Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)

Unidad 13: Ondas armónicas

Universidad Politécnica de Madrid

22 de marzo de 2010

13.1. Planificación de la unidad

13.1.1. Objetivos

1. Interpretar la función de onda para ondas armónicas planas.
2. Calcular y relacionar entre sí los conceptos de amplitud, potencia, intensidad y nivel de intensidad de una onda.
3. Aplicar las leyes de la reflexión y de la refracción.

13.1.2. Actividades

1. Lectura del resumen del tema
2. Realización de los ejercicios

13.1.3. Bibliografía

1. TIPLER, P.A. y MOSCA, G. *Física para la ciencia y la tecnología*, 5ª Edición, vol. 1, Temas 15 y 16, Editorial Reverté, 2005.

13.1.4. Enlaces relacionados

13.2. Introducción

La idea de una onda que se propaga podemos percibirla en multitud de situaciones: un instrumento musical, una piedra que cae en un estanque, la emisión de una estación de radio o de televisión, las comunicaciones móviles, etc.

En todos estos casos un elemento mecánico o electromagnético, produce una perturbación que se propaga por el espacio y llega a otro punto. Las características de esta propagación son:

1. Se produce una perturbación en un punto del espacio y los puntos de alrededor se "enteran".
2. La transmisión de la perturbación ocurre sin que el espacio se traslade.

A este fenómeno lo describiremos mediante una onda que se propaga. No hay propagación de materia, lo que se transmite es energía y momento.

Figura 13.1: Foto de Tydan bajo licencia Creative Commons (http://www.beachpicturesbeachpictures.net)

13.3. Tipos de ondas

Hay muchas formas de clasificar las ondas. Si atendemos al tipo de perturbación, podemos hablar de ondas mecánicas, como aquellas que necesitan de un medio material para propagarse. Dentro de éstas. destacan las ondas sonoras. Existen también las ondas electromagnéticas, que no necesitan de un medio para propagarse. En este tipo de ondas lo que se propaga son los campos eléctrico y magnético.

También podemos clasificar las ondas atendiendo al tipo de movimiento que realizan:

- **Ondas transversales**

  Se dice que una onda es transversal cuando la oscilación es perpendicular a la dirección de propagación. Ejemplos de ondas transversales son las ondas en una cuerda o las ondas electromagnéticas.

- **Ondas longitudinales**

  Decimos que una onda es longitudinal cuando su oscilación es paralela a la dirección de propagación. Ejemplos de ondas longitudinales son las ondas en un muelle, las ondas en una barra o las ondas sonoras.

- **Ondas transversales y longitudinales**

Hay ejemplos, como las olas en el mar, que oscilan tanto en la dirección de propagación, como en sentido perpendicular, por lo que son transversales y longitudinales a la vez.

13.4. Descripción matemática de la propagación

Consideremos una función $f(x)$ como la representada en la figura 13.2. Cuando esta función se propaga hacia la derecha sin deformarse con una velocidad v, al cabo de un cierto tiempo estará situada a una distancia vt. Es fácil ver que la función es ahora $f(x-vt)$. Igualmente se puede demostrar que si la función viaja hacia la izquierda con una velocidad v, entonces la función será, $f(x+vt)$.

Por tanto, las funciones $f(x-vt)$ y $f(x+vt)$ son ondas viajeras con una velocidad de fase v. En general, veremos que la velocidad de propagación es la velocidad de grupo y no la de fase.

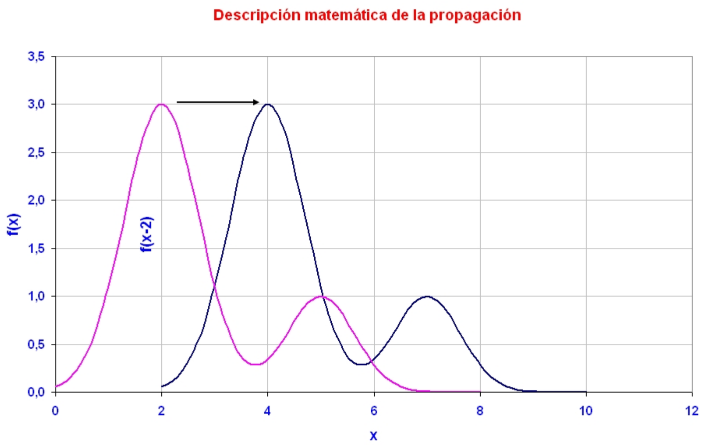

Figura 13.2: Descripción matemática de la propagación

13.5. Ecuación de onda: solución general

En una dimensión, la ecuación diferencial de una onda que se propaga sin dispersión y con una velocidad de fase v es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{13.1}$$

Esta es una ecuación diferencial en derivadas parciales, cuya solución general es del tipo:

$$\psi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \tag{13.2}$$

Como podemos ver, la solución general de la ecuación de ondas es la suma de dos funciones que se propagan una hacia la derecha y otra hacia la izquierda. En algunas situaciones tendremos sólo una de la funciones, como en el caso de una onda viajera, pero en otras situaciones tendremos la suma de ambas funciones, como en el caso de una onda incidente y otra reflejada.

13.6. Ondas armónicas en una dimensión

Un tipo especial de funciones es el de las funciones armónicas, es decir, tipo seno o coseno. Como vimos en el caso de las oscilaciones, este tipo de funciones es muy adecuado para describir los movimientos periódicos, ya que, mediante el análisis de Fourier, cualquier movimiento periódico puede descomponerse en sumas de armónicos.

La ecuación general de una onda armónica en una dimensión es:

$$\psi(x,t) = A \ \mathrm{sen}\,(\omega t \pm kx + \phi) \tag{13.3}$$

donde

- A es la amplitud,
- ω es la frecuencia angular, se mide en rad s^{-1},
- k es el vector de onda, se mide en rad m^{-1} y
- ϕ es la fase inicial.

Algunos comentarios al hilo de la definición de la onda armónica son los siguientes:

1. El signo $\pm$ de la ecuación depende del sentido del movimiento de la onda: será positivo si se mueve hacia la derecha y negativo si se mueve hacia la izquierda (tomando el sistema de coordenadas habitual).
2. La función de la onda armónica es una función que depende de dos variables, x y t, por lo que no es lo mismo que una oscilación, ya que ésta depende exclusivamente

del tiempo, t. Podemos decir que la función de onda es periódica, tanto en el espacio, como en el tiempo.

Una complicación matemática es que las derivadas tienen que ser derivadas parciales. Por esto la ecuación de onda es una ecuación en derivadas parciales.

3. La función de la onda armónica es periódica en el tiempo, como el caso de las oscilaciones armónicas, ya que si tomamos una posición fija, por ejemplo, x_1, la función de onda depende sólo de t. Por tanto, podemos afirmar que cada punto del espacio realiza una oscilación armónica cuando la onda llega a dicho punto. El período temporal se denomina período, como en el caso de las oscilaciones, y es igual a:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \tag{13.4}$$

donde f es la frecuencia.

4. La función de la onda armónica es también periódica en el espacio, ya que si tomamos una foto de la onda en un tiempo fijo, por ejemplo, t_1, la función de onda depende sólo de x. El período espacial se denomina longitud de onda, λ, y es igual a:

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{1}{\kappa} \tag{13.5}$$

donde k es vector de onda y κ es el número de onda, que se mide en m^{-1}.

5. La velocidad de fase se puede hallar despejando en la fase, para obtener una función del tipo $f(x \pm vt)$:

$$\psi(x,t) = A\ \mathrm{sen}\,(\omega t \pm kx + \phi) = A\,\mathrm{sen}\left[\,k\,\left(\frac{\omega}{k}\,t \pm x\right) + \phi\right] \tag{13.6}$$

por tanto, la velocidad de fase será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\,f \tag{13.7}$$

13.7. Ondas transversales en una cuerda

Supongamos una cuerda inicialmente en equilibrio a la que sometemos a un pequeño desplazamiento vertical, de modo que oscila en la dirección del eje Y. Tomemos un pequeño intervalo de la cuerda, de longitud, dx, entre los puntos A y B (ver figura 13.3).

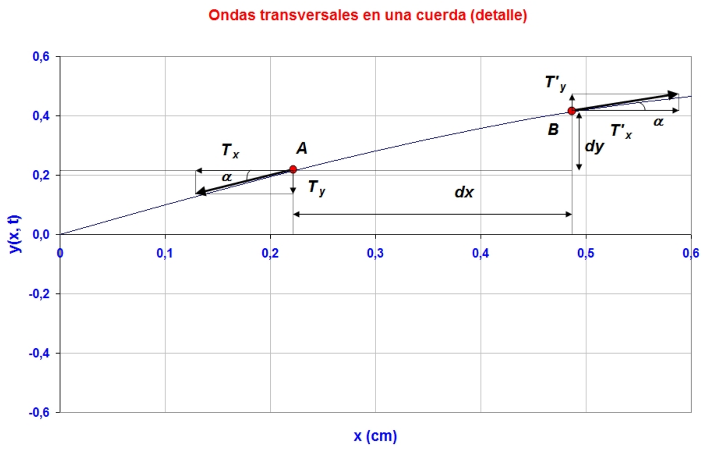

Figura 13.3: Ondas transversales en una cuerda

La fuerza que actúa sobre la cuerda es la tensión T. En los puntos A y B las tensiones son iguales en módulo, $|T| = |T'|$, pero no tienen la misma dirección, debido a la curvatura de la cuerda.

Por tanto, las componentes de la tensión serán:

$$\begin{aligned} F_x &= T\,(\cos\alpha' - \cos\alpha) \\ F_y &= T\,(\operatorname{sen}\alpha' - \operatorname{sen}\alpha) \end{aligned} \tag{13.8}$$

Supondremos que consideramos pequeñas oscilaciones, por lo que los ángulos que hemos considerado, α y α', son muy pequeños y podemos aproximarlos de la siguiente forma, considerando primer orden de aproximación:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \tan\theta \approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{13.9}$$

De este modo, podemos aproximar las componentes de la tensión de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_x &\approx 0 \\ F_y &\approx T\,(\tan\alpha' - \tan\alpha) = T\,d(\tan\alpha) \end{aligned} \tag{13.10}$$

Para poder escribir el valor de $d(\tan\alpha)$, hay que tener en cuenta que el ángulo α es una función tanto del espacio como del tiempo. Sin embargo, en la situación que hemos reflejado, no hay dependencia del tiempo, de modo que podemos calcular el diferencial de la siguiente forma:

$$d(\tan\alpha) = \frac{\partial(\tan\alpha)}{\partial x}\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\,dx = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx \tag{13.11}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 13.10, obtenemos:

$$F_y = T\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx \tag{13.12}$$

Esta es la fuerza vertical aplicada sobre el segmento AB.

Aplicando la segunda ley de Newton, sabemos que $F = ma$, por lo que tendremos:

$$F_y = dm\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mu\,dx\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{13.13}$$

donde $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ es la aceleración, μ es la masa por unidad de longitud y $dm = \mu\,dx$.

Igualando las ecuaciones 13.12 y 13.13, y eliminando dx, obtenemos:

$$\frac{T}{\mu}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{13.14}$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de ondas:

$$v^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{13.15}$$

Esto nos permite obtener la expresión de la velocidad de propagación de las ondas transversales en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{13.16}$$

Podemos sacar algunas conclusiones a modo de resumen:

1. En primera aproximación, tomando pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio, las ondas en la cuerda son transversales, ya que $F_x \approx 0$.

2. La velocidad de propagación es directamente proporcional a la raíz de la tensión e inversamente proporcional a la raíz de la masa por unidad de longitud.

3. En los instrumentos musicales de cuerda, se producen ondas estacionarias con una serie de frecuencias determinada. Las frecuencias posibles son proporcionales a la velocidad de propagación, por lo que los sonidos serán tanto más agudos (frecuencias altas) cuanto mayor sea la tensión y menos densa la cuerda. Por el contrario, cuanto menor sea la tensión y mayor la densidad de la cuerda, más grave será el sonido (frecuencias bajas).

13.8. Energía transmitida por una onda

Hemos visto que en una onda no se propaga la materia, sino únicamente la energía en forma de una perturbación que se propaga. Para evaluar la energía que se transmite por unidad de tiempo, vamos a ver el caso de las ondas transversales en una cuerda.

13.8.1. Energía cinética

Tomemos un pequeño trozo de la cuerda, como el segmento que hemos tomado antes, el AB, que es de una longitud dx. Si expresamos su energía cinética, tendremos:

$$dE_c = \frac{1}{2}\, dm\, v^2 = \frac{1}{2}\, \mu dx\, \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \tag{13.17}$$

Podemos definir una densidad de energía por unidad de longitud, ya que para la cuerda resulta más conveniente:

$$e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\, \mu\, \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \tag{13.18}$$

Si suponemos que las ondas que viajan por la cuerda son armónicas, entonces podemos suponer que ψ tiene la forma de la ecuación 13.3, por lo que si hallamos la derivada con respecto a t y la sustituimos en la ecuación anterior, obtendremos:

$$e_c = \frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\, \mu\, A^2\, \omega^2 \cos^2\left(\omega t - kx + \phi\right) \tag{13.19}$$

Cuando hablamos de ondas, puede tener más sentido promediar la energía en un ciclo, por lo que tomaremos un instante de tiempo determinado, como $t = 0$ e integraremos la energía cinética en un ciclo:

$$E_c = \frac{1}{2}\,\mu\,A^2\,\omega^2\,\int_0^\lambda \cos^2 kx\,dx = \frac{1}{4}\,\lambda\mu A^2\omega^2 \tag{13.20}$$

que representa la energía cinética en un ciclo.

13.8.2. Energía potencial

Por su parte, la energía potencial de la cuerda es el resultado de la energía elástica. Esta energía se puede calcular como el trabajo de deformación, que es igual al producto de la tensión de la cuerda por la deformación de la misma. Se puede demostrar que la energía potencial del trozo de cuerda que hemos considerado anteriormente es:

$$dE_p = \frac{1}{2}\,T\,dx\,\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \tag{13.21}$$

Igualmente, podemos definir la densidad lineal de energía potencial:

$$e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}\,T\,\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \tag{13.22}$$

Haciendo la suposición anterior de que las ondas son armónicas, tendremos:

$$e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}\,T\,A^2\,k^2\cos^2\left(\omega t - kx + \phi\right) \tag{13.23}$$

Ahora bien, tenemos que,

$$\omega^2 = k^2\,v^2 = k^2\,\frac{T}{v} \Rightarrow k^2\,T = \mu\,\omega^2 \tag{13.24}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$e_p = \frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}\,\mu\,A^2\,\omega^2\cos^2\left(\omega t - kx + \phi\right) \tag{13.25}$$

Como en el caso de la energía cinética, promediamos en un ciclo, tomando un instante de tiempo fijo:

$$E_p = \frac{1}{2}\,\mu\,A^2\,\omega^2\,\int_0^\lambda \cos^2 kx\,dx = \frac{1}{4}\,\lambda\mu A^2\omega^2 \tag{13.26}$$

que representa la energía potencial en un ciclo.

La energía total en un ciclo será entonces:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,\lambda\mu A^2\omega^2 \tag{13.27}$$

Es importante destacar que la energía de las ondas es proporcional a la amplitud al cuadrado.

13.9. Potencia e intensidad de una onda

Definiremos potencia, P, de una onda al trabajo realizado por unidad de tiempo y se puede obtener multiplicando el trabajo por ciclo por el número de ciclos por unidad de tiempo, es decir, la frecuencia:

$$P = E_T\,f = \frac{1}{2}\,\lambda\mu A^2\omega^2\,f = \frac{1}{2}\,\mu A^2\omega^2\,\lambda f = e_T\,v \tag{13.28}$$

donde e_T es la densidad lineal de energía y $v = \lambda f$ es la velocidad de fase.

La expresión de la potencia nos indica que la energía viaja también junto con la perturbación y a su misma velocidad, la velocidad de fase. Este resultado es cierto para ondas armónicas. Para ondas no armónicas o medios dispersivos, hay que tener en cuenta la velocidad de grupo.

Definiremos la intensidad, I de una onda, como el cociente entre la potencia, P, y la superficie normal a la dirección de propagación, S:

$$I = \frac{P}{S} \tag{13.29}$$

De manera que I tiene unidades de energía por unidad de tiempo y por unidad de superficie. En el Sistema Internacional serán, W m^{-2}.

Si la potencia era el producto entre la densidad lineal de energía y la velocidad de fase, la intensidad es la energía por unidad de volumen multiplicada por la velocidad de fase.

Podemos ver que la intensidad de una onda es igualmente proporcional a la amplitud al cuadrado.

13.10. Frentes de onda. Ondas planas y esféricas

Hasta ahora hemos tratado con ondas en una dimensión, pero podemos extender muchos de los conceptos vistos hasta ahora a tres dimensiones.

Para ello definiremos los frentes de onda, como la superficie que un cierto instante de tiempo están en el mismo estado de perturbación. Los vectores perpendiculares a dichos frentes de onda y orientados en la dirección de propagación se denominan rayos. Podemos ver un esquema en la figura 13.4.

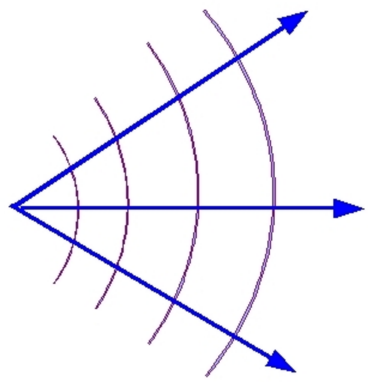

Figura 13.4: Frentes de onda y rayos

Atendiendo al tipo de frente de onda, podemos clasificar a las ondas en planas, esféricas o cilíndricas.

1. **Ondas planas,** son aquellas cuyos frentes de onda son planos. En este caso, los rayos son todos paralelos y podemos escribir la ecuación de la onda igual que en el caso unidimensional. Además, al tener un frente de onda plano, la energía se reparte por igual en cada frente de onda. Esto hace que la intensidad de la onda sea constante en todos los puntos.

   El caso más típico de onda plana corresponde a la luz emitida por un láser. En el caso del haz láser, tenemos un tamaño de haz muy pequeño, de apenas 1 mm de radio o menor. La potencia de un láser suele ser pequeña, del orden de los mW. Considerando estos valores, podemos hallar la intensidad del láser:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1\ 10^{-3}\ \mathrm{W}}{\pi\ 1\ 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 318\ \mathrm{W\ m}^{-2} \tag{13.30}$$

2. **Ondas esféricas,** son aquellas cuyos frentes de onda son superficies esféricas. Estas ondas parecen proceder de un punto, desde el cual parten todos los rayos. Igualmente, su intensidad va disminuyendo a medida que se alejan las ondas, ya que la energía debe repartirse entre todo el frente de onda.

   La mayoría de los emisores pueden aproximarse mediante las ondas esféricas. Vamos a ver un ejemplo de onda esférica y de cómo podemos calcular la intensidad a una cierta distancia de la fuente.

   Tomemos una bombilla de 100 W de potencia. Toda esta potencia no se emite en forma de luz, ya que parte de la potencia se gasta en el calentamiento de la bombilla. Sin embargo, para hacer los cálculos tomemos la potencia como de 100 W. A una distancia de 1 m, el frente de onda será una superficie esférica de 1 m de radio, por lo que la superficie del frente de onda será de $4\,\pi\,r^2$. Por tanto, la intensidad será:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1\ 10^{-3}\ \mathrm{W}}{4\,\pi\,1\ \mathrm{m}^2} = 8\ \mathrm{W\ m}^{-2} \tag{13.31}$$

   Vemos que, a pesar de que la potencia del láser es mucho menor que la de la bombilla, tiene mayor intensidad.

   La intensidad de las ondas esféricas decae como $1/r^2$.

3. **Ondas cilíndricas,** son aquellas cuyos frentes de onda son superficies cilíndricas. Se generan mediante fuentes en forma de rectas. En este caso, la intensidad decae como $1/r$, ya que las superficies cilíndricas tienen una superficie $S = 2\,\pi\,r\,L$.

13.11. Problemas resueltos

13.11.1. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es:

$$y(x,t) = 2{,}5\ \mathrm{cm}\ \operatorname{sen}\pi\ (2t - 10x) \tag{13.32}$$

donde x está en m y t en s. Calcula:

a) La amplitud, longitud de onda, velocidad de propagación y frecuencia de la onda.

b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda y su valor máximo.

Solución:

a) La amplitud, longitud de onda, velocidad de propagación y frecuencia de la onda.

Puesto que la ecuación general de ondas es:

$$y(x,t) = A \ \text{sen}\,(\omega t - kx + \phi) \tag{13.33}$$

podemos identificar la amplitud, A, la frecuencia angular, ω, el vector de onda, k y la fase inicial, ϕ. Así, la amplitud será, $A = 2{,}5$ cm.

Por su parte, la frecuencia, f será:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi}\ \text{Hz} = 1\ \text{Hz} \tag{13.34}$$

La longitud de onda, λ será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{10\pi}\ \text{m} = 0{,}2\ \text{m} \tag{13.35}$$

La velocidad de propagación será:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{10\pi}\ \text{m s}^{-1} = 0{,}2\ \text{m s}^{-1} \tag{13.36}$$

b) La velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda y su valor máximo.

Para calcular la velocidad de oscilación de un punto cualquiera de la cuerda, tenemos que hallar la derivada parcial respecto al tiempo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2{,}5\ 2\pi\ \text{cm s}^{-1}\ \cos\pi\ (2t - 10x) \tag{13.37}$$

Por lo tanto, su valor máximo será:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{max} = 5\ \pi\ \text{cm s}^{-1} \tag{13.38}$$

13.11.2. Una onda acústica, que en el aire tiene una longitud de onda de 17 cm, penetra en un medio en el que la velocidad de propagación del sonido es de 400 $\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Calcular la longitud de onda y la frecuencia correspondientes a la onda en dicho medio.

Solución:

Tomaremos la velocidad del sonido en el aire como 340 m s^{-1}, por lo que la frecuencia del sonido será:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0{,}17}\ \text{s}^{-1} = 2000\ \text{Hz} \tag{13.39}$$

De manera que la frecuencia de la onda en el nuevo medio será de 2000 Hz, ya que la frecuencia no cambia al cambiar de medio. Por lo tanto, la nueva longitud de onda, λ, será:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{400}{2000} \text{ m} = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm} \tag{13.40}$$

13.11.3. La intensidad de la radiación solar que incide perpendicularmente a la superficie terrestre es de 1370 W m^{-2}.Suponiendo que el sol emite energía por igual en todas las direcciones y sabiendo que la distancia del sol a la tierra es de 1,5 10^6 km, calcula la potencia total emitida por el sol.

Solución:

Al asumir que el sol emite por igual en todas las direcciones, asumimos que las ondas son esféricas, por lo que su intensidad decrece como $1/r^2$:

$$I = \frac{P}{4\pi\, r^2} = 1370 \text{ W m}^{-2} \tag{13.41}$$

Despejando, obtenemos:

$$P = 4\pi\, r^2\, I = 4\pi\, (1{,}5)^2\, 10^{18} \text{ m}^2\, 1370 \text{ W m}^{-2} = 3{,}87\, 10^{22} \text{ W} \tag{13.42}$$

13.12. Problemas propuestos

13.12.1. Si dos focos sonoros F_1 y F_2 emiten en el mismo medio, con frecuencias f y $4f$ respectivamente, ¿cuál de las dos perturbaciones se propaga con mayor velocidad?

Solución:

La velocidad de propagación depende del medio, por lo que la velocidad será la misma para ambas ondas. Lo único que cambia es la longitud de onda, de modo que la velocidad sea la misma para ambas.

13.12.2. ¿Qué relación existe entre la intensidad y la amplitud de una onda armónica?

Solución:

La intensidad es proporcional a la amplitud al cuadrado.