Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)

Unidad 10: Trabajo y energía

Universidad Politécnica de Madrid

14 de abril de 2010

10.1. Planificación de la Unidad

10.1.1. Objetivos

1. Recordar el concepto de energía cinética

2. Introducir el trabajo, relacionándolo con la energía cinética

3. Discutir el caso en el que las fuerzas conservativas y el significado de la energía potencial

4. Enfatizar la importancia de la conservación de la energía

5. Tratar casos de fuerzas no conservativas

10.1.2. Actividades

1. Lectura del tema

2. Realización del cuestionario de la unidad (enlace)

3. Resolución de los ejercicios propuestos básicos

4. Resolución de los ejercicios avanzados.

5. Actividades complementarias:

    a) Buscar información sobre dinámica en el ámbito de tu titulación. Listado de asignaturas que se relacionan, directa o indiréctamente, con ella.

    b) Redactar una pequeña reseña (máximo 1 página).

10.1.3. Bibliografía

1. Libros de primero y segundo de Bachillerato

2. P.A. Tipler y G. Mosca, *Física para Ciencias e Ingeniería*, 5^a edición, Editorial Reverté, 2005. Capítulos 6 y 7.

10.1.4. Enlaces relacionados

1. Proyecto Newton:
    a) Trabajo y energía
2. Wikipedia:
    a) Trabajo
    b) Energía

10.2. Trabajo y energía

Después del trabajo de Newton, la mecánica recibió un fuerte impulso gracias al concepto de *energía*. Veremos cómo se estableció que esta magnitud se conserva siempre, aunque puede cambiar de aspecto. La energía debida al movimiento se denomina *energía cinética*. La energía correspondiente a un campo de fuerzas es la potencial. La que se transfiere a los procesos térmicos se denomina calor. Por último, y culminando el proceso, Einstein estableció que la propia masa de un cuerpo tiene un equivalente energético.

10.2.1. La energía cinética

La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$

donde v^2 es el módulo al cuadrado del vector velocidad, que es un escalar. Es decir, es una cantidad que no depende de la dirección y el sentido de la velocidad, sino de su módulo. Además, la dependencia es cuadrática: si la velocidad se dobla, la energía cinética se cuadruplica.

Las unidades de la energía cinética (de cualquier energía, en realidad) son, en el SI, kg m^2/s^2, una combinación que se denomina julio (en honor de Joule).

En todo caso, por simplicidad supondremos un movimiento rectilíneo en lo que sigue. Si derivamos T con respecto al tiempo,

$$\frac{dT}{dt} = mv\frac{dv}{dt}.$$

Según la segunda ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f,$$

así que obtenemos:

$$\frac{dT}{dt} = vf;$$

es decir, el ritmo de cambio de energía cinética está dado por vf.

Esta cantidad, vf, se denomina *potencia*

$$P = vf.$$

Sus unidades SI son de J/s, una unidad que se llama también watio (en honor del ingeniero Watts).

Si f y v tienen el mismo signo, la potencia es positiva y la energía cinética se va incrementando. Esto corresponde a una fuerza aplicada en la misma dirección que la velocidad. También puede ser negativa, en cuyo caso la fuerza se opone a la velocidad. En varias dimensiones, la expresión para la potencia es $P = \vec{v} \cdot \vec{f}$

10.2.2. Concepto de trabajo

Integrando $\frac{dT}{dt} = vf$ podemos escribir

$$dT = vf dt.$$

Pongamos que en el tiempo t_0 el móvil tenía una cierta energía cinética T_0 y el tiempo $t = t_1$ otra distinta T_2; integrando:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{t_1}^{t_2} fv dt.$$

La parte izquierda es inmediata, es el cambio neto en energía cinética:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T,$$

En cuanto a la parte derecha, tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} fv dt = \int_{t_1}^{t_2} f \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_1}^{x_2} f dx,$$

donde hemos usado la definición de velocidad $v = \frac{dx}{dt}$ para hacer un cambio de variables en la integral.

Esta integral espacial de la fuerza se denomina *trabajo*, W:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f dx.$$

Hemos demostrado que el cambio en energía cinética se debe a este trabajo:

$$\Delta T = W$$

(De hecho, la discusión es muy parecida en varias dimensiones, con la definición $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} d\vec{l}$, la integral de línea de la fuerza a lo largo de un trayecto.)

Las unidades del trabajo son, obviamente, las de energía, julios en el SI.

10.2.3. Fuerzas conservativas y energía potencial

En algunos casos se puede estimar rápidamente el trabajo. Supongamos que f deriva de una función:

$$f = -\frac{dU}{dx},$$

donde el signo menos es irrelevante y se incluye por motivos históricos. Esta función $U(x)$ tiene unidades de energía y se denomina energía potencial.

En más de una dimensión, estas definiciones se traducen en que la fuerza, un vector, es el gradiente de un campo escalar (con el signo cambiado).

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} U.$$

Recordemos que no todas las fuerzas son conservativas. Por ejemplo, las de rozamiento no lo son, ya que no derivan de un potencial; de estas hablaremos más adelante.

Ejemplo 10.1 ***La energía potencial de un campo constante***
Un caso sencillo se da cuando tenemos un campo constante, y f no depende de nada. Según la fórmula (10.2.3), esto significa

$$U(x) = -fx,$$

ya que al derivar este campo con respecto a x y cambiar de signo obtenemos f, constante. Este es el caso del campo gravitacional cerca del suelo: es constante y se suele designar por la letra g. Como su dirección es vertical, uno escribiría en las fórmulas z en vez de x. Además, con el convenio habitual de que el sentido hacia arriba es positivo, uno tiene

$$U(z) = gz,$$

de tal modo que la derivada proporciona $-g$ (hacia abajo, de ahí el signo menos). (En todo caso, dado que la fuerza es vectorial, sería el gradiente del campo escalar $U(z)$.)

Ejemplo 10.2 ***Energía potencial de campos centrales***
Los campos gravitatorios y eléctricos son muy importantes, como veremos en próximas secciones. En ambos casos existen campos creados por masas, o cargas, puntuales y estáticas que tienen la forma

$$F(r) = K\frac{1}{r^2},$$

donde K es una constante, r es la distancia radial a la partícula. Esta es la famosa ley de la fuerza "inversamente proporcional al cuadrado de la distancia". Además, el campo apunta "hacia afuera" (o hacia dentro, dependiendo del signo de K).

La función que, derivada, proporciona $1/r^2$ es $-1/r$. Así pues,

$$U(r) = K\frac{1}{r}.$$

(Para ser precisos, habría que introducir coordenadas esféricas, pero al final el cálculo resulta así de sencillo). Es decir, la energía potencial es inversamente proporcional a la distancia (no a su cuadrado).

10.2.4. Conservación de la energía

Si la fuerza es conservativa, el trabajo será:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dU}{dx} dx = -[U(x_2) - U(x_1)] = -\Delta U.$$

Es decir, el trabajo es menos el cambio en energía potencial. Recordando que el trabajo también es el cambio en la energía cinética, podemos relacionar los dos cambios:

$$\Delta T = -\Delta U.$$

Es decir, una ganancia en energía cinética corresponde a una pérdida en energía potencial, y viceversa. Si escribimos

$$\Delta T + \Delta U = \Delta(T + U) = 0,$$

vemos que la suma $T + U$ no cambia. A la suma de las dos energías se le llama *energía mecánica*:

$$E = T + U,$$

y vemos que es constante para este tipo de fuerza. Por eso a estas fuerzas se les llama *conservativas*: conllevan la conservación de la energía mecánica.

El movimiento bajo la acción de fuerzas conservativas es bastante sencillo de describir, al menos cualitativamente. Como la suma de las energías cinética y potencial es constante, si uno dibuja la energía potencial, y en el mismo gráfico dibuja una línea horizontal correspondiente a la energía mecánica (horizontal porque es constante), la energía cinética es la diferencia entre las dos. Cuando la energía potencial corta la línea horizontal, la energía cinética es nula: estos son los "puntos de retorno" del móvil. Cuanto más por debajo de la energía mecánica esté la energía potencial, mayor será la energía cinética (y mayor la velocidad, porque la energía cinética es proporcional al cuadrado de la velocidad). Por último, las zonas donde la energía potencial está por encima de la mecánica están "prohibidas", porque la energía cinética es siempre positiva.

En la Figura 10.2 se pueden ver sucesivas intantáneas de una pelota botando, de izquierda a derecha (la fotografía se ha tomado con una luz estroboscópica, a 25 fogonazos

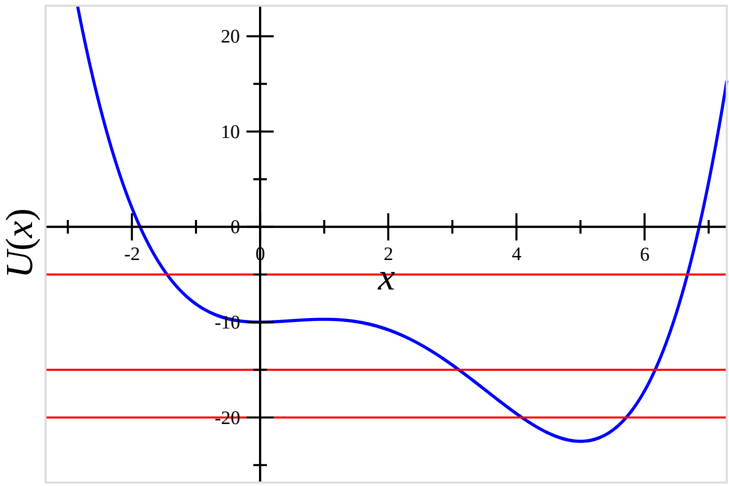

Figura 10.1: Energía potencial de un cierto problema.

Figura 10.2: Instantáneas sucesivas de una pelota botando. De wikipedia commons

por segundo). Como se ve, la altura entre botes sucesivos va descendiendo. Esto se debe a la disipación de la energía, que acaba transformándose en calor, tanto en la pared como en la propia pelota (en otros deportes, como el squash, este calentamiento es patente).

Ejemplo 10.3 ***Planos inclinados***
Podemos ahora repasar problemas ya resueltos con las herramientas de las energías. Recordemos que estas técnicas son sobre todo útiles cuando no queremos informacion de los tiempos de recorrido (que no aparecen directamente en las ecuaciones), si no de distancias y velocidades.

Por ejemplo, podemos concluir que la velocidad final de un móvil que desciende un plano inclinado depende tan sólo de la altura de la que parte, no del ángulo de inclinación. En efecto, al comienzo del movimiento tendremos:

$$T_1 = 0; \qquad U_1 = mgh.$$

Al final:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2; \qquad U_1 = 0.$$

Igualando las dos expresiones, $v^2 = gh$*, o* $v = \sqrt{gh}$*. El resultado, de hecho, no depende del recorrido de la partícula, que podría provenir incluso de un circuito que pareciera una montaña rusa, bucles incluidos (siempre que podamos despreciar el rozamiento, claro está).*

10.2.5. Fuerzas no conservativas

Si están presentes fuerzas que no son conservativas, hay que tener cuidado porque la energía mecánica no se conserva. De hecho, si separamos a las fuerzas en conservativas y no conservativas, tendremos que

$$W = \Delta T = -\Delta U + W_{\mathrm{nc}},$$

donde W_{nc} es el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas. Es decir:

$$\Delta(T + U) = \Delta E = W_{\mathrm{nc}},$$

lo cual deja claro que la energía mecánica no se conserva si existe un trabajo ejercido por fuerzas no conservativas.

Ejemplo 10.4 ***Fuerza constante***
Un caso claro es aquél en el cual se ejerce una fuerza externa. Si esta es constante, y en

la dirección del movimiento, tendremos $W_{\text{nc}} = fL$*, donde* L *es la distancia recorrida. Si el móvil parte del reposo y se desplaza en horizontal, tendremos:*

$$\frac{1}{2}mv^2 = fL.$$

Se puede comprobar que este resultado concuerda con el que se obtiene a partir de la segunda ley de Newton (con la aceleración $a = f/m$*).*

Ejemplo 10.5 ***Fuerza constante***
Plano inclinado con rozamiento dinámico
Un caso de gran interés en el que las fuerzas no son conservativas, pero que se puede tratar de manera bastante sencilla, es el rozamiento dinámico. La fuerza de rozamiento resultante se opone siempre al movimiento. Además, al ser $f = \mu N$*, en los problemas en los que la fuerza normal es constante (¡no siempre!) constante, el trabajo que realiza es:*

$$W_{\text{nc}} = -fL = -\mu NL.$$

Podemos revisar nuestro ejercicio del plano inclinado incluyendo rozamiento dinámico. Igual que antes:

$$T_1 = 0; \qquad U_1 = mgh.$$

Al final:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2; \qquad U_1 = 0.$$

Pero ahora,

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = -\mu NL.$$

Despejando v*,*

$$v = \sqrt{mgh - \mu NL}.$$

Recordando que $L\sin\alpha = h$ *(por trigonometría) y* $N = mg\cos\alpha$ *(revisar, si es necesario, la sección dedicada a los planos inclinados en el tema sobre las aplicaciones de las leyes de Newton):*

$$v = \sqrt{mg(1 - \mu\cot\alpha)}.$$

Se puede llegar al mismo resultado a través de la segunda ley de Newton, pero es un poco más trabajoso.

¡! **Error habitual:**

Atención al signo en el trabajo del ejercicio previo. Se debe a que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Esto implica un cambio *negativo* de la energía mecánica, o sea, un decrecimiento. Si fuera positivo la energía mecánica crecería, como en el ejemplo anterior en el que una fuerza externa realiza trabajo.

10.3. Problemas

1. En el resultado del ejercicio resulto sobre el plano inclinado con rozamiento dinámico, podría ser que el término $\mu \cot \alpha$ fuera mayor que 1, si μ es grande o α es pequeño (la función cotangente tiende a infinito para ángulos pequeños). En este caso nuestra velocidad sería imaginaria. ¿Qué está pasando en este caso? Repasar la sección adecuada en la Unidad 7 (Aplicaciones de las leyes de Newton) si es necesario.

2. Una partícula se mueve en un campo con energía potencial de la forma K/r. Si comienza muy lejos con velocidad v y se mueve hacia el origen, calcular hasta qué distancia del origen (es decir, qué valor de r puede llegar). *Ayuda*: plantear el problema en términos de la conservación de la energía, no a través de las ecuaciones del movimiento.

3. En el tiro parabólico, la componente horizontal de la velocidad se constante, mientras que la vertical varía. En el punto más alto, esta última se anula. Utilizar este hecho para calcular la altura máxima de un proyectil, en función de su velocidad inicial. *Ayuda*: Empezar con el hecho de que la energía mecánica, $(1/2)mv^2 + mgh$, debe conservarse; y utilizar que $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, por el teorema de Pitágoras.

4. **Avanzado**. Comprobar que la energía potencial

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

corresponde a una fuerza $f(x) = -kx$. Dibujar $U(x)$ y $f(x)$. Discutir qué pasaría si un movimiento comienza cerca de $x = 0$ en el caso en el que el coeficiente k sea positivo; este caso corresponde al *movimiento armónico*, de gran importancia en física. Discutir qué pasaría si k fuese negativo.