Álgebra

1er Curso, Grado en Ingeniería de la Energia
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas y Energía

Universidad Politécnica de Madrid

Exámenes resueltos del curso 2022-23

Este documento recopila los exámenes resueltos de Álgebra Lineal (Álgebra según el nombre oficial del la asignatura en el plan de estudios) correspondientes al curso 2022-23, tanto de la convocatoria ordinaria (incluyendo la evaluación continua) como de la extraordinaria.

2024 Ultano Kindelán Bustelo

Álgebra
ETSI Minas y Energía

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________ **DNI:** ____________

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de* ***80 minutos****.*
- *Rellene* ***completamente*** *los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (****sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda****).*
- *En la parte inferior de la página rellene* ***completamente*** *los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar* ***apagados y encima de la mesa****.*
- *Cuando termine el examen debe* ***arrancar y entregar esta hoja****.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1.5 ptos.) Un parque de atracciones cobra 70€ a los adultos, 20€ a los jóvenes, y 5€ a los niños. Si entran 75 personas y pagan un total de 500€, determine el número de adultos, jóvenes y niños que acceden al parque.
Observación: para resolver el ejercicio se deberá tener en cuenta que la solución está formada por números enteros no negativos.

- ☐ *(a)* [-0.3]2 adultos, 5 jóvenes y 68 niños.
- ☐ *(b)* [1.5] 1 adulto, 4 jóvenes y 70 niños.
- ☐ *(c)* [-0.3]2 adultos, 3 jóvenes y 70 niños.
- ☐ *(d)* [-0.3]1 adulto, 6 jóvenes y 68 niños.

*(*) **Explicación**: llamando x al número de adultos, y al número de jóvenes y z al de niños; se tiene:*

$$\textit{Número total de personas} = x + y + z = 75$$

$$\textit{Coste total de las entradas} = 70x + 20y + 5z = 500$$

y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema será:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 75 \\ 70x+20y+5z & = & 500 \end{array}\right\}.$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 70 & 20 & 5 & 500 \end{pmatrix}.$$

Realizando operaciones elementales en sus filas se obtiene la siguiente matriz escalonada equivalente a la anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 75 \\ 0 & -50 & -65 & -4750 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que el rango de la matriz ampliada es 2 y el rango de la matriz de coeficientes es 2 por lo que el sistema es compatible indeterminado por ser 3 el número de incógnitas. Por consiguiente el sistema tiene infinitas soluciones reales:

$$x = -20 + \tfrac{3}{10}z,$$

$$y = 95 - \tfrac{13}{10}z.$$

Sin embargo no todas las soluciones anteriores son válidas: tal como se dice en la nota del enunciado únicamente son aceptables las soluciones enteras no negativas. Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow z \geq \frac{200}{3} \\ y \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{950}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{200}{3} \leq z \leq \frac{950}{13}.$$

*En el intervalo $[\frac{200}{3}, \frac{950}{13}]$ solamente hay siete números enteros: los que van del 67 al 73. Pero de estos siete enteros solamente hay uno que consigue que x e y sean también enteros: $z = 70$ (para que x e y sean enteros es necesario y suficiente que z sea múltiplo de 10). Por lo tanto el problema tiene una única solución: en el parque de atracciones entran **1** adulto, **4** jóvenes y **70** niños.*

(2) (1.5 ptos.) Respecto a la existencia y unicidad de soluciones del sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 & = & 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

se puede afirmar que

- ☐ *(a)* [-0.3]no existen soluciones.
- ☐ *(b)* [-0.3]existe una única solución.
- ☐ *(c)* [1.5] existen infinitas soluciones dependientes de un parámetro (de una variable libre)
- ☐ *(d)* [-0.3]existen infinitas soluciones dependientes de dos parámetros (de dos variables libres)

*(*) **Explicación**: realizando operaciones elementales en la matriz ampliada del sistema:*

$$A_b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*se deduce que, llamando A a la matriz de coeficientes, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 3 < 4$ (número de incógnitas) y, por lo tanto, el sistema es **compatible indeterminado**: existen infinitas souciones dependientes de un parámetro ($4 - 3 = 1$).*

(3) (1.5 ptos.) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 & (x_5)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 & (x_5)^3 \\ (x_1)^4 & (x_2)^4 & (x_3)^4 & (x_4)^4 & (x_5)^4 \end{pmatrix}.$$

- ☐ *(a)* [1.5] $|A| = \prod_{1 \le j < k \le 5} (x_k - x_j)$
- ☐ *(b)* [-0.3]$|A| = \prod_{1 \le j < k \le 5} (x_j - x_k)$
- ☐ *(c)* [-0.3]$|A| = \prod_{1 \le j < k \le 4} (x_j - x_k)$
- ☐ *(d)* [-0.3]$|A| = \prod_{1 < j < k < 5} (x_k - x_j)$

*(*) **Explicación**: realizando operaciones elementales en la matriz A:*
(Se le resta a cada fila la anterior multiplicada por x_1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) & x_5(x_5 - x_1) \\ 0 & (x_2)^2(x_2 - x_1) & (x_3)^2(x_3 - x_1) & (x_4)^2(x_4 - x_1) & (x_5)^2(x_5 - x_1) \\ 0 & (x_2)^3(x_2 - x_1) & (x_3)^3(x_3 - x_1) & (x_4)^3(x_4 - x_1) & (x_5)^3(x_5 - x_1) \end{vmatrix} =$$

(Se desarrolla el determinante por la primera columna)

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 & x_5 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) & x_5(x_5 - x_1) \\ (x_2)^2(x_2 - x_1) & (x_3)^2(x_3 - x_1) & (x_4)^2(x_4 - x_1) & (x_5)^2(x_5 - x_1) \\ (x_2)^3(x_2 - x_1) & (x_3)^3(x_3 - x_1) & (x_4)^3(x_4 - x_1) & (x_5)^3(x_5 - x_1) \end{vmatrix}$$

(Se divide cada columna por $(x_k - x_1)$, con $k = 2, 3, 4, 5$ y se aplica recursivamente el mismo procedimiento hasta llegar a un determinante de orden dos)

$$\prod_{1<k\le 5} (x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 & (x_5)^2 \\ (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 & (x_5)^3 \end{vmatrix} = \prod_{1<k\le 5} (x_k - x_1) \prod_{2<k\le 5} (x_k - x_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_5 \\ (x_3)^2 & (x_4)^2 & (x_5)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1<k\le 5} (x_k - x_1) \prod_{2<k\le 5} (x_k - x_2) \prod_{3<k\le 5} (x_k - x_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_4 & x_5 \end{vmatrix} =$$

$$\prod_{1<k\le 5} (x_k - x_1) \prod_{2<k\le 5} (x_k - x_2) \prod_{3<k\le 5} (x_k - x_3)(x_5 - x_4) = \prod_{1\le j<k\le 5} (x_k - x_j).$$

(4) (1 pto.) Suponga que un sistema lineal, S, de cuatro ecuaciones y dos incógnitas tiene una matriz ampliada equivalente a una matriz escalonada con una única fila nula. Respecto al sistema S se puede afirmar lo siguiente:

- [ ] *(a)* S es compatible determinado.
- [ ] *(b)* S es compatible indeterminado.
- [ ] *(c)* [=] S es incompatible.
- [ ] *(d)* S puede ser compatible indeterminado o incompatible.

*(*) **Explicación**: si la matriz escalonada, equivalente a la matriz ampliada de S, tiene una única fila nula, la tercera ecuación del sistema equivalente a S será:* $0x_1 + 0x_2 = \& \neq 0$*, ecuación que no puede ser satisfecha por ningún par de números reales. En consecuencia el sistema S es **incompatible**.*

(5) (1 pto.) Dadas las matrices

$$F = I_{3\leftrightarrow 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determine la matriz P_1 que verifica $FP = P_1F$.

- [ ] *(a)* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] *(b)* [=] $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] *(c)* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- [ ] *(d)* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

*(*) **Explicación**: es fácil comprobar que*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica $FP = P_1F$.

(6) (1 pto.) Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, entonces

- [ ] *(a)* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- [ ] *(b)* [=] $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.
- [ ] *(c)* $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- [ ] *(d)* $(AB)^t = A^tB^t$.

*(*) **Explicación**: al ser el producto de matrices no conmutativo la única la respuesta correcta es*

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

(7) (1 pto.) Indique cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**.

- [ ] *(a)* La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

☐ *(b)* La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un conjunto linealmente independiente de vectores de V.

☐ *(c)* La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores que constituyen una base cualquiera de V.

☐ *(d)* [=] La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

*(*) **Explicación**: la proposición "La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V" es falsa porque a cualquier sistema generador de V se le puede añadir otro vector cualquiera de V sin que deje de ser un sistema generador de V. Las otras tres proposiciones son ciertas.*

(8) (1.5 ptos.) Determine las coordenadas del vector $(-1,2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\mathbf{u}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{e}_i\}$ está formada por los vectores $(2,0,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$, $(1,1,0)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ y $(0,1,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(a)* [1.5] $(0,3,0)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.3]$(-2/3,1/3,5/3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(c)* [-0.3]$(-1,1,3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(d)* [-0.3]$(0,2,-1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ en función de la base $\{\mathbf{u}_i\}$:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ a coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$. Aplicando el cambio al vector $(-1,2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Álgebra
ETSI Minas y Energía

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________ **DNI:** ____________

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1)	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	**(6)**	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
(2)	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	**(7)**	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
(3)	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	**(8)**	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
(4)	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	**(9)**	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ
(5)	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	**(10)**	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ

(1) (1 pto.) Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Dadas una base de U_1: $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\}$ y una base de U_2: $\{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$, cualquier vector $\mathbf{x} \in U_1 \cap U_2$ se puede expresar como $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{a}_p$ o $\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_q \mathbf{b}_q$. Por lo tanto

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{a}_p = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_q \mathbf{b}_q.$$

Respecto al sistema anterior se puede afirmar lo siguiente:

- ☐ *(a)* Solo puede ser compatible indeterminado, con un número de variables libres igual a $\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$.
- ☐ *(b)* [=] Puede ser compatible determinado o compatible indeterminado pero no puede ser incompatible. En los casos en que sea compatible indeterminado, el número de variables libres es igual a $\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2)$.
- ☐ *(c)* Puede ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. En los casos en que sea compatible indeterminado, el número de variables libres es $\dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$.
- ☐ *(d)* Puede ser compatible determinado o compatible indeterminado pero no puede ser incompatible. En los casos en que sea compatible indeterminado, el número de variables libres es igual a $\dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$.

*(*) **Explicación**: el sistema del enunciado es un sistema homogéneo que no puede ser incompatible. Además el número de variables libres ($\dim(U_1 \cap U_2)$) es igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz de coeficientes. El número de incógnitas es $p + q = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ y el rango de la matriz de coeficientes, A, coincide con el rango de sus columnas que constituyen un sistema generador de $U_1 + U_2$, por lo tanto $\mathrm{rg}(A) = \dim(U_1 + U_2)$. Resumiendo:*

$$\textit{Número de variables libres } = \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2).$$

El sistema será compatible determinado cuando $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2)$. En este caso la única solución del sistema homogéneo será la trivial y $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ (subespacios independientes).

(2) (1 pto.) Dado un subespacio, S, de dimensión p, perteneciente a un espacio vectorial de dimensión n, unas ecuaciones implícitas de S constituyen un sistema homogéneo que se puede obtener eliminando los parámetros de unas ecuaciones paramétricas de S. ¿Por qué el sistema homogéneo de las ecuaciones implícitas tiene $n - p$ ecuaciones linealmente independientes y n incógnitas?

- ☐ *(a)* Porque las ecuaciones paramétricas de S constituyen un sistema compatible indeterminado con $n - p$ ecuaciones linealmente independientes que, igualadas a cero, formarán las ecuaciones implícitas.
- ☐ *(b)* Porque las ecuaciones paramétricas de S constituyen un sistema compatible indeterminado con $n - p$ ecuaciones linealmente independientes. Al resolver el sistema anterior se obtiene un sistema homogéneo equivalente. Resolviendo este sistema se obtienen las ecuaciones implícitas de S.
- ☐ *(c)* [=] Porque las ecuaciones paramétricas de S constituyen un sistema compatible determinado de n ecuaciones y p incógnitas. Las ecuaciones implícitas se obtienen despejando las p incógnitas de las p ecuaciones linealmente independientes en función del término independiente y sustituyendo sus valores en las $n - p$ ecuaciones restantes.
- ☐ *(d)* Porque las ecuaciones paramétricas de S constituyen un sistema compatible determinado con $n - p$ ecuaciones linealmente independientes de donde se despejan los p parámetros en función del término independiente y se sustituyen en las p ecuaciones restantes para formar las ecuaciones implícitas.

*(*) **Explicación**: las ecuaciones paramétricas de S constituyen un sistema compatible determinado con p ecuaciones linealmente independientes de donde se despejan los p parámetros en función del término independiente y se sustituyen en las $n - p$ ecuaciones restantes para formar las ecuaciones implícitas.*

(3) (1 pto.) Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal $f : V \to W$ en las bases $\{\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$ de W. Respecto a los n vectores cuyas coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$ de W son las columnas de A, se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* [=] Constituyen un sistema generador de $\operatorname{Im} f$ porque coinciden con las imágenes de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n\}$.

☐ *(b)* Constituyen una base de $\operatorname{Im} f$ porque coinciden con las imágenes de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n\}$.

☐ *(c)* Constituyen una base de $\operatorname{Im} f$ porque siempre son linealmente independientes.

☐ *(d)* Constituyen un sistema generador de $\operatorname{Im} f$ porque siempre son linealmente independientes.

*(*) **Explicación**: el conjunto formado por las imágenes por f de una base de V es un **sistema generador** de $Im f$ puesto que cualquier vector $\mathbf{w} \in W$ se puede expresar como $\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{e}_n)$ y por lo tanto $\{f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)\}$ es un sistema generador de $\operatorname{Im} f$. En general $\{f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)\}$ no es un conjunto linealmente independiente por lo que no es una base. Solo será linealmente independiente si $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.*

(4) (1 pto.) Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & W \\ & \mathbf{x} & \to & (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 + x_2, x_1 - 2x_2, x_1)^t \end{array}$$

referida a las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W. Dado el vector $\mathbf{z} = \mathbf{e}'_1 + 3\mathbf{e}'_2$, determine la expresión de $f(\mathbf{z})$ en la base $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$, sabiendo que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{e}'_1 & = & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 & = & 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{u}_1 & = & \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 & = & -\mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 & = & \mathbf{u}'_1 - 2\mathbf{u}'_3 \end{array} \right. .$$

☐ *(a)* [=] $15\mathbf{u}'_1 - 15\mathbf{u}'_2$.

☐ *(b)* $(40/3)\mathbf{u}'_1 - (20/3)\mathbf{u}'_2 + (25/3)\mathbf{u}'_3$.

☐ *(c)* $(44/15)\mathbf{u}'_1 - (1/15)\mathbf{u}'_2 - (7/15)\mathbf{u}'_3$.

☐ *(d)* $4\mathbf{u}'_1 - (1/5)\mathbf{u}'_2 - (7/5)\mathbf{u}'_3$.

*(*) **Explicación**: la matriz de la aplicación lineal en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado las matrices de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ y de $\{\mathbf{u}'_i\}$ a $\{\mathbf{u}_i\}$ son, respectivamente,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Realizando el correspondiente cambio de base, la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{u}'_i\}$ es

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y, hallando $f(\mathbf{z})$ en la nueva base,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{u}'_i}.$$

(5) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W, cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es A. Si f es una aplicación sobreyectiva pero no inyectiva, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* Si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{u}$ para cualquier $\mathbf{u} \in \ker f$.

☐ *(b)* Se puede encontrar algún término independiente, $\mathbf{b} \in W$, con el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución.

☐ *(c)* [=] Si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{u} \in \ker f$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ también es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

☐ *(d)* El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser compatible determinado o incompatible.

(*) ***Explicación****: si f es sobreyectiva pero no inyectiva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ será compatible indeterminado ($\ker f \neq \{\mathbf{0}\}$) $\forall \mathbf{b} \in W$. Si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{u} \in \ker f$:*

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{b} \Rightarrow A(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{b}.$$

(6) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2 \;_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (2, 1, 1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & 0 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} 5/3 & 2 & 1/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

Base de S : $B = \{\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1)^t, \mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)^t\}$. Se calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S de tres formas distintas:

1. *Utilizando la base B:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = 0 &\Rightarrow (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} \\ (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 &\Rightarrow (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

   en donde $\mathbf{v}_1 = \mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$ es la proyección ortogonal pedida.

   Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5,$$

   el sistema queda

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 - 3\alpha_2 &= -1 \\ -3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 5 \end{aligned}$$

   cuya solución es $\alpha_1 = 5/3$, $\alpha_2 = 2$. La proyección pedida es, por lo tanto,

$$\mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

2. *Hallando una base ortonormal de S:*

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1}\mathbf{z}_1 = (0,1,1)^t + (1,0,-1)^t = (1,1,0)^t,$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 3, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = -3.$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ por su norma se obtiene una base ortonormal:

$$\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1)^t, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t.$$

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\Pr|_S \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_1 + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5/3 & 2 & 1/3 \end{pmatrix}^t.$$

3. *Hallando la matriz de proyección: si se denota $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz de proyección sobre S es*

$$P_S = A(A^t G A)^{-1} A^t G = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

y

$$\Pr|_S \mathbf{v} = P_S \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

(7) (1 pto.) En la siguiente tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos del plano.

x	1	1	2	3
y	1	2	1	2

Suponga que se quiere ajustar un polinomio de segundo grado, $y(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, a los puntos anteriores por el método de mínimos cuadrados. Determine cuál es la matriz de coeficientes del sistema de mínimos cuadrados que permite obtener los tres coeficientes del polinomio.

☐ *(a)* [=]

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 15 \\ 7 & 15 & 37 \\ 15 & 37 & 99 \end{pmatrix}.$$

☐ *(b)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 7 & 15 & 42 \\ 12 & 42 & 129 \end{pmatrix}.$$

☐ *(c)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 15 \\ 7 & 10 & 27 \\ 15 & 27 & 98 \end{pmatrix}.$$

☐ *(d)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 48 \\ 12 & 48 & 126 \end{pmatrix}.$$

*(*) **Explicación**: el sistema de mínimos cuadrados es*

$$\left(X^t X\right)\mathbf{b} = X^t \mathbf{y},$$

en donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz pedida es

$$X^t X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 15 \\ 7 & 15 & 37 \\ 15 & 37 & 99 \end{pmatrix}.$$

(8) (1 pto.) Considere el espacio euclídeo formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

expresado en una cierta base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. De entre las cuatro bases siguientes, elija aquella respecto a la cual la matriz de Gram (matriz del producto escalar) es la matriz identidad.

- ☐ *(a)* $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{2}(0,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(b)* $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_3 = \frac{2}{\sqrt{37}}(1/2,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(c)* [=]$\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(-1,-1/2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(d)* $\mathbf{c}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$, $\mathbf{c}_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}(-1,1/2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: una base en la que la matriz de Gram es la matriz identidad es una base ortonormal. Las cuatro soluciones propuestas coinciden en los dos primeros vectores ($\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$) que, efectivamente, son ortogonales entre sí y unitarios. Queda, por tanto, comprobar cuál de los $\mathbf{c}_3$ propuestos es ortogonal a los dos vectores anteriores además de unitario. Es fácil verificar que el único vector que cumple las dos condiciones es*

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(-1,-1/2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

También se podía haber llegado a la solución ortonormalizando la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, teniendo en cuenta que $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son ortogonales por lo que se pueden escoger como los dos primeros vectores de una base ortogonal:

$$\mathbf{z}_1 = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}},\ \mathbf{z}_2 = (0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

El tercer vector de la base ortogonal se obtiene aplicando el método de Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{e}_3 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1}\mathbf{z}_1 - \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2}\mathbf{z}_2 = (0,0,1)^t - (1,0,0)^t - \frac{1}{2}(0,1,0)^t = (-1,-1/2,1)^t$$

y, siguiendo con el método de Gram-Schmidt,

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = (1,0,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(-1,-1/2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

***Observación**: las bases ortonormales no son únicas, se puede llegar a una base ortonormal distinta aplicando el método de Gram-Schmidt a una base de partida diferente o incluso partiendo de la misma base pero eligiendo los vectores en un orden distinto.*

(9) (1 pto.) Indique cuál de los cuatro vectores siguientes es un vector propio del endomorfismo

$$f : V \to V \quad \text{tal que} \quad f(\mathbf{x}) = \left(\frac{5}{2}x_1 + 3x_2,\ -\frac{3}{2}x_1 - 2x_2,\ -6x_1 - 6x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

☐ *(a)* $(1,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [=] $(-1,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $(2,2,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* $(1,2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: la matriz del endomorfismo en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & 0 \\ -3/2 & -2 & 0 \\ -6 & -6 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Es fácil comprobar que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -7/2 \\ 12 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 47/2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ -11/2 \\ -37/2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el único vector propio es $(-1,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ (asociado al valor propio $-1/2$).
Si se resuelve la ecuación característica de A, se obtienen los valores propios $\lambda_1 = -1/2$ y $\lambda_2 = 1$, comprobándose que $(-1,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \in V_{\lambda_1}$.

(10) (1 pto.) Sabiendo que $\lambda = 6$ es un valor propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

y que D es una matriz diagonal semejante a A, elija, de entre las cuatro matrices siguientes, la matriz P que verifica $D = P^{-1}AP$ y $P^{-1} = P^t$.

☐ *(a)* [=]$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: las opciones b) y c) no cumplen $P^{-1} = P^t$ (es fácil comprobar que sus columnas no constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$). Para distinguir entre las opciones a) y d) se calculan los valores propios y los subespacios propios de A.*
El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54.$$

Sabiendo que $\lambda = 6$ es un valor propio de A y, por lo tanto, una raíz de $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)^2.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 3$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz A es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos.

$$V_6 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{rcl} -x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\; x_1 - x_2 + x_3 \;=\; 0 \;\right\}.$$

Se comprueba que la primera columna de la matriz P de la opción d) no es un vector propio de A al no verificar ni las ecuaciones implícitas de V_6 ni las de V_3 (tampoco lo son las columnas dos y tres). Por lo tanto no se verifica $D = P^{-1}AP$. La matriz P de la opción a) sí verifica que su primera columna es un vector propio de A perteneciente a V_6 y también que sus columnas dos y tres son vectores propios de A pertenecientes a V_3. En consecuencia esta es la opción correcta puesto que se cumple $D = P^{-1}AP$.
Se puede también resolver el ejercicio calculando directamente la matriz P, ***teniendo en cuenta que esta no es única y se puede obtener una matriz que no coincida con ninguna de las propuestas****. Las columnas de la matriz P que se pide en el enunciado serán las coordenadas de tres vectores propios de A que constituyan una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Para hallarla se unen las bases ortonormales de los dos subespacios propios de A:*

$$\text{Base de } V_6 : \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Base de } V_3 : \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \text{Base ortonormal} : \left\{ \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

La base ortonormal de V_3 se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2,\; \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz pedida es

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________ **DNI:** ____________

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de* ***80 minutos****.*
- *Rellene* ***completamente*** *los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (****sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda****).*
- *En la parte inferior de la página rellene* ***completamente*** *los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar* ***apagados y encima de la mesa****.*
- *Cuando termine el examen debe* ***arrancar y entregar esta hoja****.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1.5 ptos.) Se tienen tres lingotes de 100 gramos cuya composición es la siguiente

Lingotes	Oro	Plata	Cobre
1	20 %	30 %	50 %
2	30 %	40 %	30 %
3	40 %	50 %	10 %

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los tres lingotes para formar uno nuevo que contenga 12 gramos de oro, 57 gramos de plata y 51 gramos de cobre?

- ☐ *(a)* [-0.3]90 g del lingote 1, 20 g del lingote 2 y 10 g del lingote 3.
- ☐ *(b)* [1.5]No es posible construir el lingote pedido a partir de los tres lingotes dados.
- ☐ *(c)* [-0.3]64 g del lingote 1, 22 g del lingote 2 y 34 g del lingote 3.
- ☐ *(d)* [-0.3]75 g del lingote 1, 32 g del lingote 2 y 13 g del lingote 3.

*(*) **Explicación**: llamando x a los gramos del lingote 1 que se necesitan para producir el nuevo lingote, y a los que se necesitan del lingote 2 y z a los que se necesitan del lingote 3; se tiene (en gramos):*

$$\begin{aligned}
\textit{Oro en la aleación de los tres lingotes} &= \frac{20}{100}x + \frac{30}{100}y + \frac{40}{100}z = 12\\
\textit{Plata en la aleación de los tres lingotes} &= \frac{30}{100}x + \frac{40}{100}y + \frac{50}{100}z = 57\\
\textit{Cobre en la aleación de los tres lingotes} &= \frac{50}{100}x + \frac{30}{100}y + \frac{10}{100}z = 51
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema será:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+4z=120\\ 3x+4y+5z=570\\ 5x+3y+1z=510 \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 120\\ 3 & 4 & 5 & 570\\ 5 & 3 & 1 & 510 \end{pmatrix}$$

realizando operaciones elementales en sus filas se obtiene la siguiente matriz escalonada equivalente a la anterior

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 120\\ 0 & -1 & -2 & 780\\ 0 & 0 & 0 & -6600 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que el rango de la matriz ampliada es 3 y el rango de la matriz de coeficientes es 2 por lo que el sistema es incompatible. Por consiguiente la respuesta a la pregunta es: no es posible construir el lingote pedido a partir de los tres lingotes dados.

(2) (1.5 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+z=c\\ x+ay+bz=0\\ ax+by+az=c \end{array}\right. ,$$

discuta la existencia y unicidad de soluciones del sistema en función de los valores de a, b y c ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

☐ *(a)* [-0.3]

$$a \neq 1 \begin{cases} b = 1 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$a = 1 \begin{cases} b \neq a^2 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b = a^2: \text{ compatible determinado } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

☐ *(b)* [1.5]

$$a = 1 \begin{cases} b = 1 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$a \neq 1 \begin{cases} b = a^2 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b \neq a^2: \text{ compatible determinado } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

☐ *(c)* [-0.3]

$$b = 1 \begin{cases} a = 1 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ a \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$b \neq 1 \begin{cases} a = b^2 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ a \neq b^2: \text{ compatible determinado } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

☐ *(d)* [-0.3]

$$a = 1 \begin{cases} b = 1 \begin{cases} c = 0: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ c \neq 0: & \text{incompatible} \end{cases} \\ b \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad } \forall c \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$a \neq 1: \text{ compatible determinado } \forall b, c \in \mathbb{R}$$

*(*) **Explicación**: para estudiar la existencia y unicidad de soluciones se obtiene la forma escalonada de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes del sistema:*

$$A_b = \begin{pmatrix} a & b & 1 & c \\ 1 & a & b & 0 \\ a & b & a & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & b-a^2 & 1-ab & c \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b-a^2 & 1-ab \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce lo siguiente:

1. $a = 1$.

   a) $a = 1$ *y* $b = 1$

      1) $a = 1, b = 1$ *y* $c = 0$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_b) = 1 < 3$, *sistema compatible indeterminado con dos grados de libertad.*

      2) $a = 1, b = 1$ *y* $c \neq 0$: $\text{rg}(A) = 1 < \text{rg}(A_b) = 2$, *sistema incompatible.*

   b) $a = 1, b \neq 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_b) = 2 < 3$, *sistema compatible indeterminado con un grado de libertad para cualquier valor de* c.

2. $a \neq 1$

a) $a \neq 1$ *y* $b = a^2$

1) $a \neq 1$, $b = a^2$ *y* $c \neq 0$: $\mathrm{rg}(A) = 2 < \mathrm{rg}(A_b) = 3$, *sistema incompatible.*

2) $a \neq 1$, $b = a^2$ *y* $c = 0$: $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A_b) < 3$, *sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.*

b) $a \neq 1$ *y* $b \neq a^2$: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 3$, *sistema compatible determinado para cualquier valor de* c.

(3) (1 pto.) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $|A| = 4$. ¿Cuál es el valor de $|2A^{-1}|$?

- ☐ *(a)* [=] 2.
- ☐ *(b)* 1.
- ☐ *(c)* 1/2.
- ☐ *(d)* 8.

(*) ***Explicación:***

$$|2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = \frac{8}{|A|} = \frac{8}{4} = 2.$$

(4) (1 pto.) Suponga que un sistema lineal, S, de cuatro ecuaciones y dos incógnitas tiene una matriz ampliada equivalente a una matriz escalonada con ninguna fila nula. Se puede afirmar lo siguiente:

- ☐ *(a)* S es compatible determinado.
- ☐ *(b)* S es compatible indeterminado.
- ☐ *(c)* S es incompatible.
- ☐ *(d)* [=] la suposición sobre S es imposible.

(*) ***Explicación****: es imposible que la matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada,* A_b*, de* S *no tenga, al menos, una fila nula:* A_b *tiene tres columnas por lo que su rango no puede ser mayor que tres, lo que implica que al escalonar* A_b *la matriz escalonada resultante tiene siempre su última fila nula.*

(5) (1 pto.) Dadas las matrices

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

determine la matriz $(P_3P_2P_1)^{-1}$.

- ☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1/4 & 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1/4 & -4 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1 & 0 \\ -4 & 1/4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- ☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 & 0 \\ 4 & -1/4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(*) Explicación:

$$(P_3P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-2}P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1/4 & -4 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) (1.5 ptos.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

determine la factorización LU con pivote parcial de A ($FA = LU$).

☐ *(a)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}.$

☐ *(b)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}.$

☐ *(c)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}.$

☐ *(d)* [1.5] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}.$

(*) Explicación:

1. *Primera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial*

   a) *Se busca el pivote de la primera columna y se intercambian las filas correspondientes:*

   $$F^1A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   b) *Se hacen cero los elementos de la primera columna por debajo del pivote con $m_{21} = 0$ y $m_{31} = -1/2$:*

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \end{pmatrix}.$$

2. *Segunda etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:*

   a) *Se busca el pivote de la segunda columna y se intercambian las filas correspondientes:*

   $$F^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) *Se hacen cero los elementos de la segunda columna por debajo del pivote con* $m_{32} = 2/3$*:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F = F^2F^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificándose $FA = LU$*.*

(7) (1 pto.) Sea U un espacio vectorial de dimensión n y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ un conjunto de r vectores de U. ¿Cuál de las siguientes implicaciones es cierta?

- ☐ *(a)* [=] $r > n \Rightarrow \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ es un conjunto linealmente dependiente.
- ☐ *(b)* $r \geq n \Rightarrow \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ es un sistema generador de U.
- ☐ *(c)* $r < n \Rightarrow \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.
- ☐ *(d)* $r = n \Rightarrow \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ es una base de U.

(*) ***Explicación****: si* $r > n$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_r\}$ *es un sistema linealmente dependiente porque en un espacio vectorial de dimensión* n *no puede haber más de* n *vectores linealmente independientes. Las otras tres implicaciones son falsas.*

(8) (1.5 ptos.) Determine las coordenadas del vector $(3,1,2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\mathbf{e}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{e}_i\}$ está formada por los vectores $(2,0,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$, $(1,1,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$ y $(0,1,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

- ☐ *(a)* [1.5] $(1,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(b)* [-0.3]$(7,3,6)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(c)* [-0.3]$(8,6,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(d)* [-0.3]$(-1,3,5)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación****:*
$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

siendo $\{\mathbf{c}_i\}$ *una tercera base de referencia. Si se hace* $\{\mathbf{c}_i\} = \{\mathbf{e}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

En el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ *en función de la base* $\{\mathbf{u}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ *a coordenadas en la base* $\{\mathbf{u}_i\}$*. En la pregunta se pide realizar el cambio de base inverso tal como aparece en la ecuación* (1) *(tranformar coordenadas en la base* $\{\mathbf{u}_i\}$ *a coordenadas en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*). La matriz de cambio de base correspondiente será:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}^{-1}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Aplicando el cambio (1) *al vector* $(3,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ *:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Álgebra
ETSI Minas y Energía

Apellidos: ____________________ **Nombre:** ____________ **DNI:** __________

DNI:

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **100 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1)	A	B	C	D	**(6)**	A	B	C	D
(2)	A	B	C	D	**(7)**	A	B	C	D
(3)	A	B	C	D	**(8)**	A	B	C	D
(4)	A	B	C	D	**(9)**	A	B	C	D
(5)	A	B	C	D	**(10)**	A	B	C	D

(1) (1 pto.) Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V tales que $U_1 \cap U_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. Dadas una base de U_1: $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\}$ y una base de U_2: $\{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

- ☐ *(a)* $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\} \cup \{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$ es una base de $U_1 + U_2$.
- ☐ *(b)* $\dim(U_1 + U_2) = p + q$
- ☐ *(c)* [=] $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\} \cup \{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$ es un sistema generador de $U_1 + U_2$.
- ☐ *(d)* $\dim(U_1 + U_2) = p + q - pq$.

(*) ***Explicación:*** *$\forall \mathbf{x} \in U_1 + U_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ con $\mathbf{x}_1 \in U_1$ y $\mathbf{x}_2 \in U_2$. Por lo tanto*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \alpha_1 \mathbf{a}_1 \cdots \alpha_p \mathbf{a}_p + \beta_1 \mathbf{b}_1 \cdots \beta_q \mathbf{b}_q,$$

lo que implica que $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\} \cup \{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$ es un sistema generador de $U_1 + U_2$, ya que cualquier vector de $U_1 + U_2$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\} \cup \{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$. Solo en el caso de que $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ sería también una base puesto que la unión de las dos bases formaría un conjunto linealmente independiente.

(2) (1 pto.) Sea S un subespacio vectorial de un espacio vectorial, V, de dimensión cuatro tal que

$$S = \left\langle (1,0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (1,1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (5,3,2,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle .$$

Halle unas ecuaciones implícitas de S.

- ☐ *(a)* $S = \{\mathbf{x} \in V / x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(b)* $S = \{\mathbf{x} \in V / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(c)* [=] $S = \{\mathbf{x} \in V / x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.
- ☐ *(d)* $S = \{\mathbf{x} \in V / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación:*** *de los tres vectores que forman el sistema generador de S solamente hay dos linealmente independientes, lo que implica que la dimensión de S es dos y por lo tanto tendrá $4 - 2 = 2$ ecuaciones implícitas linealmente independientes. En consecuencia las soluciones (b) y (d) son incorrectas. Tomando $\{\mathbf{v}_1 = (1,0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\}$ como base de S es fácil comprobar que $\mathbf{v}_1$ no verifica ninguna de las dos ecuaciones de la solución (a). Por lo tanto la solución correcta es la (c) ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ verifican las dos ecuaciones en este caso).*
También se pueden calcular las ecuaciones implícitas de S a partir de unas ecuaciones paramétricas utilizando la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$:

$$S = \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

de donde eliminando α y β se obtienen las dos ecuaciones implícitas pedidas:

$$S = \{\mathbf{x} \in V / x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}} .$$

Observación*: la solución no es única pero cualquier otra solución correcta tiene dos ecuaciones implícitas que son combinación lineal de las dos de la solución (c).*

(3) (1 pto.) Sea A la matriz asociada a la aplicación lineal $f : V \to W$ en las bases $\{\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$ de W. Si f es **inyectiva** pero **no sobreyectiva**, se puede afirmar lo siguiente respecto a los n vectores cuyas coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$ de W son las columnas de A.

- ☐ *(a)* Constituyen un sistema generador de $\operatorname{Im} f$ pero no forman una base de $\operatorname{Im} f$.

☐ *(b)* Constituyen una base de W.

☐ *(c)* [=] Constituyen una base de $\operatorname{Im} f$.

☐ *(d)* No constituyen ni un sistema generador ni una base de $\operatorname{Im} f$.

*(*) **Explicación**: los n vectores cuyas coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m\}$ de W son las columnas de A, son las imágenes por f de una base de V: $f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)$. Estos vectores consituyen un **sistema generador** de Imf puesto que cualquier vector $\mathbf{w} \in W$ se puede expresar como $\mathbf{w} = f(\mathbf{v}) = f(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n f(\mathbf{e}_n)$ y por lo tanto $\{f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)\}$ es un sistema generador de $\operatorname{Im} f$. Si f es inyectiva $\{f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)\}$ es un conjunto linealmente independiente por lo que, además, es una base de $\operatorname{Im} f$. Por otro lado como f no es sobreyectiva existen vectores de W que no se pueden expresar como combinación lineal de $f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)$ y, en consecuencia, $\{f(\mathbf{e}_1) \cdots f(\mathbf{e}_n)\}$ no es una base de W.*

(4) (1 pto.) Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & W \\ & \mathbf{x} & \to & (y_1, y_2)^t = (x_1 + x_2 + x_3, -2x_1 + x_3)^t \end{array}$$

referida a las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de W. Dado el vector $\mathbf{z} = \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2 + 2\mathbf{e}'_3 \in V$, determine la expresión de $f(\mathbf{z}) \in W$ en la base $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$, sabiendo que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{u}'_1 & = & \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}'_2 & = & 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{e}'_1 & = & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 & = & -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 & = & \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 \end{array} \right. .$$

☐ *(a)* $-16\mathbf{u}'_1 + 16\mathbf{u}'_2$.

☐ *(b)* [=] $-4\mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2$.

☐ *(c)* $-9\mathbf{u}'_1 + 11\mathbf{u}'_2$.

☐ *(d)* $-2\mathbf{u}'_1 + (3/2)\mathbf{u}'_2$.

*(*) **Explicación**: la matriz de la aplicación lineal en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado las matrices de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ y de $\{\mathbf{u}'_i\}$ a $\{\mathbf{u}_i\}$ son, respectivamente,

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ y \ Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Realizando el correspondiente cambio de base, la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{u}'_i\}$ es

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -5/2 \\ 1 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

y, hallando $f(\mathbf{z})$ en la nueva base,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -5/2 \\ 1 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}'_i\}}.$$

(5) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W, cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es A. Si f es una aplicación **inyectiva** pero **no sobreyectiva**, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* Si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{u}$ para cualquier $\mathbf{u}$.

☐ *(b)* Si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces existe $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ también es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

☐ *(c)* [=] Se puede encontrar algún término independiente, $\mathbf{b} \in W$, para el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución.

☐ *(d)* El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede ser compatible determinado.

*(*) **Explicación**: si f es inyectiva ($\ker f = \{\mathbf{0}\}$) pero no sobreyectiva ($\exists \mathbf{b} \in W$ tal que no es posible encontrar $\mathbf{x} \in V$ que verifique $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$) el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ será compatible determinado o incompatible y por lo tanto se puede encontrar algún término independiente, $\mathbf{b} \in W$, con el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución.*

(6) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_3 + x_3y_2 \;_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_2 - x_3 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 0 & -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} 1 & 8/5 & 8/5 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

Base de S : $B = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,0)^t, \mathbf{a}_2 = (0,1,1)^t\}$. Se calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S de tres formas distintas:

1. *Utilizando la base B:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} \\ (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

en donde $\mathbf{v}_1 = \mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2$ es la proyección ortogonal pedida.

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8,$$

el sistema queda

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 0\alpha_2 = 1 \\ 0\alpha_1 + 5\alpha_2 = 8 \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 8/5$. La proyección pedida es, por lo tanto,

$$\mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}$$

2. *Hallando una base ortonormal de S:*

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1}\mathbf{z}_1 = (0,1,1)^t + (0,0,0)^t = (0,1,1)^t,$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = 0.$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ por su norma se obtiene una base ortonormal:

$$\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1}}(1,0,0)^t = (1,0,0)^t, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,1)^t.$$

*Observe que en este caso la base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ es **ortogonal** por lo que hubiera bastado con dividir los dos vectores por sus normas para obtener una base ortonormal.*

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\Pr|_S \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8/5 & 8/5 \end{pmatrix}^t.$$

3. *Hallando la matriz de proyección: si se denota $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz de proyección sobre S es*

$$P_S = A(A^t G A)^{-1} A^t G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y

$$\Pr|_S \mathbf{v} = P_S \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}.$$

(7) (1 pto.) En un espacio euclídeo, E, de dimensión n, en el que se utiliza como base de referencia una base ortonormal, la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{v} \in E$ sobre el subespacio S, del que se conoce la base $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p\}$, se puede obtener hallando la matriz de proyección P_S:

$$Pr|_S \mathbf{v} = P_S \mathbf{v}, \quad \text{con } P_S = A(A^t A)^{-1} A^t.$$

Indique cuál es la expresión de la matriz A.

☐ *(a)* [=] $A = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)_{n \times p}$.

☐ *(b)* $A = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)^t_{p \times n}$.

☐ *(c)* $A = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)^t_{p \times n} (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)_{n \times p}$.

☐ *(d)* $A = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)_{n \times p} (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)^t_{p \times n}$.

*(*) **Explicación**: S es un s.e.v de E de dimensión p y matriz de Gram $G = I_n$. Al conocer una base, $\{a_i\}$, de S, la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{v} \in E$ sobre S es igual a*

(1)
$$\mathbf{s}_1 = Pr|_S \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathbf{a}_i = A\mathbf{x}, \quad A = (\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_p).$$

Teniendo en cuenta el teorema de la proyección

$$\mathbf{v}-\mathbf{s}_1 \in S^{\perp} \Rightarrow A^t(\mathbf{v}-\mathbf{s}_1)=0$$

y las $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_p)$ *son solución del sistema*

$$A^tA\mathbf{x}=A^t\mathbf{v}. \tag{2}$$

Si se despeja $\mathbf{x}$ *en* (2)*, se obtienen las coordenadas de la proyección ortogonal de* $\mathbf{v}$ *en la base* $\{\mathbf{a}_i\}$*:*

$$Pr|_S\mathbf{v}_{\mathbf{a}_i}=\mathbf{x}=(A^tA)^{-1}A^t\mathbf{v}.$$

Sustituyendo $\mathbf{x}$ *en* (1) *se obtienen las coordenadas de* $Pr|_W\mathbf{v}$ *en la base de referencia ortonormal de* E ($\{\mathbf{e}_i\}$)*:*

$$Pr|_S\mathbf{v}_{\mathbf{e}_i}=\mathbf{x}'=A(A^tA)^{-1}A^t\mathbf{v}.$$

siendo la matriz

$$P_S=A(A^tA)^{-1}A^t,$$

la ***matriz de proyección*** *sobre* S*. Por lo tanto* $A=\left(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_p\right)_{n\times p}$.

(8) (1 pto.) En la siguiente tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos del plano.

x	1	2	3	4
y	3	4	7	8

Suponga que se quiere ajustar una recta, $y(x)=b_0+b_1x$, a los puntos anteriores por el método de mínimos cuadrados. Determine cuál es la matriz de coeficientes del sistema de mínimos cuadrados que permite obtener los dos coeficientes de la recta.

☐ *(a)* [=]
$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

☐ *(b)*
$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

☐ *(c)*
$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}.$$

☐ *(d)*
$$\begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 138 \end{pmatrix}.$$

(*) ***Explicación****: el sistema de mínimos cuadrados es*

$$\left(X^tX\right)\mathbf{b}=X^t\mathbf{y},$$

en donde

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz pedida es

$$X^tX=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

(9) (1 pto.) Dados una matriz cuadrada, $A\in M_n(\mathbb{R})$, un vector, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ y un escalar, $\alpha\in\mathbb{R}$, se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de la matriz αA asociado al mismo valor propio λ.

☐ *(b)* [=] Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de la matriz αA asociado al valor propio $\alpha\lambda$.

☐ *(c)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el vector $\mathbf{v}$ no es un vector propio de la matriz αA.

☐ *(d)* Si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el vector $\mathbf{v}$ también es un vector propio de la matriz αA asociado al valor propio λ/α.

*(*) **Explicación**: si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ entonces $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, de donde se deduce que $(\alpha A)\mathbf{v} = \alpha(A\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = (\alpha\lambda)\mathbf{v}$. Con lo que queda demostrado que $\mathbf{v}$ es un vector propio de αA y que su valor propio asociado es $\alpha\lambda$.*

(10) (1 pto.) Sabiendo que $\lambda = -2$ es un valor propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y que D es una matriz diagonal semejante a A, elija, de entre las cuatro matrices siguientes, la matriz P que verifica $D = P^{-1}AP$ y $P^{-1} = P^t$.

☐ *(a)* [=]$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ -1/3 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 3/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ -1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: las opciones b) y c) no cumplen $P^{-1} = P^t$ (es fácil comprobar que sus columnas no constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$). Para distinguir entre las opciones a) y d) se calculan los valores propios y los subespacios propios de A.*
El polinomio característico de la matriz A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98.$$

Sabiendo que $\lambda = -2$ es un valor propio de A y, por lo tanto, una raíz de $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-7)^2.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 7$ con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz A es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos.

$$V_{-2} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{array}{rcl} -x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right\},$$

$$V_7 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}.$$

Se comprueba que la primera columna de la matriz P de la opción d) no es un vector propio de A al no verificar ni las ecuaciones implícitas de V_{-2} ni las de V_7 (tampoco lo son las columnas dos y tres). Por lo tanto no se verifica $D = P^{-1}AP$. La matriz P de la opción a) sí verifica que su primera columna es un vector propio de A perteneciente *a V_{-2} y también que sus columnas dos y tres son vectores propios de A pertenecientes a V_7. En consecuencia esta es la opción correcta puesto que se cumple $D = P^{-1}AP$.*

Se puede también resolver el ejercicio calculando directamente la matriz P, ***teniendo en cuenta que esta no es única y se puede obtener una matriz que no coincida con ninguna de las propuestas*** *aunque sí se sabe que las columnas de la matriz P serán las coordenadas de tres vectores propios de A que constituyan una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, lo que permitirá, comparando con las soluciones propuestas, elegir la correcta. Para hallarla se unen las bases ortonormales de los dos subespacios propios de A:*

$$\textit{Base de } V_{-2}: \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \to \textit{Base ortonormal}: \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\textit{Base de } V_7: \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \textit{Base ortonormal}: \left\{ \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

La base ortonormal de V_7 se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2,\ \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz pedida es

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

Álgebra
ETSI Minas y Energía

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ____________ **DNI:** __________

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

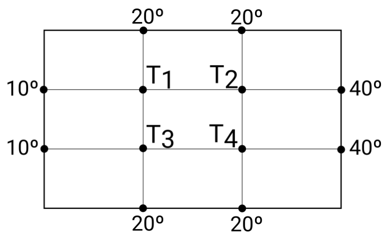
Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y encima de la mesa**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) La placa de la figura representa una sección transversal de un poste metálico. Si T_1, T_2, T_3 y T_4 son las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla y se supone que la temperatura en un nodo es igual al promedio de las de los cuatro nodos más cercanos (a la izquierda, arriba, a la derecha y abajo), plantee el sistema de ecuaciones lineales que permite obtener las cuatro temperaturas desconocidas.



☐ *(a)* $\left| -T_1+T_2-T_4=60 \right| -T_1+T_3-T_4=30 \left| -T_2-T_3+T_4=60 \right| T_1-T_3-T_2=30 \Big|$

☐ *(b)* [=] $\left| -T_1+4T_2-T_4=60 \right| -T_1+4T_3-T_4=30 \left| -T_2-T_3+4T_4=60 \right| 4T_1-T_2-T_3=30 \Big|$

☐ *(c)* $\left| -4T_1+T_2-T_4=60 \right| -T_1+4T_3-T_4=30 \left| -T_2-T_3+4T_4=60 \right| T_1-T_3-4T_2=30 \Big|$

☐ *(d)* $\left| -T_1+4T_2-T_4=60 \right| -4T_1+T_3-T_4=30 \left| -T_2-T_3+4T_4=60 \right| T_1-4T_3-T_2=30 \Big|$

*(*) **Explicación**:*

1. *Temperatura en el nodo 1:*

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(T_2+T_3+10+20\right) \to 4T_1-T_2-T_3=30.$$

2. *Temperatura en el nodo 2:*

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(T_1+20+40+T_4\right) \to -T_1+4T_2-T_4=60.$$

3. *Temperatura en el nodo 3:*

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(T_1+T_4+20+10\right) \to -T_1+4T_3-T_4=30.$$

4. *Temperatura en el nodo 4:*

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(T_3+T_2+40+20\right) \to -T_2-T_3+4T_4=60.$$

(2) (1.5 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-z+at & = & 1 \\ 2x-3y+bz-4t & = & 3 \\ x-4y+2z-5t & = & 2 \end{array}\right\}$$

discuta la existencia y unicidad de soluciones del sistema en función de los valores de a y b ($a, b \in \mathbb{R}$).

☐ *(a)* [1.5]

$$\begin{array}{l} b \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ b = 1 \left\{ \begin{array}{l} a = 1: \text{ compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ a \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \end{array} \right. \end{array}$$

☐ *(b)* [-0.3]

$$b \neq 1: \text{ compatible determinado}$$
$$b = 1 \begin{cases} a = 1: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \\ a \neq 1: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \end{cases}$$

☐ *(c)* [-0.3]

$$b = 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad}$$
$$b \neq 1 \begin{cases} a = 1: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \\ a \neq 1: & \text{compatible indeterminado con 1 grado de libertad} \end{cases}$$

☐ *(d)* [-0.3]

$$b \neq 1: \text{ compatible indeterminado con 1 grado de libertad}$$
$$b = 1 \begin{cases} a = 1: & \text{incompatible} \\ a \neq 1: & \text{compatible indeterminado con 2 grados de libertad} \end{cases}$$

*(*) **Explicación**: para estudiar la existencia y unicidad de soluciones se obtiene la forma escalonada de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes del sistema:*

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a & 1 \\ 2 & -3 & b & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & -5 & b+2 & -4-2a & 1 \\ 0 & 0 & 1-b & -1+a & 0 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & b & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -5 & b+2 & -4-2a \\ 0 & 0 & 1-b & -1+a \end{pmatrix}$$

de donde se deduce lo siguiente:

1. $b \neq 1$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 3 < 4$, *sistema compatible indeterminado. La solución dependerá de un parámetro (4-3).*
2. $b = 1$
   a) $a = 1$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 2 < 4$, *sistema compatible indeterminado. La solución dependerá de dos parámetros (4-2).*
   b) $a \neq 1$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 3 < 4$, *sistema compatible indeterminado. La solución dependerá de un parámetro (4-3).*

(3) (1 pto.) Sean $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ tales que $|A| = 2$ y $|B| = 8$. Si $C = (3A^t)(2B^{-1})$, ¿cuál es el valor de $|C|$?

☐ *(a)* [=] 324.

☐ *(b)* 162.

☐ *(c)* 3/2.

☐ *(d)* 648.

*(*) **Explicación**:*

$$|C| = |3A^t||2B^{-1}| = 3^4|A^t|\frac{2^4}{|B|} = 81|A|\frac{16}{|B|} = 81 \times 2 \times \frac{16}{8} = 81 \times 4 = 324.$$

(4) (1 pto.) Suponga que un sistema lineal homogéneo, S, de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas tiene una matriz de coeficientes equivalente a una matriz escalonada con una columna que no contiene ninguna cabecera de fila. Se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* S es compatible determinado.

☐ *(b)* La suposición sobre S es imposible.

- [ ] *(c)* S es incompatible.
- [ ] *(d)* [=] S es compatible indeterminado.

*(*) **Explicación**: un sistema homogéneo es siempre compatible. Si en la matriz escalonada, E, equivalente a la matriz de coeficientes, A, de S hay una columna que no tiene cabecera de fila entonces necesariamente E (de dimensión 4×4) tiene que tener, al menos, una fila nula y por lo tanto el rango de A sera menor o igual que 3, lo que implica que el rango de A es menor que el número de incógnitas y, en consecuencia, S es compatible indeterminado.*

(5) (1.5 ptos.) Sea M una matriz cuadrada de dimensión 4 tal que los elementos de su diagonal son todos nulos y el resto son unos:

$$M = (m_{i,j})_{4\times 4} \text{ con } m_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Indique cuál de las siguientes proposiciones es **FALSA**.

- [ ] *(a)* [-0.3]$M^2 - 2M - 3I = 0$.
- [ ] *(b)* [1.5] $M - 3I$ es inversible.
- [ ] *(c)* [-0.3]M es inversible.
- [ ] *(d)* [-0.3]$M + I$ no es inversible.

*(*) **Explicación**:*

1.
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Por otro lado
$$2M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

   con lo que:
$$2M + 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = M^2.$$

   Por tanto se verifica $M^2 - 2M - 3I = 0$.

2.
$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M) = 4$$

   y por lo tanto M es inversible.

3. *$M + I$ es una matriz cuyos elementos son todos unos. En consecuencia su rango es uno y por lo tanto no es inversible.*

4. *Finalmente*
$$M - 3I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

   siendo fácil comprobar que la cuarta fila de $M - 3I$ es igual a la suma cambiada de signo de las tres primeras, por lo tanto $\text{rg}(M - 3I) \leq 3 < 4$ con lo queda demostrado que no es inversible.

(6) (1.5 ptos.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

determine la factorización LU con pivote parcial de A ($FA = LU$).

- ☐ *(a)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
- ☐ *(b)* [1.5] $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$
- ☐ *(c)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$
- ☐ *(d)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}.$

(*) ***Explicación:***

1. *Primera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial*

   a) *Se busca el pivote de la primera columna y se intercambian las filas correspondientes:*

$$F^1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) *Se hacen cero los elementos de la primera columna por debajo del pivote con $m_{21} = 0$ y $m_{31} = -1/4$:*

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

2. *Segunda etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:*

   a) *Se busca el pivote de la segunda columna y se intercambian las filas correspondientes (en este caso no hay cambio de filas porque el pivote ya se encuentra en la segunda fila, $F^2 = I_3$):*

$$F^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

   b) *Se hacen cero los elementos de la segunda columna por debajo del pivote con $m_{32} = 1/2$:*

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F = F^2F^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificándose $FA = LU$.

(7) (1 pto.) Dado un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p\}$, indique cuál de las siguientes proposiciones es **FALSA**.

- ☐ *(a)* S es linealmente independiente si y solamente si la igualdad $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ solo se satisface para $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$.
- ☐ *(b)* S es linealmente independiente si y solamente si no es posible expresar ningún vector de S como combinación lineal del resto.
- ☐ *(c)* [=]S es linealmente dependiente si y solamente si todos los vectores de S se pueden expresar como combinación lineal del resto.
- ☐ *(d)* S es linealmente dependiente si y solamente si $\dim(\langle S\rangle) < p$.

*(*) **Explicación**: S es linealmente dependiente si y solamente si **algún** vector de S se puede expresar como combinación lineal del resto: no hace falta que **todos** los vectores de S se puedan expresar como combinación lineal del resto para que S sea un conjunto linealmente dependiente. Por ejemplo el conjunto* $S = \{\mathbf{v}_1 = (1,0,1)^t, \mathbf{v}_2 = (1,1,1)^t, \mathbf{v}_3 = (2,2,2)^t\}$ *es un conjunto linealmente dependiente en el que el vector* $\mathbf{v}_1$ *no se puede poner como combinación lineal de* $\mathbf{v}_2$ *y* $\mathbf{v}_3$*. Por lo tanto la proposición "S es linealmente dependiente si y solamente si todos los vectores de S se pueden expresar como combinación lineal del resto" es falsa. Las otras tres proposiciones son ciertas.*

(8) (1.5 ptos.) Determine las coordenadas del vector $(1,0,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{\mathbf{u}_i\}$, sabiendo que la base $\{\mathbf{u}_i\}$ está formada por los vectores $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

- ☐ *(a)* [-0.3] $(2,2,3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.
- ☐ *(b)* [1.5]$(2,-3,3)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.
- ☐ *(c)* [-0.3]$(4,3,2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.
- ☐ *(d)* [-0.3]$(-2,-3,5)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

*(*) **Explicación**:*
$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

siendo $\{\mathbf{c}_i\}$ *una tercera base de referencia. Si se hace* $\{\mathbf{c}_i\} = \{\mathbf{u}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{c}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

En el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{u}_i\}$ *en función de la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Para obtener las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ *en función de la base* $\{\mathbf{u}_i\}$ *hay que invertir la matriz anterior:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}^{-1}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Aplicando el cambio (1) *al vector* $(1,0,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ *:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Álgebra
ETSI Minas y Energía

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________ **DNI:** ____________

DNI:

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de* ***100 minutos****.*
- *Rellene* ***completamente*** *los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (****sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda****).*
- *En la parte inferior de la página rellene* ***completamente*** *los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar* ***apagados y encima de la mesa****.*
- *Cuando termine el examen debe* ***arrancar y entregar esta hoja****.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
(10) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V tales que $\dim(U_1 \cap U_2) = r \neq 0$. Dadas una base de U_1: $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\}$ y una base de U_2: $\{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

- ☐ *(a)* $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\} \cup \{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$ es una base de $U_1 + U_2$.
- ☐ *(b)* [=] $\dim(U_1 + U_2) = p + q - r$
- ☐ *(c)* $\dim(U_1 + U_2) = p + q$
- ☐ *(d)* $\dim(U_1 + U_2) = p + q - pq$.

*(*) **Explicación**: se sabe (fórmula de Grassmann) que*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Al ser $\dim(U_1) = p$, $\dim(U_2) = q$ *y* $\dim(U_1 \cap U_2) = r$ *se deduce que* $\dim(U_1 + U_2) = p + q - r$. *El resto de las proposiciones son falsas. En particular la proposición "$\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\} \cup \{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$ es una base de $U_1 + U_2$" es falsa porque $U_1 \cap U_2 \neq 0$.*

(2) (1 pto.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = 0, x_2 = 0\} \text{ y } U_2 = \left\langle (2,1,0,1)^t, (1,0,0,1)^t \right\rangle,$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base de $\mathbb{R}^4$, halle unas ecuaciones implícitas de $U_1 \cap U_2$.

- ☐ *(a)* $U_1 \cap U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\right\}$.
- ☐ *(b)* $U_1 \cap U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = 0, x_2 = 0\right\}$.
- ☐ *(c)* [=] $U_1 \cap U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\right\}$.
- ☐ *(d)* $U_1 \cap U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_4 = 0\right\}$.

*(*) **Explicación**: los vectores que pertenecen a $U_1 \cap U_2$ deben verificar a la vez las ecuaciones implícitas de U_1 y las ecuaciones implícitas de U_2. Se conocen las ecuaciones implícitas de U_1, faltan las de U_2. Para obtenerlas se parte de una base de U_2: los dos vectores que forman el sistema generador (es fácil comprobar que son linealmente independientes). A partir de la base se obtienen unas ecuaciones paramétricas y a partir de estas las ecuaciones implícitas de U_2:*

$$U_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{array} \Big/ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \to U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \big/ x_1 - x_2 - x_4 = 0, x_3 = 0\right\}.$$

Por lo tanto

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_4 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right\} \to U_1 \cap U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \big/ x_1 - x_4 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\right\}.$$

***Observación**: la solución no es única pero cualquier otra solución correcta tiene tres ecuaciones implícitas que son combinación lineal de las tres de la solución (c).*

(3) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_2 \end{array}$$

en donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base de W. Dado el vector $\mathbf{v} = (2,3,1)^t_B \in V$, obtenga $f(\mathbf{v})$.

- ☐ *(a)* [=] $(8,2)^t_{B^*}$
- ☐ *(b)* $(0,1)^t_{B^*}$
- ☐ *(c)* $(-1,5,3)^t_B$
- ☐ *(d)* $(2,3,1)^t_B$

*(*) **Explicación**: la matriz asociada a f en las bases B y B^* es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}_{B^*}$$

(4) (1 pto.) Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & W \\ & \mathbf{x} & \to & (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 - 2x_2, x_1, x_1 + x_2)^t \end{array}$$

referida a las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W. Dado el vector $\mathbf{z} = 2\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 \in V$, determine la expresión de $f(\mathbf{z}) \in W$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, sabiendo que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \mathbf{e}_1 & = & \mathbf{e}'_1 & + & \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 & = & 2\mathbf{e}'_1 & - & 2\mathbf{e}'_2 \end{array} \right. .$$

- ☐ *(a)* $4\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$.
- ☐ *(b)* [=] $\mathbf{u}_1 + (3/2)\mathbf{u}_2 + (7/4)\mathbf{u}_3$.
- ☐ *(c)* $2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.
- ☐ *(d)* $(1/2)\mathbf{u}_1 + (2/3)\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.

*(*) **Explicación**: la matriz de la aplicación lineal en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}^{-1}_{\{\mathbf{e}'_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Realizando el correspondiente cambio de base, la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es

$$A' = AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

y, hallando $f(\mathbf{z})$ en la nueva base,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 7/4 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}.$$

(5) (1 pto.) Se define una aplicación lineal $f: V \to W$ entre dos espacios vectoriales de dimensión 3 de manera que $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2$ y $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1$, donde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $B^* = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Indique cuál de los siguientes conjuntos de vectores constituye una base de $\ker(f)$.

☐ *(a)* $\left\{(1,-1,0)^t_B, (0,1,0)^t_B, (1,0,0)^t_B\right\}$.

☐ *(b)* $\left\{(1,1,-1)^t_B, (0,1,0)^t_B\right\}$.

☐ *(c)* $\left\{(2,1,2)^t_B\right\}$.

☐ *(d)* [=] $\left\{(1,1,-1)^t_B\right\}$.

*(*) **Explicación**: la matriz asociada a f en las bases B y B^* es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unas ecuaciones implícitas de $\ker(f)$ *son*

$$\ker(f) = \left\{ \mathbf{x} \in V \ t.q. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in V \ t.q. \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 & = & 0 \end{array} \right\} \right\}.$$

Por lo tanto, de las soluciones propuestas, la única que es una base de $\ker(f)$ *es*

$$\left\{(1,1,-1)^t\right\}.$$

(6) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1 \ _{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (2,1,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \diagup x_1 - x_2 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -2/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 4 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}$$

Base de S : $B = \{\mathbf{a}_1 = (1,1,0)^t, \mathbf{a}_2 = (0,0,1)^t\}$. Se calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S de tres formas distintas:

1. *Utilizando la base B:*

$$\begin{array}{l} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} \\ (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} \end{array}$$

   en donde $\mathbf{v}_1 = \Pr|_S \mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2$ es la proyección ortogonal pedida.

   Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1,$$

el sistema queda

$$\begin{array}{rcrcl} 3\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 4 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 1 \end{array}$$

cuya solución es $\alpha_1 = 3/2$, $\alpha_2 = -1/2$. *La proyección pedida es, por lo tanto,*

$$\Pr|_S \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

2. *Hallando una base ortonormal de* S:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 3, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = 1,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1} \mathbf{z}_1 = (0,0,1)^t - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^t = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^t.$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ *y* $\mathbf{z}_2$ *por su norma se obtiene una base ortonormal:*

$$\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0)^t, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(-1/3, -1/3, 1)^t.$$

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\Pr|_S \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \mathbf{u}_1 - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}^t.$$

3. *Hallando la matriz de proyección: si se denota* $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *la matriz de proyección sobre* S *es*

$$P_S = A(A^t G A)^{-1} A^t G = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\Pr|_S \mathbf{v} = P_S \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

(7) (1 pto.) Acerca de la proyección ortogonal $\mathbf{x}_1$ de un vector $\mathbf{x}$ de un espacio euclídeo E sobre un subespacio V de E, se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 \in V$.

☐ *(b)* $\mathbf{x}_1$ es ortogonal a V.

☐ *(c)* $\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{p}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$, en donde $\{\mathbf{u}_i\}$ es una base cualquiera de V y $\dim(V) = p$.

☐ *(d)* [=] $\mathbf{x}_1 \in V$ y la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_1$ es menor o igual que la distancia de $\mathbf{x}$ a cualquier otro vector de V.

*(*) **Explicación**: si $\mathbf{x}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre V se verifica que*

1. $\mathbf{x}_1 \in V$
2. $\forall \mathbf{z} \in V$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_1-\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_1-\mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\|^2$$
al ser $\mathbf{x}-\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_1-\mathbf{z}$ ortogonales. Cambiando el orden:
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\|^2 \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \quad \forall \mathbf{z} \in V.$$
Por lo tanto la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_1$ es menor o igual que la distancia de $\mathbf{x}$ a cualquier otro vector de V. El resto de proposiciones son falsas.

(8) (1 pto.) Considere el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2\;_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$
Dado el subespacio $F \subset E$ tal que $F = \langle (1,1,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (2,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \rangle$, indique cuál de los siguientes conjuntos de vectores constituye una base de $F^\perp$ (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$).

☐ *(a)* [=] $\left\{(3,4,0)^t\right\}$.

☐ *(b)* $\left\{(0,0,-1)^t, (4,-3,2)^t\right\}$.

☐ *(c)* $\left\{(1,4/3,1)^t\right\}$.

☐ *(d)* $\left\{(1,-3,-2)^t\right\}$.

*(*) **Explicación**:*
$$F^\perp = \left\{ \mathbf{x} \in E \text{ t.q. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$
$$\left\{ \mathbf{x} \in V \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{rcl} -x_3 & = & 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array} \right\} \right\}.$$
Por lo tanto, de las soluciones propuestas, la única que es una base de $F^\perp$ es
$$\left\{ (3,4,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}.$$

(9) (1 pto.) Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

☐ *(a)* $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio del endomorfismo $f : V \to V$ si existe algún vector $\mathbf{x} \in V$ tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

☐ *(b)* [=] Dado un endomorfismo f, el subespacio propio de f asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ coincide con el núcleo de la aplicación $f - \lambda I$.

☐ *(c)* Dado un endomorfismo f, $f - \lambda I$ es un endomorfismo inyectivo si y solamente si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f.

☐ *(d)* El endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f((x_1,x_2)^t) = (x_2,x_1)^t$ tiene un único valor propio $\lambda = 1$.

*(*) **Explicación**: si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio del endomorfismo $f : V \to V$ entonces existe algún vector $\mathbf{x} \in V$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. El subespacio propio de V asociado a λ ($V_\lambda \in V$) estará formado por todos los vectores que verifican la igualdad anterior más el vector nulo:*
$$V_\lambda = \{\mathbf{x} \in V \text{ t.q. } f(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in V \text{ t.q. } f(\mathbf{x}) - \lambda I(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in V \text{ t.q. } (f - \lambda I)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$
y, por lo tanto, $V_\lambda = \ker(f - \lambda I)$. El resto de proposiciones son falsas.

(10) (1 pto.) Sea el endomorfismo $f : V \to V$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Respecto a f se puede afirmar lo siguiente (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$) :

- ☐ *(a)* f tiene valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(-1,1,0)^t\rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle(0,0,1)^t\rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle(1,1,0)^t\rangle$.
- ☐ *(b)* f tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 0$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(0,0,1)^t, (-1,1,0)^t\rangle$ y $V_{\lambda_2} = \langle(0,1,0)^t\rangle$.
- ☐ *(c)* [=] f tiene valores propios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(1,1,0)^t\rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle(0,0,1)^t\rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle(-1,1,0)^t\rangle$.
- ☐ *(d)* f tiene valores propios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(0,1,1)^t\rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle(0,1,0)^t\rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle(-1,1,0)^t\rangle$.

*(*) **Explicación**: ecuación característica:*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0,$$

de donde se deduce que los valores propios de f son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_3, son

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(1,1,0)^t\}$ es una base de V_3. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_1, son

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(0,0,1)^t\}$ es una base de V_1. Por último las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{-1}, son

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto $\{(-1,1,0)^t\}$ es una base de V_{-1}.