + 2a_{22} = 2 \end{cases}.$$

Resolviendo los sistemas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) (1 pto.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \langle (0,1,1,1)^t, (0,1,0,1)^t \rangle \text{ y } U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\},$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^4$, halle unas ecuaciones implícitas de $U_1 \cap U_2$.

☐ *(a)* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

☐ *(b)* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - 3x_2 = 0, x_4 = 0, x_3 + x_2 = 0\}$.

☐ *(c)* [=] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.

☐ *(d)* $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0, x_2 = 0, x_4 + x_3 = 0\}$.

*(*) **Explicación**: los vectores que pertenecen a $U_1 \cap U_2$ deben verificar a la vez las ecuaciones implícitas de U_1 y las ecuaciones implícitas de U_2. Se conocen las ecuaciones implícitas de U_2, faltan las de U_1. Para obtenerlas se parte de una base de U_1: los dos vectores que forman el sistema generador (es fácil comprobar que son linealmente independientes). A partir de la base se obtienen unas ecuaciones paramétricas y a partir de estas las ecuaciones implícitas de U_1:*

$$U_1 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha + \beta \end{array} \middle/ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow U_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_4 = 0, x_1 = 0 \right\}.$$

Por lo tanto

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - x_4 &=& 0 \\ x_1 &=& 0 \\ x_1 + x_2 &=& 0 \\ x_3 &=& 0 \end{array} \right\} \rightarrow U_1 \cap U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0 \right\}.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal de la que se conocen las imágenes de los tres vectores de una base de V expresadas en función de una base de W: $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_2$. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de W.

☐ *(a)* [=] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: la matriz asociada a f en las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ tiene como columnas las imágenes de los vectores de B expresadas en la base B^*.*

(2) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal $f : V \to W$ entre dos espacios vectoriales V y W cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es A. Si $\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$ indique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera.

☐ *(a)* $\forall \mathbf{u} \in \ker f$, si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{u}$.

☐ *(b)* El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única si $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} f$.

☐ *(c)* [=] El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible indeterminado si $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} f$.

☐ *(d)* El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible incluso si $\mathbf{b} \notin \operatorname{Im} f$.

*(*) **Explicación**: si $\mathbf{b} \in \operatorname{Im} f$ existirá, al menos, una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que denominamos $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{u} \in \ker f$ ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$) entonces $\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}$ ($\forall \alpha \in \Re$) también es solución del sistema ya que*

$$f(\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) + \alpha f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}) = \mathbf{b}.$$

En consecuencia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible indeterminado.

(3) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales tal que:

$$(y_1, y_2, y_3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}} = f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

en donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ y $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$, sabiendo que

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}'_1 - 2\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 \end{cases}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -5 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} 13/3 & 1/3 \\ 5/3 & -1/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1/2 & -1/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ es:

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}^{-1}_{\{\mathbf{e}'_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

y la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}_i\}$ *a* $\{\mathbf{u}'_i\}$ *es:*

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que la matriz asociada a f *en las bases* $\{\mathbf{e}'_i\}$ *y* $\{\mathbf{u}'_i\}$ *es:*

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 13/3 & 1/3 \\ 5/3 & -1/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) (1 pto.) Sea V un espacio euclídeo de dimensión 3 en el que la matriz de Gram asociada a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dado el subespacio $U = \{\mathbf{x} \in V / x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$, obtenga una nueva base $\{\mathbf{u}_i\}$ tal que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ y $\mathbf{u}_3$ sea ortogonal a U (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$).

☐ *(a)* $\mathbf{u}_1 = (2,-1,0)^t, \mathbf{u}_2 = (0,-1,2)^t, \mathbf{u}_3 = (1,2,1)^t$.

☐ *(b)* [=] $\mathbf{u}_1 = (2,-1,0)^t, \mathbf{u}_2 = (0,-1,2)^t, \mathbf{u}_3 = (0,-2,1)^t$.

☐ *(c)* $\mathbf{u}_1 = (-2,1,0)^t, \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)^t, \mathbf{u}_3 = (1,-2,1)^t$.

☐ *(d)* $\mathbf{u}_1 = (1,-1,0)^t, \mathbf{u}_2 = (1,1,1)^t, \mathbf{u}_3 = (2,-2,1)^t$.

(*) ***Explicación****:* $\mathbf{u}_1$ *y* $\mathbf{u}_2$ *pueden ser dos vectores linealmente independientes cualesquiera de* U*, por ejemplo:* $\mathbf{u}_1 = (2,-1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ *y* $\mathbf{u}_2 = (0,-1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$*. El vector* $\mathbf{u}_3 = (\alpha,\beta,\gamma)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ *tiene que ser ortogonal a* $\mathbf{u}_1$ *y* $\mathbf{u}_2$*:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

De donde se deduce que todos los vectores de la forma $(0,-2\lambda,\lambda)$ *son ortogonales a* U*. Tomando, por ejemplo,* $\lambda = 1$ *se tiene* $\mathbf{u}_3 = (0,-2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(5) (2 ptos.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 \ {}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{b} = (1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* [-0.4] $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.4] $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [-0.4] $\begin{pmatrix} 1/15 & 28/45 & 5/9 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [2] $\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

1. *Base de* S : $\{\mathbf{a}_1 = (1,1,0)^t, \mathbf{a}_2 = (0,1,1)^t\}$.

2. *Base ortonormal de* S:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,1)^t,$$

$$\|\mathbf{a}_1\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-3,2,5)^t,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = (0,1,1)^t - \frac{3}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,0)^t = \frac{1}{5}(-3,2,5)^t,$$

$$(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$\|\mathbf{z}_2\|^2 = \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{30}{5^2}.$$

3. *Se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada,*

$$\mathrm{Pr}|_S\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{u}_1 + \frac{4}{\sqrt{30}}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}^t.$$

(6) (1 pto.) Dados una matriz cuadrada e invertible, A, de dimensión n y un vector, $\mathbf{v}$, también de dimensión n, se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* [=] Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^{-1} asociado al valor propio $1/\lambda$.

☐ *(b)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ ($\lambda \neq 1$), entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^{-1} asociado al mismo valor propio λ.

☐ *(c)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de A^{-1} solo si A es una matriz simétrica.

☐ *(d)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ, entonces el vector $\mathbf{v}$ no es un vector propio de A^{-1}.

(*) ***Explicación****: si* $\mathbf{v}$ *es un vector propio de* A *asociado al valor propio* λ *entonces* $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$*, de donde se deduce, multiplicando en ambos lados de la igualdad anterior por* A^{-1}*, que* $A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\lambda\mathbf{v}$*, lo que equivale a* $A^{-1}\mathbf{v} = (1/\lambda)\mathbf{v}$*. Queda demostrado entonces que* $\mathbf{v}$ *es un vector propio de* A^{-1} *y que su valor propio asociado es* $1/\lambda$*.*

(7) (2 ptos.) Sea el endomorfismo $f : V \to V$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Respecto a V y f se puede afirmar lo siguiente (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$) :

☐ *(a)* [-0.4]$\{(1,0,0)^t, (-1,4,-2)^t, (1,0,0)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

☐ *(b)* [-0.4]$\{(-1,1,0)^t, (-1,4,-2)^t, (1,0,0)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

☐ *(c)* [2] No es posible formar una base de V con vectores propios de f.

☐ *(d)* [-0.4] $\{(-1,4,-2)^t, (1,0,0)^t, (-1,-1,1)^t\}$ es una base de V formada por vectores propios de f.

*(*) **Explicación**: ecuación característica de f:*

$$\rho(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = -(\lambda-3)^2(\lambda+1) = 0$$

y, por lo tanto los valores propios de f son $\lambda_1 = 3$ (doble) y $\lambda_2 = -1$. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{λ_1} son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

*de donde se obtiene que la multiplicidad geométrica de λ_1 (dimensión de V_{λ_1}) es igual a **uno**, distinta de la multiplicidad algebraíca que es **dos**. En consecuencia f no es diagonalizable por semejanza y no es posible encontrar una base de V formada por valores propios.*

(8) (1 pto.) Sean V un espacio euclídeo y $f : V \to V$ un endomorfismo simétrico. Indique cuál de las siguientes proposiciones relativas a f es cierta.

☐ *(a)* Los valores propios de f pueden ser complejos con parte imaginaria no nula.

☐ *(b)* $f(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})\cdot f(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$.

☐ *(c)* [=] Los subespacios propios de f son ortogonales entre sí.

☐ *(d)* Si A es la matriz asociada a f en una base ortonormal, A es una matriz ortogonal.

*(*) **Explicación**: dos vectores propios de un endomorfismo simétrico asociados a valores propios distintos son siempre ortogonales entre sí:*
Si $\mathbf{v} \in V_\lambda$ y $\mathbf{w} \in V_\mu$, se verifica

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \text{ y } f(\mathbf{w}) = \mu\mathbf{w},$$

entonces

$$\mathbf{v}\cdot f(\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mu\mathbf{w} = \mu(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$$
$$\mathbf{w}\cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\cdot\lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$$

y, al ser el endomorfismo simétrico ($\mathbf{v}\cdot f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot f(\mathbf{v})$), se verifica

$$\mu(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) \Leftrightarrow (\mu-\lambda)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) = 0.$$

Lo que implica que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.