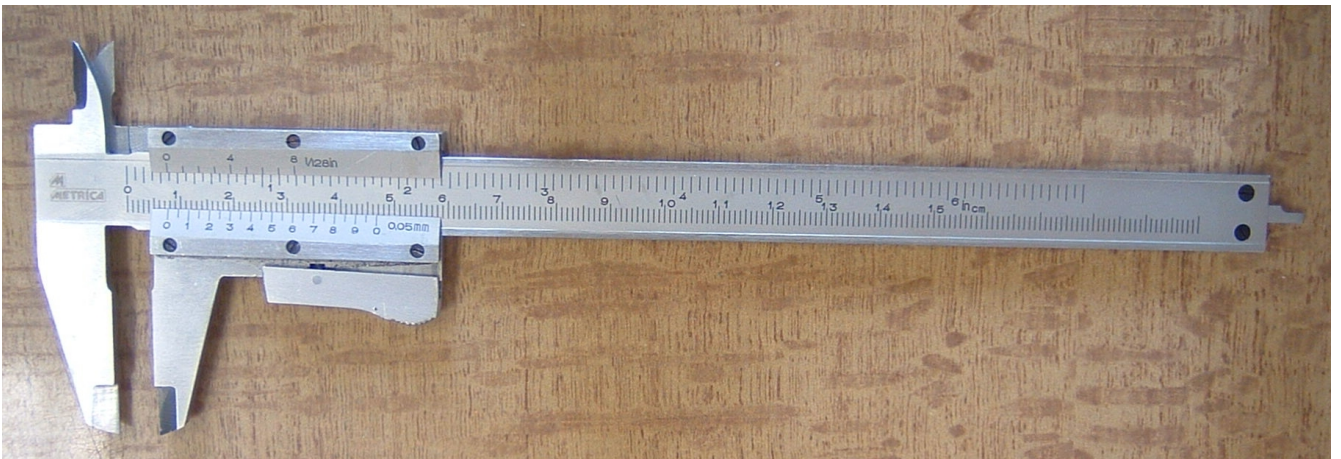


APOYO PARA LA PREPARACIÓN DE LOS ESTUDIOS DE
INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

FÍSICA (PREPARACIÓN A LA UNIVERSIDAD)



Unidad 3: Incertidumbre de una medida

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

12 de abril de 2010

3.1. Planificación de la unidad

3.1.1. Objetivos

1. Conocer las características más importantes del proceso de medida.
2. Conocer las cualidades más importantes de los aparatos de medida.
3. Expresar una medida con sus cifras significativas.
4. Ser capaz de estimar la incertidumbre de una medida.

3.1.2. Actividades

1. Lectura del resumen del tema
2. Realización del cuestionario.
3. Realización de los ejercicios
4. Actividades complementarias
 - a) Buscar información sobre los Centros de Metrología en el mundo.
 - b) Redactar una pequeña reseña (máximo 1 página).

3.1.3. Bibliografía

1. Libros de primero y segundo de Bachillerato.
2. P.A. Tipler y G. Mosca, Física para Ciencias e Ingeniería”, 5ª Edición, Editorial Reverté, 2005.

3.1.4. Enlaces relacionados

1. Proyecto Newton:
 - La Medida: <http://newton.cnice.mec.es/1bach/medida/index.htm>
2. Centro Español de Metrología: <http://www.cem.es>

3.2. La medida

En la Física es fundamental contrastar las teorías y modelos con los experimentos, por lo que la medida en Física tiene una gran importancia. En esta unidad describiremos los fundamentos de la medida en Física, así como la forma correcta de expresar las magnitudes y la incertidumbre asociada a los resultados de la medida.

Una medida consiste en comparar dos magnitudes del mismo tipo, tomando una de ellas como unidad.

Llamaremos *mensurando*, a la magnitud que se desea medir. Hay que tener en cuenta que para poder especificar correctamente un mensurando se necesita conocer la naturaleza de la magnitud y el estado del fenómeno, cuerpo o sustancia cuya magnitud es una propiedad.

La medida puede ser **directa**, en el caso en que sea el resultado de la comparación directa con la unidad o **indirecta**, en el caso de que sea necesario obtener el resultado de una expresión algebraica.

Un ejemplo de medida directa sería la medida con una regla de una determinada longitud, mientras que la medida de un área sería una medida indirecta, midiendo las dimensiones de forma directa y obteniendo el área de la misma mediante su correspondiente expresión matemática.

3.3. Aparatos de medida

Para poder realizar una medida es necesario contar con aparatos de medida. Éstos se caracterizan por una serie de propiedades que es necesario conocer para poder realizar el proceso con ciertas garantías de éxito. Estas cualidades son:

1. *Fidelidad o repetibilidad*, siempre que el proceso de medida se realiza en las mismas condiciones, el resultado de la medida coincide, dentro de la incertidumbre asociada a la medida.
2. *Exactitud*, los datos obtenidos coinciden con el valor correcto de las magnitudes a medir. Para poder estar seguros de que un aparato es exacto, es necesario calibrar el aparato de medida.
3. *Sensibilidad*, es la capacidad del instrumento para detectar pequeñas variaciones de la magnitud a medir. Cuantitativamente se puede definir como el cociente entre la variación de la señal del aparato y la variación de la magnitud a medir. Este valor puede depender de la magnitud que se esté midiendo. Al valor mínimo de

la magnitud medida que provoca una modificación en la lectura del aparato la denominamos *umbral de sensibilidad*.

4. *Precisión*, es la unidad más pequeña que el aparato puede medir sin error aparente. Diremos que una regla que aprecia 0,5 mm es más precisa que aquella que aprecia 1 mm.
5. *Tiempo de respuesta*, conviene que el proceso de medida se pueda hacer en un tiempo razonable, por lo que es necesario que el tiempo de medida sea razonablemente corto.

3.4. Cifras significativas

Llamamos cifras significativas al número de dígitos de una medida. No se cuentan los ceros que se utilizan para fijar la coma decimal. Así, las cantidades 7,8 o 0,0078 tienen dos cifras significativas. Sin embargo, la cantidad 78,0 tiene tres cifras significativas. Esto es así, ya que la expresión de una medida contempla la precisión que tiene. Las cantidades 78 o 78,0 tienen distinta precisión: la primera aprecia unidades, mientras que la segunda aprecia décimas de unidad.

3.5. Notación científica

Una medida se puede expresar en notación científica cuando se pone en función de la correspondiente potencia de 10. Podemos ver algunos ejemplos en la siguiente tabla:

Notación decimal	Notación científica
150000	$1,5 \cdot 10^5$
0,0000678	$6,78 \cdot 10^{-5}$
17890000	$1,789 \cdot 10^7$

Es importante destacar que para escribir una cifra en notación científica, debe haber una sola cifra antes de la coma decimal.

3.6. Incertidumbre de una medida

Todas las medidas están sujetas a una incertidumbre que puede ser debida a múltiples causas, entre las que están:

- error de paralaje, debido a una lectura incorrecta de los aparatos analógicos,
- métodos incorrectos de medida,

- influencia de factores externos,
- mala calibración de los aparatos.

Las incertidumbres se pueden expresar mediante:

1. **la incertidumbre absoluta**, es la posible desviación de la medida, expresada en las unidades de la medida. La forma de estimar la incertidumbre absoluta depende del número de medidas, como veremos posteriormente. Así, si una medida se expresa como $(28,5 \pm 0,5)$ mm, la incertidumbre absoluta será 0,5 mm. La incertidumbre absoluta tiene las mismas unidades que la medida.
2. **la incertidumbre relativa**, es el cociente entre la incertidumbre absoluta y la propia medida. Si se multiplica por 100, se expresa en tanto por ciento (%):

$$I_r = 100 \frac{\Delta L}{L} = 100 \frac{0,5}{28,5} = 1,8\% \quad (3.1)$$

La incertidumbre relativa se puede expresar directamente como el cociente o como el porcentaje, en cuyo caso se añade el símbolo, %, pero no tiene unidades, ya que se cancelan las unidades del numerador y del denominador.

3.6.1. Incertidumbre de una medida directa

En el caso en que podamos hacer una medida de forma directa, como puede ser medir una longitud con una regla o una diferencia de potencial con un voltímetro, podemos estimar la incertidumbre mediante dos procedimientos:

1. Si hacemos pocas medidas ($n < 5$)

Cuando hacemos pocas medidas, incluso una única medida, siempre podemos estimar la incertidumbre de una medida conociendo la precisión del correspondiente aparato de medida. Tomaremos la incertidumbre absoluta como la precisión del aparato.

Así, si nuestra regla tiene divisiones de 0,5 mm, la precisión de la regla es de 0,5 mm y la incertidumbre absoluta será igual a la precisión, por lo que, si nuestra medida era de 28,5 mm, la escribiremos como $(28,5 \pm 0,5)$ mm.

Si medimos con un voltímetro que aprecia décimas de voltio (0,1 V), entonces si la medida es de 11,9 V, el resultado debería expresarse como $(11,9 \pm 0,1)$ V.

2. Si hacemos muchas medidas ($n > 5$)

Cuando hacemos muchas medidas, podemos hacer un análisis estadístico y calcular cuál será el valor más probable y cuál la incertidumbre a dicho valor más probable.

En la tabla 3.1 se recogen una serie de medidas de longitud. El valor más probable es la media de todas las medidas:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{\sum_1^n x_i}{n} \quad (3.2)$$

La desviación estándar, σ_{n-1} , refleja la incertidumbre asociada al valor medio y se define como:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (3.3)$$

Esta desviación estándar se conoce como desviación estándar muestral, ya que se refiere a una muestra de toda la población.

Podemos hablar también de desviación estándar poblacional, σ_n , cuando tenemos toda la población. La ecuación difiere sólo en el denominador:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (3.4)$$

En la tabla 3.1, podemos ver el valor de las correspondientes desviaciones muestral y poblacional. Con el promedio y las desviaciones calculadas, la medida será:

$$x = (33,46 \pm 0,06) \text{ mm} \quad (3.5)$$

donde hemos aproximado la desviación estándar para tener una única cifra significativa. Es importante comparar la desviación estándar con la precisión, ya que una incertidumbre no puede ser menor que la precisión del aparato que realiza la medida, si la medida es, como en este caso, directa.

La precisión era de 0,05 mm, por lo que es menor que la desviación estándar.

Una forma muy corriente de expresar unos resultados estadísticos es mediante una gráfica de frecuencias. En dicha figura, se representa en el eje de abscisas los distintos intervalos en los que tenemos medidas y en el de ordenadas el número de medidas hechas en cada intervalo.

Si hacemos dicha gráfica de frecuencias para las medidas que tenemos en la tabla 3.1, obtenemos la gráfica 3.1.

Tabla 3.1: Resultados de una medida de longitud y análisis estadístico

Medida	Longitud (mm)
1	33,40
2	33,40
3	33,45
4	33,55
5	33,60
6	33,50
7	33,45
8	33,50
9	33,40
10	33,50
11	33,45
12	33,50
13	33,40
14	33,60
15	33,50
16	33,40
17	33,40
18	33,50
19	33,50
20	33,55
21	33,40
22	33,45
23	33,45
24	33,45
25	33,45
26	33,45
27	33,45
28	33,45
29	33,45
30	33,45
31	33,45
32	33,35
33	33,50
Media	33,46
σ_{n-1}	0,058
σ_n	0,057

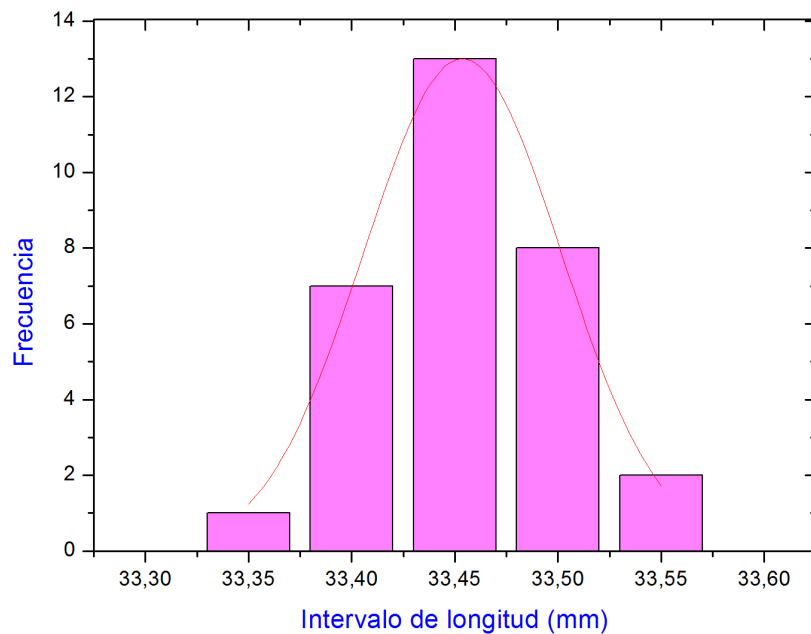


Figura 3.1: Gráfico de frecuencias

3.6.2. Incertidumbre de una medida indirecta

Hay ocasiones en las que para obtener la medida de alguna magnitud física no lo hacemos de forma directa, sino que medimos una o más magnitudes y de éstas obtenemos mediante alguna relación matemática la que queremos medir.

Podemos poner un ejemplo en la medida de una resistencia mediante la ley de Ohm. Con la ayuda de un voltímetro, de una fuente de alimentación y de un amperímetro, además de la resistencia, montamos el circuito de la figura 3.2

Supongamos que realizamos una única medida de la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia y de la intensidad medida con el amperímetro y obtenemos los siguientes resultados: $I = (407 \pm 1) \text{ mA}$ y $V = (12,1 \pm 0,1) \text{ V}$.

El valor de la resistencia lo hallamos mediante la ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{12,1 \text{ V}}{0,407 \text{ A}} = 29,73 \Omega \quad (3.6)$$

¿Cuál será la incertidumbre de R ?

La manera de calcular la incertidumbre para una medida indirecta a partir de las

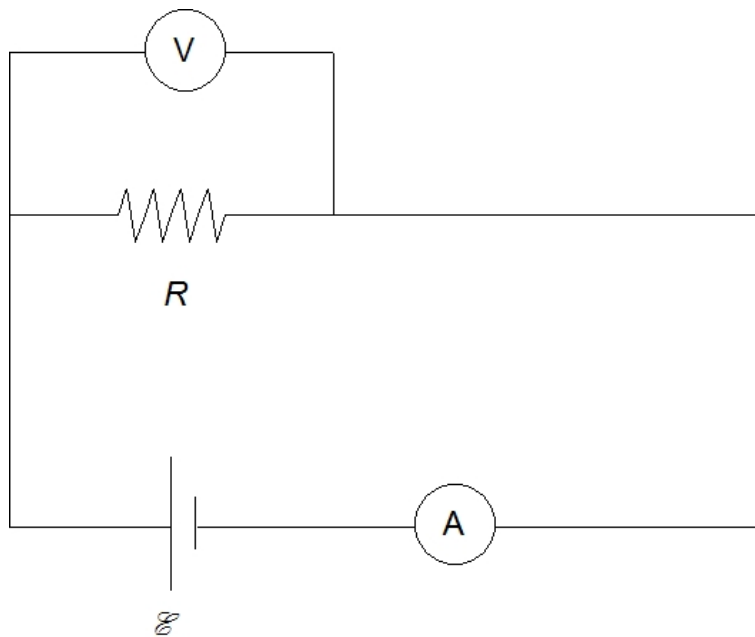


Figura 3.2: Circuito para medir una resistencia mediante la ley de Ohm.

incertidumbres de las medidas directas, es tratar a las incertidumbres como diferenciales o incrementos.

Para ello, tomaremos logaritmos neperianos en ambos miembros de la ecuación 3.6:

$$\ln R = \ln V - \ln I \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dV}{V} - \frac{dI}{I} \quad (3.7)$$

Como las incertidumbres siempre son aditivas, podemos escribir:

$$\frac{dR}{R} = \frac{dV}{V} + \frac{dI}{I} = \frac{0,1 \text{ V}}{12,1 \text{ V}} + \frac{1 \text{ mA}}{407 \text{ mA}} = 0,01 = 1\% \quad (3.8)$$

Por lo que podemos ver que la incertidumbre relativa de la resistencia es del 1%, así que la resistencia se puede escribir:

$$R = (29,73 \pm 0,32) \Omega = (29,7 \pm 0,3) \Omega \quad (3.9)$$

De esta forma, se pueden hallar las incertidumbres asociadas a medidas indirectas. En las siguientes ecuaciones, se pueden ver algunos ejemplos de cómo calcular la incertidumbre en medidas indirectas.

$$\begin{aligned}
\Delta(A + B) &= \Delta A + \Delta B \\
\Delta(A - B) &= \Delta A + \Delta B \\
\frac{\Delta(A \cdot B)}{AB} &= \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \\
\frac{\Delta(A/B)}{A/B} &= \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \\
\frac{\Delta(A^2)}{A^2} &= 2 \frac{\Delta A}{A}
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

3.7. Ejercicios propuestos

3.7.1. Decide si las medidas expresadas en la tabla son correctas o incorrectas y si son incorrectas, corrégelas en la casilla correspondiente.

Medida	Correcta o Incorrecta	Corrección
1234,56 ± 1,05		
(1,08000 ± 0,06) × 10 ⁻³		
4536,78 ± 10 %		
123456789,060000 ± 0,000001		
123456789,060000 ± 0,01		

3.7.2. Supongamos que medimos dos longitudes a y b en el Laboratorio y obtenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
a &= (50,00 \pm 0,05) \text{ mm} \\
b &= (10,00 \pm 0,01) \text{ mm}
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Halla el error de:

a) $2a + 2b$

b) $a \cdot b$