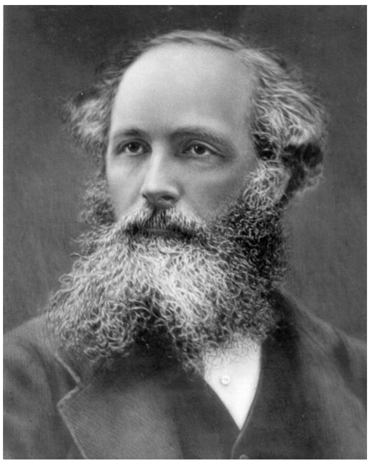
Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)



Unidad 22: Ondas electromagnéticas

Universidad Politécnica de Madrid

15 de abril de 2010

Unidad 22: Ondas Electromagnéticas

1. Objetivos.

    1.1. Comprender los procesos que dieron lugar a una explicación unificada de los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos: la síntesis electromagnética de Maxwell.

    1.2. Conocer las ecuaciones de Maxwell y la interpretación física de las mismas.

    1.3. Conocer la ecuación de ondas que rige la propagación de una onda electromagnética plana y monocromática.

    1.5. Conocer las expresiones más sencillas que representan la onda electromagnética plana y monocromática propagándose en una dirección y comprender las características de estas ondas.

    1.6. Resolver problemas sencillos en los que intervienen ondas electromagnéticas planas y monocromáticas.

2. Contenidos.

    2.1. Introducción: el campo electromagnético.

    2.2. Ecuaciones de Maxwell.

    2.3. Caracterización de los medios.

    2.4. Interpretación Física de las Ecuaciones de Maxwell.

    2.5. Ondas Electromagnéticas.

        2.5.1 Ondas electromagnéticas planas.

    2.6. Densidad de energía del campo electromagnético.

3. Actividades.

    3.1. Lectura del resumen del tema.

    3.2. Realización del cuestionario de la unidad:

    3.3. Realización de los ejercicios.

    3.4. Actividades complementarias.

        3.4.1. Poner ejemplos.

        3.4.2. Redactar una pequeña reseña.

4. Bibliografía.

    4.1. Libros de primero y segundo de Bachillerato.

    4.2. P.A. Tipler y G. Mosca, Física para Ciencias e Ingeniería”, 5ª Edición, Editorial Reverté, 2005.

5. Enlaces relacionados.

5.1. Prisma. Laboratorio Virtual,

Onda electromagnética:

http://enebro.pntic.mec.es/~fmag0006/op_applet_30.htm

4.2 Applets física:

http://www.walter-fendt.de/ph14s/emwave_s.htm

Unidad 22: Ondas Electromagnéticas

1. Introducción: el campo electromagnético

El concepto de campo electromagnético es necesario para explicar un tipo de interacción entre las partículas fundamentales que componen la materia, la denominada interacción electromagnética.

Los campos eléctrico y magnético son fundamentalmente campos de fuerza debidos a las cargas eléctricas que componen la materia. La denominación de eléctrico, magnético o electromagnético depende del estado de movimiento de las cargas respecto a un sistema de referencia. Las cargas eléctricas en reposo originan un *campo* electroestático, es decir, independiente del tiempo. El movimiento ordenado de las cargas representa una corriente eléctrica y produce un campo de fuerzas adicional denominado campo magnético. Este nuevo campo se dice que es magnetostático, si las cargas se mueven a velocidad constante respecto al sistema de referencia o punto de observación. Los movimientos acelerados o de otro tipo producen ambos tipos de campo, el eléctrico y el magnético, que varían con el tiempo y que se denominan campos electromagnéticos.

La región en la que reside el campo electromagnético es el dominio de existencia de los campos vectoriales siguientes:

Campo eléctrico	$\vec{E}$	(V/m)
Desplazamiento eléctrico	$\vec{D}$	(C/m^2)
Inducción magnética	$\vec{B}$	(T)
Campo magnético	$\vec{H}$	(A/m)

Si los campos eléctrico y magnético, caracterizado por los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$, existen en un punto P de una región del espacio su presencia puede detectarse físicamente por medio de una carga q colocada en ese punto. La fuerza $\vec{F}$ resultante en esa carga, tendrá dos componentes, una componente debida a $\vec{E}$ y otra a $\vec{B}$:

$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}\right)$, que se denomina ley de las fuerzas de Lorentz.

La conexión de los campos eléctrico y magnético con las fuentes de carga y de corriente que los crean, viene determinada por un juego de elegantes relaciones, conocidas como ecuaciones de Maxwell y que sintetizan diversas leyes experimentales descubiertas por otros científicos. Estas ecuaciones, expuestas por James Clerk Maxwell en su famosa obra *Electricity and Magnetism* en 1873 son las siguientes:

2. Ecuaciones de Maxwell

Forma integral (caso general)	**Forma integral (vacío)**	
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}$	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	Gauss para el campo eléctrico
$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	Gauss para el campo magnético
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{d\,t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$	Faraday-Henry
$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$	Ampère-Maxwell

Las cuatro ecuaciones de Maxwell, junto con la ley de fuerzas de Lorentz y la ley de conservación de la carga constituyen los postulados fundamentales del electromagnetismo.

Estas ecuaciones son válidas para medios lineales y no lineales, para medios isótropos y no isótropos.

3. Caracterización de los medios

Los medios físicos en los que pueden actuar los campos electromagnéticos, los podemos clasificar en: conductores, aislantes o dieléctricos y magnéticos. Si *el medio es lineal, homogéneo e isótropo*, sus propiedades se pueden caracterizar de un modo completo introduciendo tres *constantes escalares: conductividad* σ, *permitividad* ε *y permeabilidad* μ. Existen las relaciones siguientes entre los campos en los diversos medios:

CONDUCTORES $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ A/m^2

DIELECTRICOS $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ C/m^2

MAGNETICOS $\vec{B} = \mu\vec{H}$ T

estas relaciones son las necesarias para completar nuestro modelo electromagnético.
Cuando se trata de:

medios no lineales, entonces $\vec{J}$ es función de $\vec{E}$; $\vec{D}$ es función de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es función de $\vec{H}$.

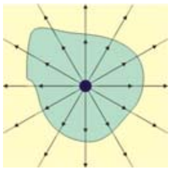
medios anisótropos, entonces $\vec{J}$ y $\vec{E}$ no son paralelos: ni $\vec{D}$ con $\vec{E}$; ni $\vec{B}$ con $\vec{H}$.
En este caso las magnitudes escalares conductividad σ, permitividad ε y permeabilidad μ se convierten en matrices de tres por tres (magnitudes tensoriales).

En los *medios no homogéneos*, las propiedades del medio son diferentes en los diversos puntos del medio, siendo en este caso los valores de σ, ε y μ funciones de las coordenadas espaciales.

4. Interpretación física de las ecuaciones de Maxwell

Vamos a explicar a continuación de una manera concisa el significado de las ecuaciones de Maxwell, considerándolas en la forma de presentación integral.

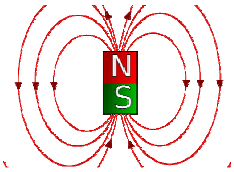
1) Ley de Gauss para el campo eléctrico



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad \rightarrow \qquad \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

La primera ecuación de Maxwell en forma integral nos indica que, el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ que atraviesa una superficie cerrada S en un medio de permitividad ε es igual a la carga total encerrada dividida por ε.

2) Ley de Gauss para el campo magnético



$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

La ecuación nos indica que el flujo magnético sobre una superficie cerrada es siempre igual a cero, lo que significa que el flujo que entra en la superficie cerrada es igual al que sale de la misma. Se puede afirmar que *las líneas de inducción son siempre cerradas*.

3) Ley de Faraday - Henry

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \qquad \rightarrow \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{d\,t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

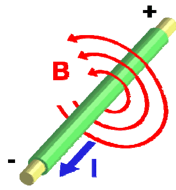
El primer miembro de la tercera ecuación de Maxwell en la forma integral nos indica que, la fuerza electromotriz se puede definir como la energía cedida por un campo no electrostático (integral curvilínea) por unidad de carga a lo largo de un circuito cerrado; el segundo miembro representa la variación del flujo magnético que atraviesa la superficie S. De este modo, teniendo en cuenta ambos miembros podemos enunciar la ley de la inducción de Faraday de manera análoga a como él lo hizo, diciendo: *la fuerza electromotriz inducida en un circuito estacionario cerrado es igual y de signo contrario a la variación respecto al tiempo del flujo magnético que atraviesa el circuito*. Se puede decir, por otro lado, que *el campo eléctrico $\vec{E}$ no es conservativo y no se puede expresar como el gradiente de un potencial escalar*

4) Ley de Ampère - Maxwell

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Si el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ no varía con el tiempo, la ecuación se convierten en:

$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$ (o $\oint_L \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$), válida solamente para campos estáticos y que se conoce con el nombre de ley de Ampère .



En el caso de que el desplazamiento eléctrico varíe con el tiempo, la ley de Ampère debe ampliarse para tener en cuenta la contribución al campo magnético de la densidad de corriente de desplazamiento $\vec{J}_d = \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ Esta densidad de corriente es la contribución de Maxwell para hacer compatible la primitiva ley de Ampère con el principio de continuidad de la carga.

Si se tiene una zona del espacio con ambos tipos de corriente, al integrar la expresión anterior sobre una superficie *S* abierta apoyada sobre la curva *L* se convierte en:

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + I_d \text{ ; donde } I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \text{ y } I_d = \iint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

que expresan respectivamente la corriente total de conducción y la corriente total de desplazamiento que atraviesan la superficie *S*.

5. Ondas electromagnéticas

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell fue la predicción de la existencia de las ondas electromagnéticas, antes de que Hertz en 1888 realizara sus experimentos, que le llevaron a la comprobación de la existencia de las mismas. Las ondas electromagnéticas consisten en campos eléctricos y magnéticos variables que son solución de las ecuaciones de Maxwell.
Consideraremos el caso más simple de una onda que se propaga en un medio lineal homogéneo e isótropo, que sea aislante perfecto, es decir μ y ε son constantes y la conductividad σ nula. En este medio no existen ni cargas libres ($\rho_v = 0$) ni corrientes de conducción ($J = 0$) y por tanto las Ecuaciones de Maxwell toman la forma:

Forma integral
$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$
$\oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{d\,t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$
$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\varepsilon\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$

A partir de las expresiones anteriores se pueden obtener ecuaciones diferenciales de segundo orden o ecuaciones de onda del campo eléctrico $\vec{E}$ y del campo magnético $\vec{B}$.

De acuerdo con las referidas ecuaciones de onda el campo electromagnético se propaga con una velocidad:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$$

En el caso de que el medio de propagación sea el vacío la velocidad anterior coincide con la de la luz:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

5.1. Ondas electromagnéticas planas

En el caso de ondas planas con propagación en una sola dirección (el eje *X*) las ecuaciones de onda (medio vacío) serán:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Se puede comprobar fácilmente que ambas ecuaciones de onda admiten como solución particular,

$$E_x = 0 \qquad E_y = E \qquad E_z = 0$$

$$B_x = 0 \qquad B_y = 0 \qquad B_z = B$$

siendo *E* y *B* funciones de *x* y *t.*

$$E = E\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$B = B\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

y si las ondas son armónicas:

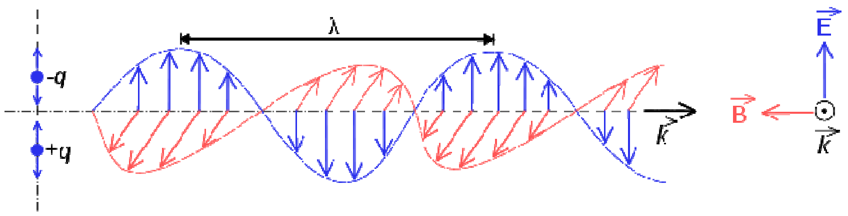
$$E = E_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = E_0 \operatorname{sen}\left(\omega t - kx\right)$$

$$B = B_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = B_0 \operatorname{sen}\left(\omega t - kx\right)$$

Siendo T el periodo, ν la frecuencia lineal (ν=1/T), λ la longitud de onda, ω la frecuencia angular (ω=2π/T=2$\pi\nu$) y k el número de onda (k= 2π/λ).

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \\ E_z = 0 \end{cases} \qquad \vec{B}\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = B_0 sen(\omega t - kx) \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores representan una onda plana polarizada linealmente, con un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$ oscilando en direcciones perpendiculares entre si y perpendiculares a la dirección de propagación.



(Fig. Wikipedia)

Las amplitudes E_0 y B_0 no son independientes, están relacionadas por la expresión:

$$E_0 = c\, B_0 \ .$$

Esta relación entre las amplitudes significa que para valores instantáneos también se cumple que:

$$E = c\, B$$

Ecuación que pone de manifiesto que *los campos eléctrico y magnético están en fase*, es decir que toman valores extremos y nulos al mismo tiempo.

Otra solución de la ecuación de ondas es aquella en la cual los campos eléctrico y magnético tienen una magnitud constante pero rotan alrededor de la dirección de propagación, dando como resultado una onda polarizada circularmente. Las componentes de los campos eléctrico y magnético según dos ejes perpendiculares se expresan entonces por

$$E_x = 0 \qquad E_y = \operatorname{sen}(\omega t - \mathrm{k}x) \qquad E_z = \pm\cos(\omega t - kx)$$

$$B_x = 0 \qquad B_y = \pm B_0 \cos(\omega t - \kappa x) \qquad B_z = B_0 \operatorname{sen}\left(kx - \omega t\right)$$

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \\ E_z = \pm E_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases} \qquad \vec{B}\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \pm B_0 \cos(\omega t - kx) \\ B_z = B_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{cases}$$

que corresponden a un desfase de $\pm\frac{\pi}{2}$ entre las componentes de cada campo, siendo el campo magnético perpendicular al campo eléctrico en cada instante. Si las amplitudes de las dos ondas componentes ortogonales de cada campo son distintas se obtiene la polarización elíptica.

Existen además otras soluciones de de las ecuaciones de Maxwell que son ondas planas pero que no corresponden a un estado de polarización definido.

Como conclusión podemos afirmar que las soluciones en forma de onda plana que hemos obtenido son completamente generales, y que, *las ondas electromagnéticas planas son transversales, con los campos eléctrico* $\vec{E}$ *y magnético* $\vec{B}$ *perpendiculares entre si y a la dirección de propagación*.

6. Densidad de energía del campo electromagnético

La densidad de energía del campo electromagnético viene expresada para el caso del vacío por:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Utilizando las ecuaciones: $E = c\,B$ y $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$

se comprueba que: $\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{\mu_0}B^2$

resultando que la mitad de la energía es eléctrica y la mitad magnética.

Teniendo en cuenta las relaciones: $\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E}$ y $\vec{B} = \mu_0\,\vec{H}$
La densidad de energía del campo electromagnético se puede escribir de la forma

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

que es la expresión mas general de la energía del campo electromagnético.

La energía de un campo electromagnético estático (esto es, un campo que no varía con el tiempo) permanece evidentemente constante. Sin embargo, cuando el campo electromagnético depende del tiempo, la energía electromagnética también depende del tiempo en cada punto. Las variaciones de un campo electromagnético en el tiempo dan lugar, como hemos visto a ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío con la velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \, \mu_0}} = 3 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

Podemos decir que la onda lleva la energía del campo electromagnético. Esta energía transportada por una onda se denomina a veces radiación electromagnética.

Como una carga en reposo respecto de un observador produce un campo estático, la carga no irradia energía electromagnética. Se puede demostrar también que una carga en movimiento rectilíneo y uniforme no irradia energía electromagnética porque la energía total de un campo electromagnético estático permanece constante. Cuando una carga está en movimiento acelerado se presenta una situación totalmente diferente.

*La energía total del campo electromagnético de una carga aceler*ada varía con el tiempo. Por lo tanto una carga acelerada irradia energía electromagnética.

Problema 1

El vector campo eléctrico en una onda electromagnética plana viene dado por:

$E_x = 0$; $E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$; $E_z = 0$

a) Comprobar por sustitución directa que cumple la ecuación de onda:
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

b) Utilizar los valores de $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, N/A^2$ y $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, C^2/N$ para calcular c y comprobar que es aproximadamente $3{\cdot}10^8$ m/s.

---

a)

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$
$$E_z = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \end{aligned}\right\}(1) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -E_0 k \cos(\omega t - kx) \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= -E_0 k^2 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= E_0 \omega \cos(\omega t - kx) \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= -E_0 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \end{aligned}\right\}(3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -E_0 k^2 \operatorname{sen}(\omega t - kx) = -\frac{\omega^2}{c^2} E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} E_0 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}} \qquad c.q.d.$$

b)

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \mathrm{N/A^2}$$
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\, \mathrm{C^2/N\,m^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8,85 \cdot 10^{-12})(4\pi \cdot 10^{-7})}} \Rightarrow \boxed{c = 2,99 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s} \approx 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}} \quad c.q.d.$$

Problema 2

Una onda electromagnética se propaga en un medio transparente y su campo eléctrico $\vec{E}$ en unidades (S.I.) está dado por:

$$E_x = 0\,;\; E_y = 30\,\text{sen}\left[2\pi\left(5\cdot10^4 t - \frac{x}{4\cdot10^{-7}}\right)\right];\; E_z = 0$$

a) Determinar la frecuencia, periodo y fase inicial del campo $\vec{E}$:

b) Calcular el valor de la longitud de la onda en el medio, el índice de refracción del medio para esa frecuencia y el valor de la longitud de onda de la citada onda electromagnética en el vacío. Indicar el estado de polarización de la onda electromagnética.

c) Escribir la expresión del campo magnético B asociado con el campo eléctrico de la onda electromagnética en el vacío.

Dato: $c = 3\cdot10^8\, m/s$

---

a)

$E_x = 0$

$$E_y = 30\,\text{sen}\left[2\pi\left(5\cdot10^4 t - \frac{x}{4\cdot10^{-7}}\right)\right]$$

$E_z = 0$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\cdot10^{14}(2\pi)}{2\pi} \Rightarrow \boxed{\nu = 5\cdot10^{14}\,\text{Hz}} \quad T = \frac{1}{\nu} \quad\Rightarrow\quad \boxed{T = 2\cdot10^{-15}\,\text{s}}$$

$$\boxed{\varphi = 0}$$

b)

-Velocidad de propagación:

$$\lambda = v\cdot T \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{4\cdot10^{-7}}{2\cdot10^{-15}} \Rightarrow \boxed{v = 2\cdot10^8\,\text{m/s}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi\dfrac{1}{4\cdot10^{-7}}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 4\cdot10^{-7}\,\text{m}}$$

-Índice de refracción del medio:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot10^8}{2\cdot10^8} \Rightarrow \boxed{n = 1{,}5}$$

-Longitud de onda en el vacío:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot10^8}{5\cdot10^{14}} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 6\cdot10^{-7}\,\text{m} = 600\,\text{nm}}$$

c)

$$E_0 = cB_0 \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{30}{3\cdot10^8} = 10^{-7}\,\text{T}$$

$$\boxed{\vec{B}\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = 10^{-7}\,\text{sen}\left[2\pi\left(5\cdot10^4 t - \dfrac{1}{4\cdot10^{-7}}x\right)\right]\end{cases}}$$

Problema 3

I)

Una onda electromagnética se propaga en el vacío y su campo eléctrico $\vec{E}$ (en unidades del S.I.) está dado por la siguiente expresión:

$$E_x = 0\,;\ E_y = 50\,\text{sen}\left[2\pi\left(6\cdot 10^{14}t - 2\cdot 10^{6}x\right)\right];\ E_z = 0$$

a) Calcular la frecuencia, el periodo, la longitud de onda, fase inicial del campo E.
b) Indicar el estado de polarización de la onda electromagnética y su dirección de propagación.
c) Escribir la expresión del campo $\vec{B}$ asociado con el campo eléctrico de la onda electromagnética en el vacío.
d) Representar gráficamente la onda electromagnética.

II)
Otra onda electromagnética armónica de igual frecuencia que la onda anterior se propaga en el vacío y su campo magnético B en unidades (S.I.) viene dado por:

$$B = 3\cdot 10^{-1}\cos(\omega t - kx)\vec{j}$$

Determinar:

e) La dirección de propagación de la onda electromagnética.
f) Los valores de ω y k.
g) La expresión del campo eléctrico E asociado con el campo magnético.

Dato: $c = 3\cdot 10^{8}\,\text{m/s}$

I)

a)

$$E_x = 0$$

$$E_y = 50\,\text{sen}\left[2\pi\left(6\cdot 10^{14}t - 2\cdot 10^{6}x\right)\right]$$

$$E_z = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6\cdot 10^{14}(2\pi)} \Rightarrow \boxed{T = 1,66\cdot 10^{-15}\,\text{s}}$$

$$\boxed{\nu = 6\cdot 10^{14}\,\text{Hz}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\cdot 10^{6}(2\pi)} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5\cdot 10^{-7}\,\text{m} = 500\,\text{nm}}$$

$$\boxed{\varphi_0 = 0}$$

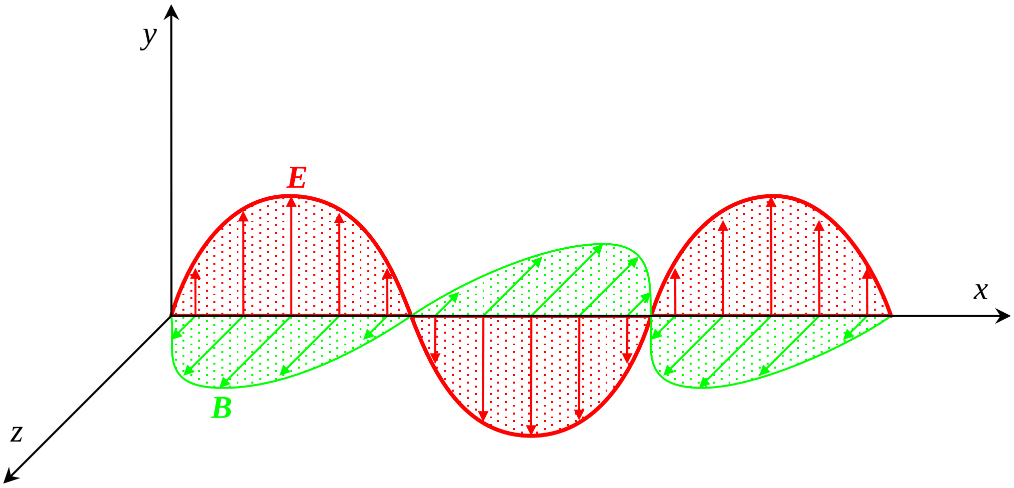
b)
El estado de polarización de la onda es lineal y la dirección de propagación es el eje X en sentido positivo.

c)

$$E_0 = cB_0 \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{50\ \mathrm{N\ C^{-1}}}{3{\cdot}10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}} = 1{,}66{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{T}$$

$$\boxed{\vec{B}\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = 1.66{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{sen}\left[2\pi\left(6{\cdot}10^{14}t - 2{\cdot}10^{6}y\right)\right] \end{cases}}$$

d)



II)

e)

La dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ será el eje Z.

f)

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = 2\pi\ 6{\cdot}10^{14}\ \mathrm{rad/s} \\ k = 2\pi\ 2{\cdot}10^{6}\ \mathrm{rad/m} \end{array}}$$

g)

$$E_0 = cB_0 = (3{\cdot}10^8)(3{\cdot}10^{-1}) = 9\cdot10^7\ \mathrm{V/m}$$

$$\boxed{\vec{E}\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = 9\cdot10^{7}\ \mathrm{sen}\left[2\pi\left(6{\cdot}10^{14}t - 2{\cdot}10^{6}y + \pi\right)\right] \end{cases}}$$

Problema 4

Una onda electromagnética armónica de frecuencia $6 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ (luz verde) y amplitud de campo eléctrico $30\sqrt{2}\ \text{V/m}$, se propaga en el vacío según el eje X en sentido positivo. Hallar las expresiones matemáticas de $\vec{E}$ en los dos casos siguientes:

a) La onda está polarizada en el plano XY.

b) La onda está circularmente polarizada.

---

a)

$\nu = 6 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$

$E_0 = 30\sqrt{2}\ \text{V / m}$

eje X (+)

$\omega = 2\pi\nu = 12\pi \cdot 10^{14}\,\text{rad / s}$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\,\text{m s}^{-1}}{6 \cdot 10^{14}\ \text{s}^{-1}} \Rightarrow \lambda = 5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{5 \cdot 10^{-7}}\,\text{rad / m}$$

$$\boxed{E \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 30\sqrt{2}\,\text{sen}\left[2\pi\left(6 \cdot 10^{14}\,t - \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-7}}\,x\right)\right] \\ E_z = 0 \end{cases}}$$

b)

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2 = E_0\left[sen^2(\omega t - kx) + \cos^2(\omega t - kx)\right]$$

$$E \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \text{sen}\left(\omega t - kx\right) \\ E_z = E_0 \cos\left(\omega t - kx\right) = E_0 \cos\left(\omega t - kx + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{E \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 30\sqrt{2}\ \text{sen}\left[2\pi\left(6 \cdot 10^{14}\,t - \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-7}}\,x\right)\right] \\ E_z = 30\sqrt{2}\ \text{sen}\left[2\pi\left(6 \cdot 10^{14}\,t - \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-7}}\,x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] \end{cases}}$$