Álgebra

1^{er} Curso, Grado en Ingeniería de la Energia
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas y Energía

Universidad Politécnica de Madrid

Exámenes resueltos del curso 2023-24

Este documento recopila los exámenes resueltos de Álgebra Lineal (Álgebra según el nombre oficial del la asignatura en el plan de estudios) correspondientes al curso 2023-24, tanto de la convocatoria ordinaria (incluyendo la evaluación continua) como de la extraordinaria.

2024 Ultano Kindelán Bustelo

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y guardados**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1.5 ptos.) Una empresa tiene tres minas con menas cuya composición es la siguiente:

	Níquel (%)	**Cobre (%)**	**Hierro (%)**
Mina A	1	2	3
Mina B	2	5	7
Mina C	1	3	1

¿Cuántas toneladas (t) de cada mena deben utilizarse para obtener exactamente 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

☐ *(a)* [-0.3]200 t de la mina A, 200 t de la mina B, 150 t de la mina C.

☐ *(b)* [1.5]200 t de la mina A, 100 t de la mina B, 300 t de la mina C.

☐ *(c)* [-0.3]100 t de la mina A, 250 t de la mina B, 150 t de la mina C.

☐ *(d)* [-0.3]300 t de la mina A, 150 t de la mina B, 200 t de la mina C.

(*) ***Explicación****: se plantea el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema planteado:*

$$\begin{array}{rcrl} x_1+2x_2+1x_3 & = & 700 & \leftarrow \textit{Níquel} \\ 2x_1+5x_2+3x_3 & = & 1800 & \leftarrow \textit{Cobre} \\ 3x_1+7x_2+1x_3 & = & 1600 & \leftarrow \textit{Hierro} \end{array}$$

en donde: $x_1 =$ *toneladas de la mena de la mina A,* $x_2 =$ *toneladas de la mena de la mina B,* $x_3 =$ *toneladas de la mena de la mina C. La matriz ampliada de un sistema escalonado equivalente es:*

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & -3 & -900 \end{array}\right)$$

Al ser el rango de la matriz ampliada igual al de la matriz de coeficientes e igual al número de incógnitas, el sistema tiene solución única:

$$x_1 = 200, \qquad x_2 = 100, \qquad x_3 = 300.$$

(2) (1 pto.) Respecto a la existencia y unicidad de soluciones del sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x_1+x_2+x_3+2x_4 & = & 0 \\ x_2-x_3-x_4 & = & 6 \\ x_2+x_3+x_4 & = & 1 \\ 2x_1-2x_2-3x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

se puede afirmar que

☐ *(a)* no existen soluciones.

☐ *(b)* existen infinitas soluciones dependientes de un parámetro (de una variable libre)

☐ *(c)* [=]existe una única solución.

☐ *(d)* existen infinitas soluciones dependientes de dos parámetros (de dos variables libres)

(*) ***Explicación****: realizando operaciones elementales en la matriz ampliada del sistema:*

$$A_b = \left(\begin{array}{rrrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

se deduce que, llamando A *a la matriz de coeficientes,* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 4$ *(número de incógnitas) y, por lo tanto, el sistema es* ***compatible determinado****: existe una única solución.*

(3) (1 pto.) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

☐ *(a)* [=] $|A| = -(\beta + 5\alpha)(\beta - \alpha)^5$

☐ *(b)* $|A| = (\beta + 5\alpha)(\beta - \alpha)^5$

☐ *(c)* $|A| = -(\beta - 5\alpha)(\beta + \alpha)^5$

☐ *(d)* $|A| = (\beta - 5\alpha)(\beta + \alpha)^5$

(*) ***Explicación****: realizando operaciones elementales en la matriz A:*
(Se resta la primera fila a todas las demás)

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ \beta-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta \end{vmatrix} =$$

(Se suman las cinco primeras columnas a la última)

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \beta+5\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(\beta + 5\alpha)(-1)^7(\beta - \alpha)(-1)^6(\beta - \alpha)(-1)^5(\beta - \alpha)(-1)^4(\beta - \alpha)(-1)^3(\beta - \alpha) =$$
$$(-1)^{25}(\beta - \alpha)^5(\beta + 5\alpha) = -(\beta + 5\alpha)(\beta - \alpha)^5.$$

(4) (1 pto.) ¿Cuál es el objetivo de la técnica del pivote parcial que distingue al método de Gauss del método de Gauss con pivote parcial?

☐ *(a)* Evitar que en las sucesivas etapas de la triangularización gaussiana se utilicen pivotes nulos.

☐ *(b)* Conseguir que en cada una de las etapas de la la triangularización gaussiana se utilice como pivote un promedio de los pivotes utilizados en las etapas anteriores.

☐ *(c)* Evitar que en las sucesivas etapas de la triangularización gaussiana se utilicen pivotes muy grandes en valor absoluto.

☐ *(d)* [=] Evitar que en las sucesivas etapas de la triangularización gaussiana se utilicen pivotes muy pequeños en valor absoluto.

(*) ***Explicación****: en la resolución de un sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas mediante el método de Gauss, la técnica del pivote parcial busca evitar utilizar pivotes (a_{kk}, $k = 1, \ldots, n-1$) muy pequeños en valor absoluto. Así se consigue limitar la propagación de errores de redondeo.*
Evitar utilizar pivotes nulos no es algo específico de la técnica de pivote parcial. El método de Gauss sin pivote parcial también lo tiene que evitar puesto que un pivote nulo provoca un error en la ejecución del programa (división por cero).

(5) (1 pto.) Sea A una matriz, cuadrada e inversible, de dimensión 80. Suponiendo que se estuviera realizando la triangularización gaussiana de la matriz A y se hubiera completado la etapa $k = 4$ (se habrían obtenido ceros por debajo de los pivotes (1,1), (2,2), (3,3) y (4,4), ¿cuántas operaciones en coma flotante se necesitan para completar la etapa $k = 5$?

☐ *(a)* 12250. | ☐ *(b)* 17391. | ☐ *(c)* [=] 11325. | ☐ *(d)* 17577.

(*) ***Explicación****: en la etapa* $k = 5$ *hay que realizar las* $80 - 5 = 75$ *operaciones elementales siguientes:*

$$F_i = F_i + m_{i5}F_5 \quad i = 6, \cdots, 80$$

y en cada una de las 75 *operaciones elementales anteriores se realizan* 75 *sumas y* 75 *multiplicaciones:*

$$a_{ij} = a_{ij} + m_{i5}a_{5j} \quad j = 6, \cdots, 80.$$

Por otro lado hay que tener en cuenta que para calcular los 75 *coeficientes*

$$m_{i5} = -a_{i5}/a_{55} \quad i = 6, \cdots, 80$$

hay que realizar 75 *divisiones. Por lo tanto, en total, hay que realizar*

$$2 \times 75^2 + 75 = 11325 \text{ FLOPs.}$$

(6) (1 pto.) Suponga que la factorización $FA = LU$ de una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ con pivote parcial se realiza con un número impar de cambios de fila. ¿Cuál es el valor de $\det(A)$? **Observación**: en las respuestas se utiliza la notación habitual para los elementos de las matrices $L = (l_{ij}), U = (u_{ij})$ y para los productorios: $\prod_{i=1}^n l_{ii} = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn}$.

☐ *(a)* [=] $\det(A) = -\prod_{i=1}^n u_{ii}$.

☐ *(b)* $\det(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$.

☐ *(c)* $\det(A) = \prod_{i=1}^n l_{ii}$.

☐ *(d)* $\det(A) = -\prod_{i=1}^n l_{ii}$.

(*) ***Explicación****: si* $FA = LU$ *entonces*

$$\det(F)\det(A) = \det(L)\det(U)$$

y, despejando $\det(A)$,

$$\det(A) = -\det(U) = -\prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

Ya que $\det(F) = -1$ *(por haberse realizado un número impar de cambios de fila),* $\det(L) = 1$ *(matriz triangular inferior con unos en la diagonal) y* $\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$ *(matriz triangular superior).*

Otra forma de resolver el ejercicio*:*

Para llegar a la factorización $FA = LU$ *se parte de la matriz* A *y mediante operaciones elementales del tercer tipo (reemplazar una fila por ella misma más otra multiplicada por un escalar) y operaciones elementales del segundo tipo (intercambio de dos filas) se obtiene una matriz equivalente y triangular superior* U*. Si se tiene en cuenta que al realizar una operación elemental del tercer tipo, la matriz equivalente obtenida tiene el mismo determinante que la original y que al realizar una operación elemental del segundo tipo, el determinante de la nueva matriz es igual al de la original cambiado de signo se tiene que:*

$$\det(A) = -\det(U) = -\prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

Ya que el número de cambios de fila es impar.

(7) (1 pto.) Indique cuál de las siguientes proposiciones es **cierta**.

☐ *(a)* La dimensión de una base de un espacio vectorial es el número de vectores que la forman.

☐ *(b)* La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un conjunto linealmente independiente de vectores de V.

☐ *(c)* [=] La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

☐ *(d)* La dimensión de un espacio vectorial V es el mayor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V.

*(*) **Explicación**: la proposición "La dimensión de un espacio vectorial V es el menor número de vectores que pueden formar un sistema generador de V" es cierta porque si no se puede quitar ningún vector del sistema generador sin que deje de ser un sistema generador entonces el conjunto de vectores que lo forman es linealmente independiente y un sistema generador formado por vectores linealmente independientes entre sí es una base, siendo el número de vectores que lo forman la dimensión de V. Las otras tres proposiciones son falsas.*

(8) (1.5 ptos.) Dada una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, determine las coordenadas del vector $-\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, sabiendo que $\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$.

☐ *(a)* [1.5] $(0,-2,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.3] $(-2,-4,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [-0.3] $(-1,-3,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [-0.3] $(1,-2,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base $\{\mathbf{e}_i\}$ en función de la base $\{\mathbf{u}_i\}$:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ a coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen las coordenadas pedidas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1.$$

También se puede resolver el ejercicio calculando la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y entonces, aplicando el cambio de base,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

(9) (1 pto.) Dados cuatro vectores de un espacio vectorial, V, de dimensión cinco, cuyas coordenadas en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V son $\mathbf{v}_1 = (1,1,0,0,1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,0,0)^t$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1,0,1)^t$ y $\mathbf{v}_4 = (2,-1,-2,0,3)^t$, determine unas ecuaciones implícitas del s.e.v. $U = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$.

☐ *(a)* $U = \{\mathbf{x} \in V / 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

☐ *(b)* $U = \{\mathbf{x} \in V / x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

☐ *(c)* $U = \{\mathbf{x} \in V / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

☐ *(d)* [=] $U = \{\mathbf{x} \in V / 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0, x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

*(*) **Explicación**: en primer lugar se obtiene una base de S:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Del escalamiento anterior se deduce que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente independientes y $\mathbf{v}_4$ es combinación lineal de ellos tres. Por lo tanto la dimensión de S es tres y una base de S es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
Una vez conocida una base se obtiene unas ecuaciones paramétricas:

$$U = \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha + \beta \\ x_3 = \beta + \gamma \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \alpha + \gamma \end{cases}$$

de donde eliminando α, β y γ se obtienen unas ecuaciones implícitas:

$$U = \{\mathbf{x} \in V / 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0, x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

***Observación**: la solución no es única pero cualquier otra solución correcta tiene dos ecuaciones implícitas que son combinación lineal de las dos de la solución (d).*
También se puede resolver el ejercicio comprobando, como se ha hecho antes, que de los cuatro vectores que forman el sistema generador de U solamente hay tres linealmente independientes, lo que implica que la dimensión de U es tres y por lo tanto tendrá $5 - 3 = 2$ ecuaciones implícitas linealmente independientes. En consecuencia las soluciones (a) y (c) son incorrectas. Tomando $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ como base de U es fácil comprobar que $\mathbf{v}_3$ no verifica la primera ecuación de la solución (b). Por otro lado $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ verifican las dos ecuaciones de la solución (d) que es la correcta.

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y guardados**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Dadas una base de U_1: $\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p\}$ y una base de U_2: $\{\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_q\}$, cualquier vector $\mathbf{x} \in U_1 \cap U_2$ se puede expresar como $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{a}_p$ o $\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_q\mathbf{b}_q$. Por lo tanto

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{a}_p = \beta_1\mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_q\mathbf{b}_q.$$

Respecto al sistema anterior se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* Solo puede ser compatible indeterminado, con un número de variables libres igual a $\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$.

☐ *(b)* [=] Puede ser compatible determinado o compatible indeterminado pero no puede ser incompatible. En los casos en que sea compatible indeterminado, el número de variables libres es igual a $\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2)$.

☐ *(c)* Puede ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. En los casos en que sea compatible indeterminado, el número de variables libres es $\dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$.

☐ *(d)* Puede ser compatible determinado o compatible indeterminado pero no puede ser incompatible. En los casos en que sea compatible indeterminado, el número de variables libres es igual a $\dim(V) - \dim(U_1) - \dim(U_2)$.

*(*) **Explicación**: el sistema del enunciado es un sistema homogéneo que no puede ser incompatible. Además el número de variables libres ($\dim(U_1 \cap U_2)$) es igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz de coeficientes. El número de incógnitas es $p + q = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ y el rango de la matriz de coeficientes, A, coincide con el rango de sus columnas que constituyen un sistema generador de $U_1 + U_2$, por lo tanto $\mathrm{rg}(A) = \dim(U_1 + U_2)$. Resumiendo:*

$$\textit{Número de variables libres } = \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2).$$

El sistema será compatible determinado cuando $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2)$. En este caso la única solución del sistema homogéneo será la trivial y $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ (subespacios independientes).

(2) (1.5 ptos.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \left\langle (1,0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (2,1,0,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (-2,-3,4,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle \text{ y } U_2 = \left\langle (2,1,0,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (-1,-1,1,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle,$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$, determine, entre las ecuaciones siguientes, cuáles son unas ecuaciones implícitas de $U_1 \cap U_2$.

☐ *(a)* [-0.3] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.3] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_4 = 0, x_1 - x_2 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [1.5] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_4 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [-0.3] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: en primer lugar se hallan unas bases de los dos subespacios:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{Base de } U_1 : \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{Base de } U_2 : \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Dadas una base de U_1: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ y una base de U_2: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, cualquier vector $\mathbf{x} \in U_1 \cap U_2$ se puede expresar como $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2$ ó $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2$. Por lo tanto

$$\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 = \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2, \quad \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

De la ecuación vectorial anterior se deduce el sistema homogéneo de cuatro ecuaciones escalares siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -\lambda \\ \beta & = & -\lambda - \mu \\ \alpha - 2\beta & = & \lambda + 2\mu \\ -\beta & = & \lambda + 3\mu \end{array}\right. .$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$\alpha = \alpha,\ \beta = \alpha,\ \lambda = -\alpha,\ \mu = 0$$

y, sustituyendo los valores de λ y μ en las ecuaciones paramétricas de U_2, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la intersección:

$$U_1 \cap U_2 = \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -\alpha \\ x_2 & = & -\alpha \\ x_3 & = & \alpha \\ x_4 & = & \alpha \end{array}\right.$$

(también se podrían haber sustituido los valores de α y β en las ecuaciones paramétricas de U_1).
La dimensión de $U_1 \cap U_2$ es igual a uno y sus ecuaciones implícitas son (se despeja α de la primera ecuación y se sustituye en las otras tres):

$$x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0,\ x_1 + x_4 = 0.$$

***Observación**: la solución no es única pero cualquier otra solución correcta tiene tres ecuaciones implícitas que son combinación lineal de las tres de la solución (c).*

(3) (1 pto.) Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \end{array}$$

en donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ y $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$, sabiendo que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{array}\right. \text{ y } \left\{\begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1 + 2\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2 - \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_2 \end{array}\right.$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 5/4 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ *a* $\{\mathbf{e}_i\}$ *es:*

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

y la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}'_i\}$ *a* $\{\mathbf{u}_i\}$ *es:*

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

de donde se deduce que la matriz asociada a f *en las bases* $\{\mathbf{e}'_i\}$ *y* $\{\mathbf{u}'_i\}$ *es:*

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W, cuya matriz asociada en ciertas bases de V y W es A. Si f es una aplicación inyectiva pero no sobreyectiva, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* Dado $\mathbf{b} \in W$, si $\mathbf{v}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entonces $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{u}$ para cualquier $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ perteneciente al núcleo de f.

☐ *(b)* [=] Se puede encontrar algún término independiente, $\mathbf{b} \in W$, con el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución.

☐ *(c)* $\forall \mathbf{b} \in W$ el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es siempre compatible indeterminado.

☐ *(d)* Dado $\mathbf{b} \in W$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede ser compatible determinado.

(*) ***Explicación****: si* f *es inyectiva el sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *será compatible determinado (*$\ker f = \{\mathbf{0}\}$*)* $\forall \mathbf{b} \in \operatorname{Im} f$*. Al no ser sobreyectiva existen vectores de* W *que no tienen antecedente por* f *y por lo tanto el sistema sera incompatible* $\forall \mathbf{b} \notin \operatorname{Im} f$*.*
Resumiendo: el sistema será incompatible dependiendo de si $\mathbf{b}$ *pertenece a* $\operatorname{Im} f$ *o no. En el caso de ser compatible será compatible determinado.*

(5) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ {}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (2,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [=] $\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}.$$

Base de S *:* $B = \{\mathbf{a}_1 = (1,1,0)^t, \mathbf{a}_2 = (2,0,1)^t\}$*. Se calcula la proyección ortogonal de* $\mathbf{v}$ *sobre* S *de tres formas distintas:*

1. *Utilizando la base B:*

$$(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{a}_1=0\Rightarrow(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1)\alpha_1+(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)\alpha_2=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{v}$$
$$(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{a}_2=0\Rightarrow(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1)\alpha_1+(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2)\alpha_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v}$$

en donde $\mathbf{v}_1=\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2$ *es la proyección ortogonal pedida.*

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=2,\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=2,$$

$$\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=5,\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1&1&0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=3,$$

$$\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=6,$$

el sistema queda

$$2\alpha_1+2\alpha_2=3$$
$$2\alpha_1+5\alpha_2=6$$

cuya solución es $\alpha_1=1/2$, $\alpha_2=1$. *La proyección pedida es, por lo tanto,*

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}5/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

2. *Hallando una base ortonormal de S:*

$$\mathbf{z}_1=\mathbf{a}_1$$
$$\mathbf{z}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_1}\mathbf{z}_1=(2,0,1)^t-(1,1,0)^t=(1,-1,1)^t,$$
$$\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_1=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1=2,\quad \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{z}_1=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1=2.$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ *y* $\mathbf{z}_2$ *por su norma se obtiene una base ortonormal:*

$$\mathbf{z}_2\cdot\mathbf{z}_2=\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3.$$

$$\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t,\quad \mathbf{u}_2=\frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^t.$$

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2=-\frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1+\frac{3}{\sqrt{3}}\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}5/2&1/2&1\end{pmatrix}^t.$$

3. *Hallando la matriz de proyección: si se denota* $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$, *la matriz de proyección sobre S es*

$$P_S=A(A^tA)^{-1}A^t=\begin{pmatrix}5/6&1/6&1/3\\1/6&5/6&-1/3\\1/3&-1/3&1/3\end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=P_S\mathbf{v}=\begin{pmatrix}5/2\\1/2\\1\end{pmatrix}.$$

(6) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \;{}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la matriz de proyección sobre el subespacio $S = \langle(-1,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}\rangle$.

☐ *(a)* [1.0] $P_S = \begin{pmatrix} 4/25 & -7/25 \\ -12/25 & 21/25 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [-0.2] $P_S = \begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ -3/10 & 9/10 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* [-0.2] $P_S = \begin{pmatrix} 1/25 & -3/25 \\ -3/25 & 9/25 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* [1.0] $P_S = \begin{pmatrix} 4/25 & -7/25 \\ -12/25 & 21/25 \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: expresión matricial del producto escalar:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^tG\mathbf{y}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

Conociendo la matriz de Gram del producto escalar, G, y la matriz A cuyas columnas coinciden con las coordenadas de los vectores de una base de S en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}$, se puede calcular la matriz de proyección sobre S:

$$P_S = A(A^tGA)A^tG = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}(25)^{-1}\begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 & -7/25 \\ -12/25 & 21/25 \end{pmatrix}.$$

(7) (1 pto.) En la siguiente tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos del plano.

x	1	1	2	3
y	1	2	1	2

Sabiendo que el polinomio de segundo grado que aproxima los puntos anteriores por el método de mínimos cuadrados es $y^*(x) = 7/2 - (11/4)x + (3/4)x^2$, ¿cuál es la menor distancia entre $\mathbf{y}$ y $W = \langle\mathbf{1},\mathbf{x},\mathbf{x}^2\rangle$? Se recuerda que $\mathbf{y} = (1,2,1,2)^t$, $\mathbf{1} = (1,1,1,1)^t$, $\mathbf{x} = (1,1,2,3)^t$ y $\mathbf{x}^2 = (1,1,4,9)^t$.

☐ *(a)* [=] $1/\sqrt{2}$. ☐ *(b)* 0. ☐ *(c)* $\sqrt{3}$ ☐ *(d)* $\sqrt{19/2}$

(*) ***Explicación****: la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre W es $\mathbf{y}^* = (3/2,3/2,1,2)^t$ (sus cuatro componentes son los valores de la recta para los cuatro valores de las x). La distancia entre $\mathbf{y}$ y $\mathbf{y}^*$ es la menor de la distancias entre $\mathbf{y}$ y cualquier vector de W. Por lo tanto la distancia pedida es:*

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\| = \|(-1/2,1/2,0,0)^t\| = 1/\sqrt{2}.$$

(8) (1.5 ptos.) Sea el endomorfismo $f : V \to V$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respecto a f se puede afirmar lo siguiente (todas las coordenadas están referidas a la base $\{\mathbf{e}_i\}$) :

☐ *(a)* [-0.3] f tiene valores propios $\lambda_1 = -3$ (doble) y $\lambda_2 = 6$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(1,1,0)^t,(0,1,0)^t\rangle$ y $V_{\lambda_2} = \langle(0,1,2)^t\rangle$.

☐ *(b)* [1.5] f tiene valores propios $\lambda_1 = -3$ (doble) y $\lambda_2 = 6$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(1,2,0)^t,(0,2,1)^t\rangle$ y $V_{\lambda_2} = \langle(-2,1,-2)^t\rangle$.

☐ *(c)* [-0.3] f tiene valores propios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 6$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle(-1,1,2)^t\rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle(0,2,1)^t\rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle(1,2,0)^t\rangle$.

☐ *(d)* [-0.3]f tiene valores propios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 6$, con subespacios propios asociados $V_{\lambda_1} = \langle (0,1,1)^t \rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle (0,1,2)^t \rangle$ y $V_{\lambda_3} = \langle (1,2,0)^t \rangle$.

(*) ***Explicación****: ecuación característica:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 3+\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda-18) = 0,$$

de donde se obtiene que los valores propios de f son $\lambda_1 = -3$, y $\lambda_2 = 6$. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{λ_1}, son

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto, $\{(1,2,0)^t, (0,2,1)^t\}$ es una base de V_{λ_1}. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{λ_2}, son

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y $\{(-2,1,-2)^t\}$ es una base de V_{λ_2}.

(9) (1 pto.) Clasifique la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

☐ *(a)* A es definida positiva.

☐ *(b)* A es semidefinida positiva pero no definida positiva.

☐ *(c)* [=] A es indefinida.

☐ *(d)* A es definida negativa.

(*) ***Explicación****: A es indefinida porque tiene un valor propio negativo y dos positivos:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 3+\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda+3)(\lambda^2-7\lambda+2) = 0 \to \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 \approx 6.7016 \text{ y } \lambda_3 \approx 0.2984.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **80 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y guardados**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1.5 ptos.) Una empresa de transportes gestiona una flota de 60 camiones de tres tamaños diferentes. Diariamente, en promedio, cada camión grande transporta 15000 kg de carga y recorre 400 km, cada camión mediano transporta 10000 kg y recorre 300 km y cada camión pequeño transporta 5000 kg y recorre 100 km. Cada día los camiones de la empresa transportan, en promedio, un total de 475 toneladas y recorren 12500 km entre todos. ¿Cuántos camiones de cada tamaño gestiona la empresa?

☐ *(a)* [-0.3]10 grandes, 15 medianos y 35 pequeños.

☐ *(b)* [-0.3]7 grandes, 21 medianos y 32 pequeños.

☐ *(c)* [1.5]5 grandes, 25 medianos y 30 pequeños.

☐ *(d)* [-0.3]8 grandes, 19 medianos y 33 pequeños.

(*) ***Explicación****: se plantea el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema planteado:*

$$\begin{array}{rcrl} x_1+x_2+x_3 & = & 60 & \leftarrow \textit{camiones totales} \\ 15x_1+10x_2+5x_3 & = & 475 & \leftarrow \textit{cantidad transportada (t)} \\ 400x_1+300x_2+100x_3 & = & 12500 & \leftarrow \textit{distancia recorrida (km)} \end{array}$$

en donde: $x_1 =$ *número de camiones grandes,* $x_2 =$ *número de camiones medianos,* $x_3 =$ *número de camiones pequeños. La matriz ampliada de un sistema escalonado equivalente es:*

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -1 & -2 & -85 \\ 0 & 0 & -1 & -30 \end{array}\right)$$

Al ser el rango de la matriz ampliada igual al de la matriz de coeficientes e igual al número de incógnitas, el sistema tiene solución única:

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 25, \qquad x_3 = 30.$$

(2) (1 pto.) Sea S un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas. Si se sabe que $m < n$ se puede afirmar que

☐ *(a)* S puede ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

☐ *(b)* S es siempre compatible indeterminado.

☐ *(c)* S no puede ser incompatible.

☐ *(d)* [=]S no puede ser compatible determinado.

(*) ***Explicación****: al ser* $m < n$ *el rango de la matriz de coeficientes de* S *es menor que el número de incógnitas y por lo tanto, aplicando el teorema de Rouché Frobenius, nunca podrá ser compatible determinado (siempre habrá, al menos, una variable libre). El sistema* S *puede ser compatible indeterminado o incompatible pero no compatible determinado.*

(3) (1 pto.) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrrrr} x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & (x-1) \end{array}\right)$$

☐ *(a)* [=]$x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

☐ *(b)* $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1$.

☐ *(c)* $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$.

☐ *(d)* $x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

(*) ***Explicación:***

$$\begin{aligned}\det(A) &= x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 2 & 3 & 4 & (x-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= x\left(x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 3 & 4 & (x-1) \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}\right) + 1\end{aligned}$$

$$= x\left(x\left(x\left(x^2 - x + 4\right) + 3\right) + 2\right) + 1 = x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

(4) (1.5 ptos.) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + ax_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + bx_3 - 4x_4 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 2 \end{aligned}$$

discuta la existencia y unicidad de soluciones del sistema en función de los valores de a y b ($a, b \in \mathbb{R}$).

☐ *(a)* [1.5]

$b \neq 1$: compatible indeterminado con 1 grado de libertad

$b = 1$ { $a = 1$: compatible indeterminado con 2 grados de libertad; $a \neq 1$: compatible indeterminado con 1 grado de libertad

☐ *(b)* [-0.3]

$b \neq 1$: compatible determinado

$b = 1$ { $a = 1$: compatible indeterminado con 1 grado de libertad; $a \neq 1$: compatible indeterminado con 2 grados de libertad

☐ *(c)* [-0.3]

$b = 1$: compatible indeterminado con 1 grado de libertad

$b \neq 1$ { $a = 1$: compatible indeterminado con 2 grados de libertad; $a \neq 1$: compatible indeterminado con 1 grado de libertad

☐ *(d)* [-0.3]

$b \neq 1$: compatible indeterminado con 1 grado de libertad

$b = 1$ { $a = 1$: incompatible; $a \neq 1$: compatible indeterminado con 2 grados de libertad

(*) ***Explicación****: para estudiar la existencia y unicidad de soluciones se obtiene una forma escalonada de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes del sistema:*

$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a & 1 \\ 2 & -3 & b & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a & 1 \\ 0 & -5 & b+2 & -4-2a & 1 \\ 0 & 0 & 1-b & -1+a & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & b & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -5 & b+2 & -4-2a \\ 0 & 0 & 1-b & -1+a \end{pmatrix}$$

de donde se deduce lo siguiente:

1. $b \neq 1$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 3 < 4$, *sistema compatible indeterminado. La solución dependerá de un parámetro (4-3).*
2. $b = 1$

a) $a = 1$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 2 < 4$, *sistema compatible indeterminado. La solución dependerá de dos parámetros (4-2).*

b) $a \neq 1$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 3 < 4$, *sistema compatible indeterminado. La solución dependerá de un parámetro (4-3).*

(5) (1 pto.) Dado un sistema lineal de 200 ecuaciones y 200 incógnitas $(x_1, \cdots, x_{200})$, determine el número de operaciones de coma flotante (FLOPS) que se necesitan para despejar la incógnita x_{85} en el proceso de remonte del método de Gauss. Recuerde que en el proceso de remonte, al despejar la incógnita x_{85}, las incógnitas $x_{86}, \cdots, x_{200}$ se han despejado previamente y su valor es conocido (no hay que calcular el número de operaciones necesarias para despejarlas).

☐ *(a)* 115. | ☐ *(b)* 284. | ☐ *(c)* [=]231. | ☐ *(d)* 200.

(*) ***Explicación****: despejando* x_{85} *se obtiene*

$$x_{85} = \frac{b_{85} - \sum_{k=86}^{200} a_{85,k} x_k}{a_{85,85}},$$

en donde se realizan $200 - 85$ *multiplicaciones,* $200 - 85$ *sumas (incluyendo una resta) y una división. En total*

$$2 \times 115 + 1 = 231 \text{ FLOPS.}$$

(6) (1.5 ptos.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

determine la factorización LU con pivote parcial de A.

☐ *(a)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

☐ *(b)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 5/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5/2 & 1 \\ -9/4 & 25/8 & 25/4 \end{pmatrix}.$

☐ *(c)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/7 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}.$

☐ *(d)* [1.5] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/17 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 3/17 \end{pmatrix}.$

(*) ***Explicación****:*

1. *Primera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial*

   a) *Se busca el pivote de la primera columna y se intercambian las filas correspondientes:*

$$F^1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   b) *Se hacen cero los elementos de la primera columna por debajo del pivote con* $m_{21} = -1/2$ *y* $m_{31} = -1/4$*:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \end{pmatrix}.$$

2. *Segunda etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:*

a) *Se busca el pivote de la segunda columna y se intercambian las filas correspondientes:*

$$F^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

b) *Se hacen cero los elementos de la segunda columna por debajo del pivote con* $m_{32} = 2/17$*:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 3/17 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 17/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 3/17 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & 1 & 0 \\ -m_{21} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & -2/17 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F = F^2F^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificándose $FA = LU$.

(7) (1 pto.) Sea $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de un espacio vectorial, V, definido sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ con $a \neq 0$ un vector de V. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

☐ *(a)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es un sistema linealmente dependiente.

☐ *(b)* [=]$\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V.

☐ *(c)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es un sistema linealmente independiente pero no es generador de V.

☐ *(d)* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de V.

(*) ***Explicación****:* $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *no puede ser una base de* V *porque la dimensión de* V *es tres. Por lo tanto para ver cuál de las otras tres opciones es la correcta hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}_2$ *y* $\mathbf{e}_3$*:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz que tiene como filas las coordenadas de los tres vectores tiene rango tres (recuerde que $a \neq 0$*), los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, al ser la dimensión de* V *tres, forman una base de* V*.*

(8) (1.5 ptos.) Dada una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, determine las coordenadas del vector $-2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, sabiendo que $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

☐ *(a)* [-0.3]$(-4,-5,2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(b)* [1.5]$(1,-3,-1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(c)* [-0.3]$(-1,3,-2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(d)* [-0.3]$(-2,-5,2)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base* $\{\mathbf{u}_i\}$ *en función de la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{u}_i\}$ *a coordenadas en la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*. Por lo tanto:*

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}.$$

Resolviendo el sistema anterior se obtienen las coordenadas pedidas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = -1.$$

También se puede resolver el ejercicio calculando la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}$ *a* $\{\mathbf{u}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y entonces, aplicando el cambio de base,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}.$$

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y guardados**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sean U_1 y U_2 dos subespacios **independientes** de un espacio vectorial V. Sabiendo que $\dim(V) = n$, $\dim(U_1) = p$, $\dim(U_2) = q$ y $\dim(U_1 + U_2) = r$, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* [=] $n \geq r$ y $r = p + q$.

☐ *(b)* $n = r$ y $n = p + q$.

☐ *(c)* $n \geq r$ y $r > p + q$.

☐ *(d)* $n = r$ y $n > p + q$.

(*) ***Explicación****: a partir de la fórmula de Grassman,*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2),$$

y teniendo en cuenta que $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$ *por ser* U_1 *y* U_2 *independientes, se deduce que* $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ *(*$r = p + q$*). Por otro lado al no ser* U_1 *y* U_2 *necesariamente suplementarios en* V *se verifica* $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(V)$ *(*$n \geq r$*).*

(2) (1 pto.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle/\; \begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{array} \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}} \text{ y } U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle/\; \begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}},$$

en donde todas las coordenadas están referidas a una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$, determine cuál de los siguientes conjuntos de vectores es una base de $U_1 \cap U_2$.

☐ *(a)* $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}$.

☐ *(b)* [=] $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}$.

☐ *(c)* $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}$.

☐ *(d)* $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\}$.

(*) ***Explicación****: los vectores que pertenecen a* $U_1 \cap U_2$ *deben verificar a la vez las ecuaciones implícitas de* U_1 *y las ecuaciones implícitas de* U_2*:*

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \right\} \rightarrow U_1 \cap U_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle/\; \begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \\ x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo el sistema homogéneo formado por las ecuaciones implícitas se obtiene un sistema de ecuaciones paramétricas de $U_1 \cap U_2$ *y a partir de este último una base de* $U_1 \cap U_2$*:*

$$\text{Base de } U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(3) (1 pto.) Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \rightarrow & W \\ & \mathbf{x} & \rightarrow & (y_1, y_2, y_3)^t = (x_1 - 2x_2, x_1, x_1 + x_2)^t \end{array}$$

referida a las bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de V y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de W. Dado el vector $\mathbf{z} = 2\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 \in V$, determine la expresión de $f(\mathbf{z}) \in W$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, sabiendo que

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \mathbf{e}_1 & = & \mathbf{e}'_1 & + & \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 & = & 2\mathbf{e}'_1 & - & 2\mathbf{e}'_2 \end{array} \right. .$$

☐ *(a)* $4\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$.

☐ *(b)* [=] $\mathbf{u}_1 + (3/2)\mathbf{u}_2 + (7/4)\mathbf{u}_3$.

☐ *(c)* $2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.

☐ *(d)* $(1/2)\mathbf{u}_1 + (2/3)\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.

*(*) **Explicación**: la matriz de la aplicación lineal en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{e}'_i\}$ a $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}^{-1}_{\{\mathbf{e}'_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Realizando el correspondiente cambio de base, la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es

$$A' = AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

y, hallando $f(\mathbf{z})$ en la nueva base,

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 7/4 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}.$$

(4) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V y W. Si $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* [=] $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$.

☐ *(b)* $\forall \mathbf{y} \in W, \exists \mathbf{x} \in V$ tal que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

☐ *(c)* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{u} \in V$, con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u} \Rightarrow f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$.

☐ *(d)* $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V, \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \Rightarrow f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$.

*(*) **Explicación**: si $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ no existen vectores no nulos de V cuya imagen sea $\mathbf{0}$, entonces*

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2) \neq \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2).$$

Por lo tanto f es inyectiva.

(5) (1.5 ptos.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 \;{}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (2,1,2)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* [-0.3]$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.3]$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [1.5]$\begin{pmatrix} 3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [-0.3]$\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y} = \mathbf{x}^t \mathbf{y}.$$

Base de S : $B = \{\mathbf{a}_1 = (1,1,0)^t, \mathbf{a}_2 = (2,0,1)^t\}$. Se calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S de tres formas distintas:

1. *Utilizando la base B:*

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}$$
$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1)\alpha_1 + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2)\alpha_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}$$

en donde $\mathbf{v}_1 = \mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$ es la proyección ortogonal pedida.

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 7,$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8,$$

el sistema queda

$$5\alpha_1 + 4\alpha_2 = 7$$
$$4\alpha_1 + 5\alpha_2 = 8$$

cuya solución es $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 4/3$. La proyección pedida es, por lo tanto,

$$\mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

2. *Hallando una base ortonormal de S:*

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1$$
$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1}\mathbf{z}_1 = (2,0,1)^t - \frac{4}{5}(1,1,0)^t = (6/5, -4/5, 1)^t,$$
$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 5, \quad \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 = 4.$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ por su norma se obtiene una base ortonormal:

$$\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 6/5 & -4/5 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 6/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix} = 9/5.$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,1,0)^t, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{3}(6/5, -4/5, 1)^t.$$

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\mathrm{Pr}\,|_S \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{7}{\sqrt{5}}\mathbf{u}_1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}^t.$$

3. *Hallando la matriz de proyección: si se denota* $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *la matriz de proyección sobre* S *es*

$$P_S = A(A^tGA)^{-1}A^tG = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/9 & 7/9 & -4/9 \\ 2/9 & -2/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v} = P_S\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

(6) (1 pto.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1\ {}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la matriz de proyección sobre el subespacio $S = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \rangle$.

☐ *(a)* $P_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $P_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* [=] $P_S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $P_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: expresión matricial del producto escalar:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^tG\mathbf{y}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

Conociendo la matriz de Gram del producto escalar, G*, y la matriz* A *cuyas columnas coinciden con las coordenadas de los vectores de una base de* S *en función de la base* $\{\mathbf{e}_i\}$*, se puede calcular la matriz de proyección sobre* S*:*

$$P_S = A(A^tGA)A^tG =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(7) (1 pto.) En la siguiente tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos del plano.

x	1	1	2	3
y	1	2	1	2

Sabiendo que el polinomio de segundo grado que aproxima los puntos anteriores por el método de mínimos cuadrados es $y^*(x) = 7/2 - (11/4)x + (3/4)x^2$, ¿cuál es la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $W = \langle \mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2 \rangle$? Se recuerda que $\mathbf{y} = (1,2,1,2)^t$, $\mathbf{1} = (1,1,1,1)^t$, $\mathbf{x} = (1,1,2,3)^t$ y $\mathbf{x}^2 = (1,1,4,9)^t$.

☐ *(a)* [=] $(\ 3/2 \quad 3/2 \quad 1 \quad 2\ )^t$.

☐ *(b)* $(\ 1 \quad 7/2 \quad -11/4 \quad 3/4\ )^t$.

☐ *(c)* $(\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0\ )^t$.

☐ *(d)* $(\ 7 \quad -11 \quad 1 \quad 3\ )^t$.

(*) ***Explicación****: la proyección ortogonal de* $\mathbf{y}$ *sobre* W *es*

$$Pr|_W\mathbf{y} = (7/2)\mathbf{1} - (11/4)\mathbf{x} + (3/4)\mathbf{x}^2 = \frac{7}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{11}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\4\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

(8) (1.5 ptos.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y sabiendo que D es una matriz diagonal semejante a A, elija, de entre las cuatro matrices siguientes, la matriz P que verifica $D = P^{-1}AP$ y $P^{-1} = P^t$.

☐ *(a)* [-0.3] $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [1.5] $P = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* [-0.3] $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 2/3 & -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* [-0.3] $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ -1/3 & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$.

(*) ***Explicación****: las opciones c) y d) no cumplen* $P^{-1} = P^t$ *(es fácil comprobar que sus columnas no constituyen una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$*). Para distinguir entre las opciones a) y b) se calculan los valores propios y los subespacios propios de* A*.*

La ecuación característica de A *es*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 3+\lambda & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & -2 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda+3)(\lambda^2-3\lambda-18) = 0,$$

de donde se obtiene que los valores propios de f *son* $\lambda_1 = 6$*, y* $\lambda_2 = -3$ *con multiplicidades algebraicas respectivas uno y dos. La matriz* A *es simétrica y con coeficientes reales por lo que se sabe que es diagonalizable por semejanza, lo que implica que las multiplicidades geométricas también serán uno y dos. Las ecuaciones implícitas del subespacio propio* V_{λ_1}*, son*

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y $\{(-2,1,-2)^t\}$ *es una base de* V_{λ_1}*.*

Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{λ_2}*, son*

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y $\{(1,2,0)^t, (0,2,1)^t\}$ *es una base de* V_{λ_2}*.*

Se comprueba que la primera columna de la matriz P *de la opción a) no es un vector propio de* A *al no verificar ni las ecuaciones implícitas de* V_{λ_1} *ni las de* V_{λ_2} *(tampoco lo son las columnas dos y tres). Por lo tanto no se verifica* $D = P^{-1}AP$*. La matriz* P *de la opción b) sí verifica que su primera columna es un vector propio de* A *perteneciente a*

V_{λ_1} y también que sus columnas dos y tres son vectores propios de A pertenecientes a V_{λ_2}. En consecuencia esta es la opción correcta puesto que se cumple

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

(y P^tAP puesto que ya se ha comprobado que P es una matriz ortogonal).
Se puede también resolver el ejercicio calculando directamente la matriz P, ***teniendo en cuenta que esta no es única y se puede obtener una matriz que no coincida con ninguna de las propuestas*** *aunque sí se sabe que las columnas de la matriz P serán las coordenadas de tres vectores propios de A que constituyan una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, lo que permitirá, comparando con las soluciones propuestas, elegir la correcta. Para hallarla se unen las bases ortonormales de los dos subespacios propios de A:*

$$\text{Base de } V_{\lambda_1}: \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{Base ortonormal}: \left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Base de } V_{\lambda_2}: \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$$

$$\text{Base ortonormal}: \left\{ \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

La base ortonormal de V_{λ_2} se ha obtenido aplicando Gram-Schmidt:

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2,\ \mathbf{z}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_2}\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_3 = \frac{\mathbf{z}_3}{\|\mathbf{z}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una matriz de cambio de base ortogonal es

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} \\ 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}.$$

Verificándose

$$D = P^{-1}AP \quad y \quad P^t = P^{-1}.$$

(9) (1 pto.) Sea A una matriz cuadrada y simétrica con coeficientes reales estrictamente positivos. Indique cual de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* A es siempre definida positiva.

☐ *(b)* A es siempre semidefinida positiva pero no definida positiva.

☐ *(c)* [=] A no puede ser definida negativa.

☐ *(d)* A no puede ser indefinida.

(*) ***Explicación****: para que A sea definida negativa es necesario que*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} < 0.$$

*Al ser $a_{11} > 0$ (todos los coeficientes de A son estrictamente positivos), A no puede ser definida negativa. El resto de las proposiciones son falsas porque una matriz con coeficientes estrictamente positivos **puede** ser semidefinida positiva, definida positiva o indefinida.*

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y guardados**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1.5 ptos.) Encuentre tres números reales α, β y γ tales que para todo polinomio, p, de grado menor o igual que tres se verifique

$$\int_2^4 p(x)dx = \alpha p(2) + \beta p(3) + \gamma p(4).$$

☐ *(a)* [-0.3]$\alpha = 1/3, \beta = 2/3, \gamma = 1$.
☐ *(b)* [-0.3]$\alpha = 2/3, \beta = 5/3, \gamma = 1/3$.
☐ *(c)* [1.5]$\alpha = 1/3, \beta = 4/3, \gamma = 1/3$.
☐ *(d)* [-0.3]$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 2$.

(*) ***Explicación****: siendo* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$*, se verifica*

$$\int_2^4 p(x)dx = 2a_0 + 6a_1 + \frac{56}{3}a_2 + 60a_3.$$

Por otro lado se tiene que

$$\alpha p(2) + \beta p(3) + \gamma p(4) = a_0(\alpha + \beta + \gamma) + a_1(2\alpha + 3\beta + 4\gamma) + a_2(4\alpha + 9\beta + 16\gamma) + a_3(8\alpha + 27\beta + 64\gamma).$$

Igualando los términos que multiplican a a_0, a_1, a_2 *y* a_3 *en ambas expresiones, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas:*

$$(1) \qquad \begin{array}{rcr} \alpha + \beta + \gamma & = & 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma & = & 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma & = & 56/3 \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma & = & 60 \end{array}$$

Obteniendo el sistema escalonado equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 9 & 16 & 56/3 \\ 8 & 27 & 64 & 60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 12 & 32/3 \\ 0 & 19 & 56 & 44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se comprueba que es un sistema compatible determinado y resolviéndolo por remonte se llega a la solución pedida:

$$\alpha = 1/3 \quad \beta = 4/3 \quad \gamma = 1/3.$$

Observación*: Una vez obtenido el sistema* (1) *se puede elegir la respuesta correcta sin necesidad de resolverlo, comprobando que las opciones (b) y la (d) no satisfacen la primera ecuación y la (a) no satisface la segunda.*

(2) (1 pto.) Sea S un sistema lineal de 5 ecuaciones y 5 incógnitas. Si se sabe que, una vez escalonado, su matriz ampliada tiene la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \& & * & * & * & * & * \\ 0 & \& & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \& & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \& & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \& = \text{real no nulo} \\ * = \text{real cualquiera,} \end{array}$$

se puede afirmar que

☐ *(a)* S es compatible determinado.
☐ *(b)* S es compatible indeterminado con dos grados de libertad.
☐ *(c)* S es incompatible.
☐ *(d)* [=]S es compatible indeterminado con un grado de libertad.

*(*) **Explicación**: si se denota por A y A_b a la matriz de coeficientes y a la matriz ampliada de S, se verifica:* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A_b) = 4 = 5 - 1$. *Por lo tanto S es compatible indeterminado con un grado de libertad.*

(3) (1 pto.) Calcule el determinante de la siguiente matriz cuadrada de dimensión n:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

☐ *(a)* [=]$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\beta^n$.

☐ *(b)* $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\beta^n$.

☐ *(c)* $(-1)^n\beta^n$.

☐ *(d)* $(-1)^{n+1}\beta^n$.

*(*) **Explicación**:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma^*)a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} i}\beta^n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\beta^n,$$

donde σ^* es la permutación tal que $\sigma^*(1) = n, \sigma^*(2) = n-1, \cdots \sigma^*(n) = 1$ y su signo es igual a -1 elevado al número de inversiones:

$$\varepsilon(\sigma^*) = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} i} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}.$$

También se puede resolver desarrollando por los adjuntos de la última columna:

$$\det(A) = a_{1n}A_{1n} = (-1)^{n+1}\beta(-1)^n\beta(-1)^{n-1}\beta\cdots(-1)^3\beta^2 = (-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+3}\beta^n = (-1)^{\sum_{i=3}^{n+1} i}\beta^n =$$

$$(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}\beta^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)}\beta^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}})\beta^n.$$

(4) (1 pto.) Si A es una matriz cuadrada de dimensión impar n, calcule $\det(A - A^t)$.

☐ *(a)* $\det(A) - \det(A^t)$

☐ *(b)* [=] 0

☐ *(c)* $(-1)^n \det(A)$

☐ *(d)* $\det(A)^n - \det(A^t)^n$

*(*) **Explicación**: se tiene que*

$$\det(A - A^t) = \det((A - A^t)^t) = \det(A^t - A).$$

Pero también se verifica

$$\det(A - A^t) = \det(-(A^t - A)) = (-1)^n \det(A^t - A) = -\det(A^t - A).$$

Por lo tanto

$$\det(A^t - A) = -\det(A^t - A),$$

lo que implica que $\det(A^t - A) = \det(A - A^t) = 0$.

(5) (1 pto.) Dado un sistema lineal de 30 ecuaciones y 30 incógnitas, determine el número de operaciones en coma flotante que se necesitan para realizar la triangularización gaussiana de la matriz de coeficientes del sistema.
Observación: tenga en cuenta que no tiene que contar las operaciones sobre el término independiente del sistema y que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

☐ *(a)* [=]17545. | ☐ *(b)* 25340. | ☐ *(c)* 18415. | ☐ *(d)* 19450.

(*) ***Explicación****: en un caso general (sistema de n ecuaciones con n incógnitas), para cada etapa k de la triangularización gaussiana se realizan :*

1. *$n-k$ divisiones en la matriz de coeficientes del sistema.*
2. *$(n-k)(n-k)$ sumas en la matriz de coeficientes del sistema.*
3. *$(n-k)(n-k)$ productos en la matriz de coeficientes del sistema.*

Por lo tanto, teniendo en cuenta que se realizan $n-1$ etapas, el número total de operaciones realizadas en la triangularización gaussiana de la matriz de coeficientes del sistema será:

$$tot_n = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k + 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 =$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{3}n^3 - n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n.$$

Para el caso de $n = 30$, el número de operaciones en coma flotante será:

$$tot_{30} = \frac{2}{3}30^3 - \frac{1}{2}30^2 - \frac{1}{6}30 = 18000 - 450 - 5 = 17545.$$

(6) (1.5 ptos.) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

determine la factorización LU con pivote parcial de A.

☐ *(a)* [1.5] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

☐ *(b)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

☐ *(c)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 31/2 \end{pmatrix}.$

☐ *(d)* [-0.3] $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 5 \\ 0 & 0 & 31/2 \end{pmatrix}.$

(*) ***Explicación****:*

1. *Primera etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial*

   a) *Se busca el pivote de la primera columna y se intercambian las filas correspondientes:*

$$F^1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   b) *Se hacen cero los elementos de la primera columna por debajo del pivote con $m_{21} = -1/2$ y $m_{31} = -1/2$:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. *Segunda etapa de la triangularización gaussiana con pivote parcial:*

a) *Se busca el pivote de la segunda columna y se intercambian las filas correspondientes:*

$$F^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) *Se hacen cero los elementos de la segunda columna por debajo del pivote con* $m_{32} = 1/5$*:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & -1/2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$F = F^2F^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

verificándose $FA = LU$.

(7) (1 pto.) Sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ un conjunto de tres vectores linealmente dependientes. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?

☐ *(a)* [=] Alguno de los tres vectores del conjunto es combinación lineal de los otros dos.

☐ *(b)* Se puede asegurar que cualquier vector de los tres es combinación de los otros dos.

☐ *(c)* La igualdad $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 = 0$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

☐ *(d)* $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ es un espacio vectorial de dimensión tres.

(*) ***Explicación****: si* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *son tres vectores linealmente dependientes, existen tres escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$*, no todos nulos, tales que*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \alpha_3\mathbf{x}_3 = 0.$$

Por lo tanto la proposición (c) es falsa. Por otro lado si, por ejemplo, $\mathbf{x}_1 = (0,0,1)^t$*,* $\mathbf{x}_2 = (1,2,1)^t$ *y* $\mathbf{x}_3 = (2,4,2)^t$*, el conjunto* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ *es linealmente dependiente pero* x_1 *no es combinación lineal de los otros dos (proposición (b) falsa).*
Sin embargo siempre se tiene que verificar que, al menos, uno de los coeficientes sea no nulo: si, por ejemplo, $\alpha_2 \neq 0$*, se tiene*

$$x_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\mathbf{x}_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\mathbf{x}_3,$$

siendo, en este caso, $\mathbf{x}_2$ *combinación de los otros dos (proposición (a) cierta).*
Por último al ser $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ *un conjunto linealmente dependiente, la dimensión de* $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$ *es menor que tres (proposición (d) falsa) .*

(8) (1 pto.) Dada una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, determine las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (5, -3, 3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, sabiendo que $\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$.

☐ *(a)* $\mathbf{v} = (-1,3,4)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(b)* [=]$\mathbf{v} = (10,3,8)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(c)* $\mathbf{v} = (13,8,8)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

☐ *(d)* $\mathbf{v} = (2,5,1)^t_{\{\mathbf{u}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: en el enunciado se dan las coordenadas de los vectores de la base* $\{\mathbf{e}_i\}$ *en función de la base* $\{\mathbf{u}_i\}$*:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz de cambio de base que transforma coordenadas en la base $\{\mathbf{e}_i\}$ *a coordenadas en la base* $\{\mathbf{u}_i\}$*. Por lo tanto:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{e}_i\}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}}.$$

(9) (1 pto.) Sea V un espacio vectorial de dimensión cinco. Dado un subespacio vectorial de V, S, cuyas ecuaciones paramétricas en una cierta base, $\{\mathbf{e}_i\}$, de V son

$$S = \begin{cases} x_1 &= \lambda + \mu \\ x_2 &= \lambda - \mu + \delta \\ x_3 &= \lambda + \mu + \delta \\ x_4 &= \lambda - \delta \\ x_5 &= 2\lambda + \delta \end{cases} \qquad \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R},$$

indique cuál de los siguientes conjuntos de ecuaciones está formado por unas ecuaciones implícitas de S.

☐ *(a)* $S = \{\mathbf{x} \in V / 3x_1 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, x_1 - x_2 - 2x_5 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

☐ *(b)* $S = \{\mathbf{x} \in V / x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 - x_5 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

☐ *(c)* $S = \{\mathbf{x} \in V / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

☐ *(d)* [=] $S = \{\mathbf{x} \in V / 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_5 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$

(*) ***Explicación****: eliminando* λ, μ *y* δ *del sistema de ecuaciones paramétricas se obtienen unas ecuaciones implícitas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & -1 & x_4 \\ 2 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & -1 & -1 & x_4 - x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_5 - 2x_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -3/2 & x_4 - (1/2)x_1 - (1/2)x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 - x_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 + (1/2)x_2 - (3/2)x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 - x_5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto unas ecuaciones implícitas de S *son*

$$S = \{\mathbf{x} \in V / 4x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, x_1 + x_2 - x_5 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

Observación 1*: la solución no es única pero cualquier otra solución correcta tiene dos ecuaciones implícitas que son combinación lineal de las dos de la solución (d).*

Observación 2*: también se puede resolver el ejercicio comprobando que los tres vectores que multiplican a cada uno de los tres parámetros en las ecuaciones paramétricas de* S*:* $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,2)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,1,0,0)^t$ *y* $\mathbf{v}_3 = (0,1,1,-1,1)^t$ *son linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base de* S*, lo que implica que la dimensión de* S *es tres y por lo tanto tendrá* $5-3=2$ *ecuaciones implícitas linealmente independientes. En consecuencia la solución (c) es incorrecta. Por otro lado es fácil comprobar que* $\mathbf{v}_3$ *no verifica la segunda ecuación de la solución (a) ni* $\mathbf{v}_1$ *la primera de la solución (b). Sin embargo los tres vectores de la base de* S *verifican las dos ecuaciones de la solución (d) que es la correcta.*

Álgebra

ETSI Minas y Energía

Apellidos: _____ **Nombre:** _____ **DNI:** _____

DNI:

⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
①	①	①	①	①	①	①	①
②	②	②	②	②	②	②	②
③	③	③	③	③	③	③	③
④	④	④	④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

Instrucciones

- *La duración de esta prueba es de **90 minutos**.*
- *Rellene **completamente** los círculos correspondientes a los dígitos del DNI o de la tarjeta de identidad para extranjeros (**sin letra, un dígito por columna, ajustando a la derecha y completando con ceros por la izquierda**).*
- *En la parte inferior de la página rellene **completamente** los círculos con una sola respuesta a cada una de las preguntas. Utilice un bolígrafo negro o azul oscuro.*
- *Si la respuesta es correcta obtendrá la puntuación indicada en la pregunta. Si la respuesta es incorrecta se le restará una quinta parte de dicha puntuación. Si deja en blanco la respuesta obtendrá cero puntos.*
- *No utilice esta hoja como borrador, escriba solamente donde se le pide.*
- *Los teléfonos móviles deben estar **apagados y guardados**.*
- *Cuando termine el examen debe **arrancar y entregar esta hoja**.*

Seleccione la respuesta correcta a cada una de las preguntas

(1) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(2) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(3) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(4) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(5) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(6) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(7) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(8) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(9) Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

(1) (1 pto.) Sean U_1 y U_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Si la suma $U_1 + U_2$ es directa entonces:

☐ *(a)* $\dim(U_1 + U_2) < \dim(U_1) + \dim(U_2)$.

☐ *(b)* $U_1 \cup U_2 = V$.

☐ *(c)* U_1 y U_2 son suplementarios en V.

☐ *(d)* [=] $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(*) ***Explicación****: si $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$, todos los vectores de $U_1 + U_2$ se pueden descomponer de forma única como suma de un vector de U_1 y otro de U_2. Esto implica que no puede existir ningún vector distinto de $\mathbf{0}$ que pertenezca a la vez a los dos subespacios puesto que si existiera, sumándolo y restándolo a la descomposición de un vector dado se obtendría una decomposición distinta del vector en cuestión. Por lo tanto*

$$U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

Las otras implicaciones son falsas:

- *(a)*
$$U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$
- *(b)*
$$U_1 \cup U_2 \text{ no tiene por qué ser un espacio vectorial.}$$
- *(c)*
$$U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \not\Rightarrow U_1 \text{ y } U_2 \text{ son suplementarios en } V.$$

  Sí es cierta la siguiente implicación:

$$\left.\begin{array}{c} U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \\ y \\ U_1 + U_2 = V \end{array}\right\} \Rightarrow U_1 \text{ y } U_2 \text{ son suplementarios en } V.$$

(2) (1.5 ptos.) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$,

$$U_1 = \left\langle (1,0,1,0)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (2,1,0,-1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}, (-2,-3,4,3)^t_{\{\mathbf{e}_i\}} \right\rangle \text{ y } U_2 = \{x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}},$$

en donde todas las coordenadas están referidas a cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$, determine, entre los siguientes conjuntos de ecuaciones, cuál está formado por unas ecuaciones implícitas de $U_1 + U_2$.

☐ *(a)* [-0.3] $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_3 = 0, x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.3] $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [-0.3] $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [1.5] $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

(*) ***Explicación****: en primer lugar se hallan unas bases de los dos subespacios:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ Base de } U_1 : \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\{x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\} \rightarrow \text{ Base de } U_2 : \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$U_1+U_2=\langle \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\rangle \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{Base de } U_1+U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

A partir de una base de U_1+U_2 se obtienen unas ecuaciones paramétricas y, a partir de ellas, unas ecuaciones implícitas (en este caso solo una):

$$\begin{cases} x_1 &= 2\lambda \\ x_2 &= \mu \\ x_3 &= \lambda - 2\mu \\ x_4 &= -\mu + 2\gamma \end{cases} \rightarrow U_1+U_2 = \left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}.$$

***Observación**: la solución no es única pero cualquier otra solución correcta tiene una ecuación implícita que es combinación lineal de la de la solución (d).*

(3) (1 pto.) Sea $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3 \\ f^{-1}(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2 \\ f^{-1}(\mathbf{u}_3) &= 2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

en donde $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ es una base de V y $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ es una base de W. Obtenga la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{u}'_1,\mathbf{u}'_2,\mathbf{u}'_3\}$, sabiendo que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1+2\mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2-\mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}'_2 \end{cases}$$

☐ *(a)* $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* [=] $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: del enunciado se deduce que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2)+f(\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{u}_2 &= f(\mathbf{e}_1)-2f(\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{u}_3 &= 2f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

y, despejando $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ y $f(\mathbf{e}_3)$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e}_1) &= -2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+2\mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{e}_3) &= 4\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-3\mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{u}_i\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

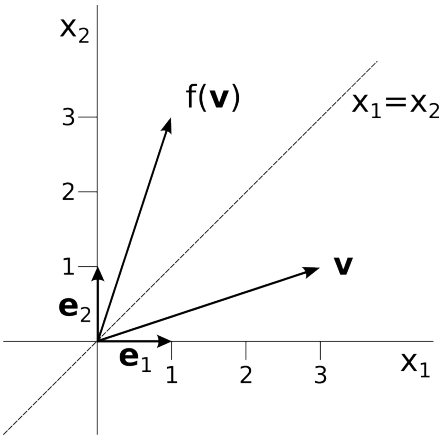
Por otro lado la matriz de cambio de base de $\{\mathbf{u}'_i\}$ a $\{\mathbf{u}_i\}$ es:

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix}_{\{\mathbf{u}_i\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

de donde se deduce que la matriz asociada a f en las bases $\{\mathbf{e}_i'\}$ y $\{\mathbf{u}_i'\}$ es:

$$A' = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) (1 pto.) Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(\mathbf{v})$ es el vector simétrico de $\mathbf{v}$ respecto a la recta $x_1 = x_2$. Indique cuál es la matriz asociada a f en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ (ver la figura adjunta).



☐ *(a)* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ *(b)* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

☐ *(c)* [=] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ *(d)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*(*) **Explicación**: si $f(\mathbf{v}) = (y_1, y_2)^t$ es el simétrico de $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^t$ respecto de $x_1 = x_2$, se verifica $y_1 = x_2, y_2 = x_1$ y, por lo tanto,*

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(5) (1.5 ptos.) Dado el espacio euclídeo E, formado por el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto escalar

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 \ {}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v} = (1,3,1)^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$ sobre el subespacio vectorial

$$S = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}_{\{\mathbf{e}_i\}}$$

☐ *(a)* [-0.3]$\begin{pmatrix} -3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(b)* [-0.3]$\begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(c)* [-0.3]$\begin{pmatrix} 3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

☐ *(d)* [1.5]$\begin{pmatrix} -3/2 & 3 & -3/2 \end{pmatrix}^t_{\{\mathbf{e}_i\}}$.

*(*) **Explicación**: expresión matricial del producto escalar (a lo largo de toda la solución las coordenadas de los vectores siempre se expresan en la base $\{\mathbf{e}_i\}$):*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t G \mathbf{y}.$$

Base de S : $B = \{\mathbf{a}_1 = (1,0,-1)^t, \mathbf{a}_2 = (0,1,-1)^t\}$. Se puede calcular la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S de tres formas distintas:

1. *Utilizando la base B:*

$$(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{a}_1=0\Rightarrow(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1)\alpha_1+(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2)\alpha_2=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{v}$$
$$(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)\cdot\mathbf{a}_2=0\Rightarrow(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1)\alpha_1+(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2)\alpha_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v}$$

en donde $\mathbf{v}_1=\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2$ *es la proyección ortogonal pedida.*

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2,\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=2,$$

$$\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=3,\quad \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=3,$$

$$\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0&1&-1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=6,$$

el sistema queda

$$2\alpha_1+2\alpha_2=3$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2=6$$

cuya solución es $\alpha_1=-3/2$, $\alpha_2=3$. *La proyección pedida es, por lo tanto,*

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}-3/2\\3\\-3/2\end{pmatrix}$$

2. *Hallando una base ortonormal de S:*

$$\mathbf{z}_1=\mathbf{a}_1$$
$$\mathbf{z}_2=\mathbf{a}_2-\frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_1}\mathbf{z}_1=(0,1,-1)^t-\frac{2}{2}(1,0,-1)^t=(-1,1,0)^t,$$
$$\mathbf{z}_1\cdot\mathbf{z}_1=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1=2,\quad \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{z}_1=\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1=2.$$

Dividiendo $\mathbf{z}_1$ *y* $\mathbf{z}_2$ *por su norma se obtiene una base ortonormal:*

$$\mathbf{z}_2\cdot\mathbf{z}_2=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=1.$$

$$\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^t,\quad \mathbf{u}_2=\frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|}=(-1,1,0)^t.$$

Finalmente se calcula la proyección ortogonal utilizando la base ortonormal recién calculada:

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2=\frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}-3/2&3&-3/2\end{pmatrix}^t.$$

3. *Hallando la matriz de proyección: si se denota* $A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, *la matriz de proyección sobre S es*

$$P_S=A(A^tGA)^{-1}A^tG=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&-1/2\\0&1&0\\-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

y

$$\mathrm{Pr}\,|_S\mathbf{v}=P_S\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-3/2\\3\\-3/2\end{pmatrix}.$$

(6) (1 pto.) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(\mathbf{v})$ es el vector simétrico de $\mathbf{v}$ respecto a la recta $x_1 = x_2$ (ver figura adjunta en otro ejercicio). Respecto a los subespacios propios de f se puede afirmar lo siguiente:

☐ *(a)* [=] Existen dos subespacios propios de f en $\mathbb{R}^2$ y f es diagonalizable por semejanza.

☐ *(b)* No existen subespacios propios de f en $\mathbb{R}^2$ y f no es diagonalizable por semejanza.

☐ *(c)* Existe un subespacio propio de f en $\mathbb{R}^2$ y f es diagonalizable por semejanza.

☐ *(d)* Existe un subespacio propio de f en $\mathbb{R}^2$ y f no es diagonalizable por semejanza.

*(*) **Explicación**: a partir de la solución de la pregunta (4) se sabe que la expresión matricial de f es*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

siendo su ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Por lo tanto tiene dos valores propios de multiplicidad algebraica uno: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ y dos subespacios propios asociados. Como la multiplicidad geométrica no puede ser mayor que la algebraica ni menor que uno, la multiplicidades geométricas de los dos valores propios también son iguales a uno y el endomorfismo es diagonalizable.
Los dos subespacios propios son: $V_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{x} = (\alpha, \alpha)^t, \alpha \in \mathbb{R}\}$, subespacio propio asociado al valor propio 1 que coincide con la recta $x_1 = x_2$ (observe que los vectores que pertenecen a esta recta se transforman en si mismos) y $V_{-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{x} = (-\alpha, \alpha)^t, \alpha \in \mathbb{R}\}$, subespacio propio asociado al valor propio -1 que coincide con la recta $x_2 = -x_1$ (observe que los vectores que pertenecen a esta recta se transforman en un vector de la misma dirección y norma pero de sentido contrario).

(7) (1 pto.) En la siguiente tabla se muestran las coordenadas de cuatro puntos del plano.

x	1	2	2	4
y	1	3	5	9

Sabiendo que el polinomio de segundo grado que aproxima los puntos anteriores por el método de mínimos cuadrados es $y^*(x) = -7/3 + (7/2)x - (1/6)x^2$, ¿cuál es el **complemento** ortogonal de $\mathbf{y}$ respecto de $W = \langle \mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2 \rangle$? Se recuerda que $\mathbf{y} = (1,3,5,9)^t$, $\mathbf{1} = (1,1,1,1)^t$, $\mathbf{x} = (1,2,2,4)^t$ y $\mathbf{x}^2 = (1,4,4,16)^t$.

☐ *(a)* [=] $(\ 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0\ )^t$.

☐ *(b)* $(\ 1 \quad -7/3 \quad 7/2 \quad -1/6\ )^t$.

☐ *(c)* $(\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0\ )^t$.

☐ *(d)* $(\ 1 \quad 4 \quad 4 \quad 9\ )^t$.

*(*) **Explicación**: la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre W es*

$$Pr|_W \mathbf{y} = -(7/3)\mathbf{1} + (7/2)\mathbf{x} - (1/6)\mathbf{x}^2 = -\frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

y el complemento ortogonal:

$$\mathbf{y} - Pr|_W \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(8) (1 pto.) Sea el endomorfismo $f : V \to V$, cuya matriz asociada en una cierta base $\{\mathbf{e}_i\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule los valores propios de f e indique si f es diagonalizable por semejanza.

☐ *(a)* Valores propios: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ (doble), f es diagonalizable por semejanza.

☐ *(b)* [=]Valores propios: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ (doble), f no es diagonalizable por semejanza.

☐ *(c)* Valores propios: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, f no es diagonalizable por semejanza.

☐ *(d)* Valores propios: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, f es diagonalizable por semejanza.

(*) ***Explicación****: ecuación característica:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda-4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0,$$

de donde se obtiene que los valores propios de f son $\lambda_1 = 1$, y $\lambda_2 = 2$. La multiplicidad algebraica de λ_1 es uno y, por lo tanto, su multiplicidad geométrica es también uno. La multiplicidad algebraica de λ_2 es dos, por lo que su multiplicidad geométrica puede ser uno o dos:
Las ecuaciones implícitas del subespacio propio V_{λ_2}, son

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, la multiplicidad geométrica de λ_2, que coincide con la dimensión de V_{λ_2}, es uno. En consecuencia, al no coincidir la multiplicidad algebraica de λ_2 con su multiplicidad geométrica, f no es diagonalizable por semejanza.

(9) (1 pto.) Suponiendo que $\mathbf{v}$ es un vector propio del endomorfismo f, asociado al valor propio λ, indique cuál de las siguientes proposiciones es cierta.

☐ *(a)* $\mathbf{v}$ es el único vector propio asociado a λ.

☐ *(b)* El endomorfismo $f - \lambda I$ es inyectivo.

☐ *(c)* [=] λ es el único escalar tal que $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$.

☐ *(d)* Si A es la matriz asociada a f en cierta base, $|A - \lambda I| \neq 0$.

(*) ***Explicación****: si existieran dos escalares distintos, λ y μ, tales que*

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \text{ y } f(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v}$$

se obtendría

$$0 = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) = (\lambda - \mu)\mathbf{v}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se deduce que $\lambda = \mu$ y, por lo tanto λ es el único escalar tal que $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Las otras proposiciones son falsas.