Obtención de la matriz L en la factorización $FA = LU$

En este "Live Script" de Matlab se justifica la forma en que se obtiene la matriz L en la factorización $FA = LU$ de una matriz A en un caso general para $n = 6$, suponiendo que solamente hay dos cambios de filas: en el pivoteo de la columna 2 ($2 \leftrightarrow 4$) y la columna 4 ($4 \leftrightarrow 6$).

Ultano Kindelán Bustelo 9/2022

Matrices elementales

Antes de empezar la explicación conviene recordar qué son las matrices elementales. Hay **tres tipos** de matrices elementales, cada una asociada a una de las tres operaciones elementales que se pueden realizar sobre las **filas** de una matriz:

Matriz de cambio de filas: $I_{i\leftrightarrow j} \in M_n(\Re)$

Es el resultado de intercambiar las filas i, j en la matriz unidad.

Ejemplo en $M_6(\Re)$

```
n=6;
I6=eye(n)
```

```
I6 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
```

```
I35=I6;
I35([3,5],:)=I35([5,3],:)
```

```
I35 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     1
```

Si se premultiplica una matriz $A \in M_{6,m}(\Re)$ por $I_{3\leftrightarrow 5}$ se obtiene la misma matriz A con las filas 3 y 5 intercambiadas:

```
A = sym('a',[n,n])
```

A =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

```
A35=I35*A
```

A35 =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

En general si se **premultiplica** una matriz $A \in M_{n,m}(\mathfrak{R})$ por $I_{i\leftrightarrow j}$ se obtiene la misma matriz A con las **filas** i y j intercambiadas.

Observación: si se intercambian las **columnas** i y j de la matriz unidad se obtiene la misma matriz $I_{i\leftrightarrow j}$:

```
Ic35=I6;
Ic35(:,[3,5])=Ic35(:,[5,3])
```

```
Ic35 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     1
```

y si se **postmultiplica** una matriz $A \in M_{m,n}(\mathfrak{R})$ por $I_{i\leftrightarrow j}$ se obtiene la misma matriz A con las **columnas** i y j intercambiadas:

```
Ac35=A*I35
```

Ac35 =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,5} & a_{1,4} & a_{1,3} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,5} & a_{2,4} & a_{2,3} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,5} & a_{3,4} & a_{3,3} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,5} & a_{4,4} & a_{4,3} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,5} & a_{5,4} & a_{5,3} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,5} & a_{6,4} & a_{6,3} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

Matriz que multiplica una fila por un escalar: $I_{\alpha i} \in M_n(\Re)$

Es el resultado de multiplicar la fila i por α en la matriz unidad.

Ejemplo en $M_6(\Re)$

```
I2_4=I6;
I2_4(4,:)=2*I2_4(4,:)
```

```
I2_4 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     2     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
```

Si se premultiplica una matriz $A \in M_{6,m}(\Re)$ por I_{24} se obtiene la misma matriz A con las fila 4 multiplicada por 2:

```
A2_4 = I2_4*A
```

A2_4 =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ 2\,a_{4,1} & 2\,a_{4,2} & 2\,a_{4,3} & 2\,a_{4,4} & 2\,a_{4,5} & 2\,a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

En general si se **premultiplica** una matriz $A \in M_{n,m}(\Re)$ por $I_{\alpha i}$ se obtiene la misma matriz A con las **fila** i multiplicada por α.

Observación: si se multiplica la **columna** i de la matriz unidad por α se obtiene la misma matriz $I_{\alpha i}$:

```
Ic2_4=I6;
Ic2_4(:,4)=2*Ic2_4(:,4)
```

```
Ic2_4 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     2     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
```

y si se **postmultiplica** una matriz $A \in M_{m,n}(\Re)$ por $I_{\alpha i}$ se obtiene la misma matriz A con la columna i multiplicada por α:

```
Ac2_4=A*Ic2_4
```

Ac2_4 =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 2\,a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 2\,a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 2\,a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 2\,a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 2\,a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & 2\,a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

Matriz que reemplaza una fila por ella misma más otra multiplicada por un escalar: $I_{j+\alpha i} \in M_n(\mathfrak{R})$

Es la matriz obtenida al reemplazar la **fila** j de la matriz unidad por ella misma más la fila i multiplicada por α.

Ejemplo en $M_6(\mathfrak{R})$

```
I4_32=I6;
I4_32(4,:)=I4_32(4,:)+3*I4_32(2,:)
```

```
I4_32 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     3     0     1     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
```

Si se **premultiplica** una matriz $A \in M_{6,m}(\mathfrak{R})$ por $I_{4+3\times 2}$ se obtiene la misma matriz A con la fila 4 reemplazada por ella misma más la 2 multiplicada por 3:

```
A4_32=I4_32*A
```

A4_32 =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ 3\,a_{2,1}+a_{4,1} & 3\,a_{2,2}+a_{4,2} & 3\,a_{2,3}+a_{4,3} & 3\,a_{2,4}+a_{4,4} & 3\,a_{2,5}+a_{4,5} & 3\,a_{2,6}+a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

En general si se **premultiplica** una matriz $A \in M_{n,m}(\mathfrak{R})$ por $I_{j+\alpha i}$ se obtiene la misma matriz A con la fila j sustituida por ella misma más la i multiplicada por α.

Observación: si en la matriz unidad se reemplaza la **columna** j de la matriz unidad por ella misma más la columna i multiplicada por α que denominaremos $I^c_{j+\alpha i}$ que verifica $I^c_{j+\alpha i}=I_{i+\alpha j}=(I_{j+\alpha i})^t$:

```
I4c_32=I6;
I4c_32(:,4)=I4c_32(:,4)+3*I4c_32(:,2)
```

```
I4c_32 = 6×6
```

```
1       0       0       0       0       0
0       1       0       3       0       0
0       0       1       0       0       0
0       0       0       1       0       0
0       0       0       0       1       0
0       0       0       0       0       1
```

y se **postmultiplica** una matriz $A \in M_{m,n}(\mathfrak{R})$ por $I^c_{j+\alpha i}$ se obtiene la misma matriz A con la columna j reemplazada por ella misma más la i multiplicada por α:

```
Ac4_32=A*I4c_32
```

Ac4_32 =

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 3\,a_{1,2}+a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 3\,a_{2,2}+a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 3\,a_{3,2}+a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 3\,a_{4,2}+a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 3\,a_{5,2}+a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & 3\,a_{6,2}+a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{pmatrix}$$

En resumen

- Las operaciones elementales sobre las filas de A son equivalentes a premultiplicar A por matrices elementales obtenidas haciendo las mismas operaciones sobre las filas de I_n.
- Las operaciones elementales sobre las columnas de A son equivalentes a postmultiplicar A por matrices elementales obtenidas haciendo las mismas operaciones sobre las columnas de I_n.

Factorización $FA = LU$

Notación

$A =$ Matriz cuadrada que se quiere factorizar y que en este ejemplo supondremos de **dimensión 6**.

$U =$ Matriz triangular superior obtenida al realizar la triangularización gaussiana con pivote parcial en A.

$F =$ Matriz que almacena los cambios de filas (al buscar el pivote de mayor valor absoluto) realizados en el proceso de triangularización gaussiana de A.

$L =$ Matriz triangular inferior de la que se quiere hallar su expresión en función de los multiplicadores m_{ik} utilizados en la triangularización.

$P^k =$ Matriz de pivoteo en la etapa k.

$F^k =$ Matriz de cambio de filas en la etapa k.

Triangularización gausssiana con pivote parcial

Se van a expresar las operaciones elementales realizadas sobre la matriz A mediante premultiplicaciones por matrices elementales. La matriz L se obtendrá a partir del producto de estas matrices elementales. La matriz

A es una matriz genérica de dimensión 6 y se supondrá que para diagonalizarla con pivote parcial hay que intercambiar las filas 2 y 4 en la etapa $k = 2$ y las filas 4 y 6 en la etapa $k = 4$.

k=1

En esta etapa no hay cambio de filas por lo tanto $F^1 = I_6$.

```
F1=I6;
```

La matriz de pivoteo P^1 será de la forma

```
[P1] = gen_mat_P_l(6,1,1,1,1,1)
```

P1 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $m_{i1} = -a_{i1}/a_{11}$

Por lo tanto la expresión matricial de la matriz A transformada después de la primera etapa será:

$$P^1 F^1 A.$$

k=2

En esta etapa se intercambian las filas 2 y 4 $F^2 = I_{2\leftrightarrow 4}$.

```
F2=I6;
F2([2,4],:)=F2([4,2],:)
```

```
F2 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     1
```

La matriz de pivoteo P^2 será de la forma

```
[P2] = gen_mat_P_l(6,2,1,1,1,1)
```

P2 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{5,2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $m_{i2} = -a_{i2}/a_{22}$.

La expresión matricial después de la segunda etapa será:

$$P^2F^2P^1F^1A.$$

k=3

En esta etapa no hay cambio de filas: $F^3 = I_6$

```
F3=I6;
```

La matriz de pivoteo P^3 será de la forma

```
[P3] = gen_mat_P_l(6,3,1,1,1,1)
```

P3 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{4,3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{5,3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{6,3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $m_{i3} = -a_{i3}/a_{33}$.

La expresión matricial después de la tercera etapa será:

$$P^3F^3P^2F^2P^1F^1A.$$

k=4

En esta etapa se intercambian las filas 4 y 6 $F^4 = I_{4\leftrightarrow 6}$.

```
F4=I6;
F4([4,6],:)=F4([6,4],:)
```

```
F4 = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     1     0     0
```

La matriz de pivoteo P^4 será de la forma

```
[P4] = gen_mat_P_l(6,4,1,1,1,1)
```

P4 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{5,4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{6,4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $m_{i4} = -a_{i4}/a_{44}$.

La expresión matricial después de la cuarta etapa será:

$$P^4F^4P^3F^3P^2F^2P^1F^1A.$$

k=5

En esta etapa no hay cambio de filas: $F^5 = I_6$

```
F5=I6;
```

La matriz de pivoteo P^5 será de la forma

```
[P5] = gen_mat_P_l(6,5,1,1,1,1)
```

P5 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{6,5} & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $m_{i5} = -a_{i5}/a_{55}$.

La quinta etapa es la última y, por tanto, al acabarla se obtiene la matriz escalonada (triangular superior) U:

$$P^5F^5P^4F^4P^3F^3P^2F^2P^1F^1A = U.$$

Para obtener L, en el término de la izquierda, se van a mover todas las F^k hacia la derecha utilizando la siguiente propiedad

Propiedad 1: Suponiendo que $F^k = I_{i\leftrightarrow j}$, siempre se verifica

$$F^kP^l = P^l_{i\leftrightarrow j}F^k \quad \text{para } k > l,$$

en donde $P^l_{i\leftrightarrow j}$ es igual a P^l con los elementos i, j de la columna l intercambiados.

No se demuestra la propiedad pero se comprobará que es cierta, para los casos en los que la aplicamos:

Se desplaza F^2 hacia la derecha:

- $F^2P^1 = P^1_{2\leftrightarrow 4}F^2$

```
[~,P1_24] = gen_mat_P_l(6,1,2,4,1,1)
```

P1_24 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
F2P1=F2*P1
```

F2P1 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P1_24F2=P1_24*F2
```

P1_24F2 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se desplaza F^3 hacia la derecha:

- $F^3P^2 = P^2F^3$
- $F^3P^1 = P^1F^3$

Se desplaza F^4 hacia la derecha:

- $F^4P^3 = P^3_{4\leftrightarrow 6}F^4$
- $F^4P^2 = P^2_{4\leftrightarrow 6}F^4$
- $F^4P^1_{2\leftrightarrow 4} = P^1_{\substack{2\leftrightarrow 4\\ 4\leftrightarrow 6}}F^4$

```
[~,P3_46] = gen_mat_P_l(6,3,4,6,1,1)
```

P3_46 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{6,3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{5,3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{4,3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
[~,P2_46] = gen_mat_P_l(6,2,4,6,1,1)
```

P2_46 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{6,2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{5,2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
[~,~,P1_24_46] = gen_mat_P_l(6,1,2,4,4,6)
```

P1_24_46 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
F4P3=F4*P3
```

F4P3 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{6,3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_{5,3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{4,3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
P3_46F4=P3_46*F4
```

P3_46F4 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{6,3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_{5,3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{4,3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
F4P2=F4*P2
```

F4P2 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_{5,2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
P2_46F4=P2_46*F4
```

P2_46F4 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m_{5,2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
F4P1_24=F4*P1_24
```

F4P1_24 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{2,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
P1_24_46F4=P1_24_46*F4
```

P1_24_46F4 =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{4,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{2,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se desplaza F^5 hacia la derecha:

- $F^5 P^4 = P^4 F^5$
- $F^5 P^3 = P^1 F^3$
- $F^5 P^2 = P^2 F^5$
- $F^5 P^1 = P^1 F^5$

Entonces podemos expresar el proceso de triangularización como

$$P^5 P^4 P^3_{4\leftrightarrow 6} P^2_{4\leftrightarrow 6} P^1_{\substack{2\leftrightarrow 4\\ 4\leftrightarrow 6}} F^5 F^4 F^3 F^2 F^1 A = U\,.$$

LLamando $F = F^5 F^4 F^3 F^2 F^1$ se tiene

$$P^5 P^4 P^3_{4\leftrightarrow 6} P^2_{4\leftrightarrow 6} P^1_{\substack{2\leftrightarrow 4\\ 4\leftrightarrow 6}} F A = U$$

con lo que

$$FA = \left(P^5 P^4 P^3_{4\leftrightarrow 6} P^2_{4\leftrightarrow 6} P^1_{\substack{2\leftrightarrow 4\\ 4\leftrightarrow 6}} \right)^{-1} U$$

y, por lo tanto,

$$L = \left(P^5 P^4 P^3_{4\leftrightarrow 6} P^2_{4\leftrightarrow 6} P^1_{\substack{2\leftrightarrow 4\\4\leftrightarrow 6}}\right)^{-1} = \left(P^1_{\substack{2\leftrightarrow 4\\4\leftrightarrow 6}}\right)^{-1} (P^2_{4\leftrightarrow 6})^{-1} (P^3_{4\leftrightarrow 6})^{-1} (P^4)^{-1} (P^5)^{-1}.$$

```
P1_24_46_inv=inv(P1_24_46)
```

P1_24_46_inv =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{4,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{3,1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -m_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P2_46_inv=inv(P2_46)
```

P2_46_inv =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{6,2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_{5,2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P3_46_inv=inv(P3_46)
```

P3_46_inv =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{6,3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{5,3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_{4,3} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P4_inv=inv(P4)
```

P4_inv =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_{5,4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_{6,4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
P5_inv=inv(P5)
```

P5_inv =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_{6,5} & 1 \end{pmatrix}$$

```
L=P1_24_46_inv*P2_46_inv*P3_46_inv*P4_inv*P5_inv
```

L =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{4,1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{3,1} & -m_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{6,1} & -m_{6,2} & -m_{6,3} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{5,1} & -m_{5,2} & -m_{5,3} & -m_{5,4} & 1 & 0 \\ -m_{2,1} & -m_{4,2} & -m_{4,3} & -m_{6,4} & -m_{6,5} & 1 \end{pmatrix}$$

```
F=F5*F4*F3*F2*F1
```

```
F = 6×6
     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0
     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     1     0
     0     1     0     0     0     0
```