Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)

Unidad 11: Interacción gravitatoria

Universidad Politécnica de Madrid

6 de marzo de 2010

Unidad 11: Interacción gravitatoria

Curso de Física OCW-UPM *Prof. Dr. Álvaro G. Vitores González (2009)*

Motivación:

- El descubrimiento empírico de las *Leyes del movimiento planetario de Kepler* permitió la obtención de una de las leyes más fundamentales de la naturaleza, la *Ley de Gravitación Universal de Newton*, lo cual da idea de la trascendencia histórica del proceso ligado a ambas.

- El desarrollo del tema puede representar para el alumno uno de los mejores ejemplos de conexión entre empirismo y teoría.

- Abordar este tema permite una gran ocasión para que el alumno pueda participar, de modo directo y sencillo, en la obtención de una de las leyes más importantes de la Física.

- El estudio y desarrollo del tema permite introducir numerosos conceptos físicos en los que se revela muy claramente la utilidad y aplicación de los mismos (fuerza central, momento de una fuerza, momento cinético y su conservación, conexión Geometría-Física, energías cinética y potencial, conservación de la energía total, etc.).

Objetivos:

Esta unidad se dedica fundamentalmente al estudio de la gravitación universal. Si bien este aspecto puede estudiarse como secciones particulares de otros temas —en el estudio de la conservación del momento cinético y de la conservación de la energía total mecánica—, dada la importancia histórica y científica del mismo, se ha pretendido concederle el honor de ser un tema propio. Para ello, se hace una presentación de las tres leyes de Kepler del movimiento planetario y, a partir de ellas, se llega a la ley de gravitación universal de Newton, insistiendo en la trascendencia histórica de tales logros.

Con este tema se pretender cubrir los siguientes objetivos:

- Conocer el significado de las tres leyes de Kepler del movimiento planetario y de la ley de gravitación universal, así como la trascendencia histórica y científica de todas ellas.

- Estudiar el caso de la fuerza gravitatoria como caso especialmente importante de las fuerzas centrales.

- Conocer la naturaleza de las fuerzas conservativas y aplicar la conservación de la energía al estudio de las órbitas de planetas y satélites.

Desarrollo:

A partir del análisis de los datos astronómicos del danés ***Tycho Brahe*** (1546 - 1601), el alemán ***Johannes Kepler*** (1571 - 1630) estableció sus tres leyes del movimiento planetario que constituyen una descripción *cinemática* del mismo. Kepler no pudo, sin embargo, averiguar la causa física —*dinámica*— de tales resultados. Fue a partir de estas tres leyes del movimiento planetario (**3LMP**) de Kepler como el inglés ***Isaac Newton*** (1643 - 1727) pudo deducir su Ley de Gravitación Universal (**LGU**).

Pues bien, introducido el problema en su desarrollo histórico, procederemos primero a presentar las 3LMP de Kepler y a analizar sus consecuencias y aplicaciones; después, obtendremos la LGU a partir de las 3LMP y analizaremos la importancia de dicha ley fundamental. A continuación, tras introducir la propiedad de conservatividad que cumplen algunas fuerzas, aprovecharemos el carácter conservativo de la fuerza gravitatoria para aplicarlo, mediante consideraciones energéticas, a las órbitas de naves espaciales.

1. Leyes de Kepler del movimiento planetario.

Cuando, desde los inicios de la humanidad, los primeros homínidos contemplaron cómo las estrellas parecían girar en el cielo a lo largo de la noche, se asumió como obvio que era el cielo, como una gran esfera, el que rotaba alrededor de nosotros. Con ello, en los primeros modelos del Universo, la Tierra estaba en el centro y todos los astros, incluido el Sol (cuya posición de salida y ocaso parecía además desplazarse a lo largo del año en el cielo), giraban a su alrededor (***modelo geocéntrico***).

Si bien el modelo planetario geocéntrico propuesto en el s. II por el astrónomo greco-egipcio Claudio Ptolomeo en su *"Colección Matemática"* —luego conocida como *"Almagesto"*— era capaz de predecir las posiciones de los planetas con la suficiente precisión para los astrónomos del s. XVI, requería para ello de la complejidad geométrica de tener que recurrir a epiciclos, esto es, cada planeta realizaría una trayectoria circular alrededor de un centro que, a su vez, se desplazaría sobre otra circunferencia centrada en la Tierra.

Junto a dicha complejidad, se fueron añadieron otros obstáculos a la teoría ptolemaica: por un lado, parecía inverosímil que toda la gigantesca esfera celeste girara alrededor de la pequeña Tierra, cuando sería más lógico lo contrario; y, por otro, los dos descubrimientos del italiano ***Galileo Galilei*** (1564 - 1642), uno el de las fases de Venus (inexplicables si Venus giraba alrededor de la Tierra) y el otro, el de que había astros (lunas) girando alrededor de Júpiter (como un sistema solar en miniatura, lo que confirmaba la realidad de que había pues objetos de movimientos no geocéntricos). Todo esto hizo replantearse otro modelo en que todos los planetas, incluso el nuestro, giraran alrededor del Sol, que ocuparía el centro del Universo (***modelo heliocéntrico***).

Por todo ello, el antiguo modelo geocéntrico fue puesto definitivamente en entredicho en el s. XVI con la llegada de la teoría heliocéntrica del astrónomo polaco ***Nicolás Copérnico*** (1473 - 1543) en 1543. En realidad, el propio Ptolomeo había llegado a considerar un modelo heliocéntrico, pero lo descartó finalmente debido a que la idea del movimiento violento de la Tierra parecía contraria a la observación (todavía hoy conservamos parte de esta reminiscencia intuitiva al afirmar que es el Sol el que "se mueve", "sale" y "se pone" en el cielo al desplazarse alrededor de la Tierra).

Pero el modelo copernicano resultó censurado por la Iglesia ya que, en él, la Tierra quedaba relegada a la categoría de un planeta circunsolar más, en lugar de seguir siendo considerada como el centro del Universo. Así, el texto copernicano *"De Revolutionibus"*, publicado en 1543, permaneció en la lista eclesiástica de libros prohibidos desde 1616 hasta 1835, si bien sabemos que la labor de los censores resultó insuficiente, ya que en el mismo s. XVI existían muchas copias sin corregir. También es cierto que para evitarse problemas, los editores, probablemente sin el conocimiento el propio Copérnico, añadieron un prefacio en que se afirmaba que la obra era un mero ejercicio matemático más que una descripción de la realidad.

Sería en los s. XVI y XVII cuando se librara la lucha vital entre ambos modelos planetarios. Así, en 1600, el italiano ***Giordano Bruno*** (1548 - 1600) fue quemado vivo en la hoguera por su defensa de la teoría copernicana y por la amenaza que suponía su gran poder personal de comunicación; en 1610, el descubrimiento de Galileo Galilei de cuatro satélites alrededor de Júpiter, publicado en su obra *"Sidereus Nuncius"* (de la que Kepler recibió un ejemplar enviado por el propio Galileo) contribuía a demostrar que no todos los astros giraban en torno a la Tierra; y en 1633, el propio Galileo fue obligado a retractarse y abjurar de sus ideas heliocéntricas, siendo finalmente confinado en su villa en lo que hoy llamaríamos arresto domiciliario. Debe decirse que, como ya entendió el propio Galileo, Copérnico no había sido el inventor, sino el restaurador y confirmador de una hipótesis heliocéntrica que ya había sido ideada por el griego ***Aristarco de Samos*** (hacia 310 a.C. - hacia 230 a.C.) unos 1800 años antes.

Pero fue el alemán Johannes Kepler el verdadero punto culminante y definitivo de la victoria heliocéntrica. Así, dominado por su obsesión de conocer a Dios, y basándose en la idea de que el conjunto de la creación no era más que una expresión de las armonías presentes en la mente del Creador, en medio de una de sus aburridas clases (en su segundo año como profesor ya no le quedaba ningún alumno), le vino a la mente que la relación entre el número de sólidos pitagóricos regulares y el número de planetas conocidos sería obra del Gran Geómetra, Dios. Según su visión, expresada junto a su defensa heliocéntrica en su obra *"Mysterium Cosmographicum"* (1595), los cinco sólidos regulares (tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro) sostendrían, intercaladas entre ellos, las seis esferas de movimiento de los planetas entonces conocidos (las distancias relativas entre los seis planetas conocidos se correspondían, dentro de la precisión de la época, con las proporciones entre los radios de las seis esferas concéntricas que pueden construirse inscritas y circunscritas a los cinco sólidos regulares).

Pero al construir su modelo (al solicitar una ayuda a la investigación para hacer su modelo tridimensional con plata y piedras preciosas, se le aconsejó que lo hiciera primero de papel), las observaciones no encajaban; contactó por ello con el danés Tycho Brahe, el poseedor de los mejores instrumentos astronómicos y, con ello, de las observaciones planetarias más exactas de la época, y acabó visitándole en 1600 en su observatorio, situado cerca de Praga. Pero Kepler, el mejor teórico, y Brahe, el mejor observador, no consiguieron trabajar en perfecta armonía, si bien aquél se convertiría finalmente en el ayudante de observación de éste; así, Kepler no consiguió los datos de Brahe hasta la muerte del danés (un personaje vanidoso y excéntrico que portaba una prótesis nasal de oro y plata al haber perdido la nariz en un duelo estudiantil provocado por una disputa con otro compañero sobre quién era mejor matemático), al que sucedió como matemático imperial en 1601.

Las observaciones de Brahe (quien defendía un modelo mixto en el que el Sol giraba alrededor de la Tierra, pero con el resto de los planetas girando alrededor del Sol), una vez conseguidas por Kepler, seguían sin encajar con su modelo de sólidos pitagóricos con órbitas circulares sobre superficies esféricas imbricadas. El propio Tycho había recomendado a Kepler que estudiara la órbita del planeta Marte en particular, ya que era la más alejada del supuesto movimiento circular.

Puesto que tanto Galileo como Brahe y Copérnico creían en las órbitas planetarias perfectamente circulares, Kepler intentó al principio explicar las observaciones orbitales de Marte en base a una circunferencia; si bien creyó haber ajustado los datos a una circunferencia excéntrica, al comprobar que dos de las observaciones de Brahe se alejaban de ese modelo en sólo 8 minutos de arco (aproximadamente la cuarta parte del ángulo subtendido por el disco de la Luna tal y como lo vemos desde la Tierra), decidió que debía seguir revisando su hipótesis circular.

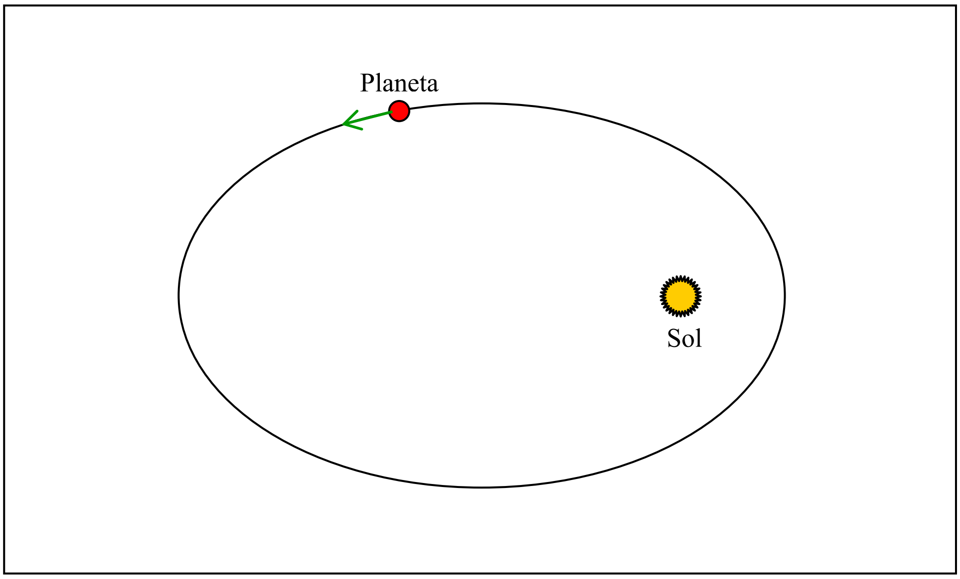
Kepler inaugura aquí una nueva forma de hacer ciencia al pasar de una época en la que la belleza de las teorías se imponía sobre los datos, a otra en la que la confianza en los datos empíricos debe obligar a replantearse las teorías, por muy bellas que sean. Así, en sus nuevos intentos de ajustar las observaciones de Brahe a un tipo geométrico de órbita, Kepler acabó viendo, sin embargo, que éstas parecían ajustar mejor con una línea cerrada ovalada. Probó entonces con varias curvas ovales y, tras cometer algunos errores aritméticos que le apartaron al principio de la solución real, obtuvo la concordancia de los datos con la elipse.

Debe destacarse aquí que si Brahe le hubiera aconsejado a Kepler el estudio de otro planeta, por ejemplo Venus, en vez de Marte, el alemán nunca hubiera encontrado la forma verdadera de las órbitas, dada la baja excentricidad ε de las trayectorias elípticas del resto de planetas conocidos entonces (así $\varepsilon = 0{,}093$ para Marte, pero sólo 0,007 para Venus; aunque $\varepsilon = 0{,}205$ para Mercurio, éste era de difícil observación, dado que su escasa separación angular del Sol dificulta su visión).

Curiosidad. También ligado a la excentricidad, cabe mencionarse que, contra la creencia popular muy extendida, la diferencia de temperatura terrestre entre verano e invierno no se debe a la variación de distancia de la Tierra al Sol (así, para la Tierra $\varepsilon = 0{,}017$, lo cual hace que las variaciones de su distancia al Sol respecto de su valor medio sean sólo del 2%, valor demasiado pequeño para que influya en las estaciones —de hecho, cuando la Tierra está más próxima al Sol es en invierno, el 2 de Enero—), sino que es causada por la inclinación de 23,5º del eje de rotación de la Tierra respecto a la perpendicular al plano de su órbita.

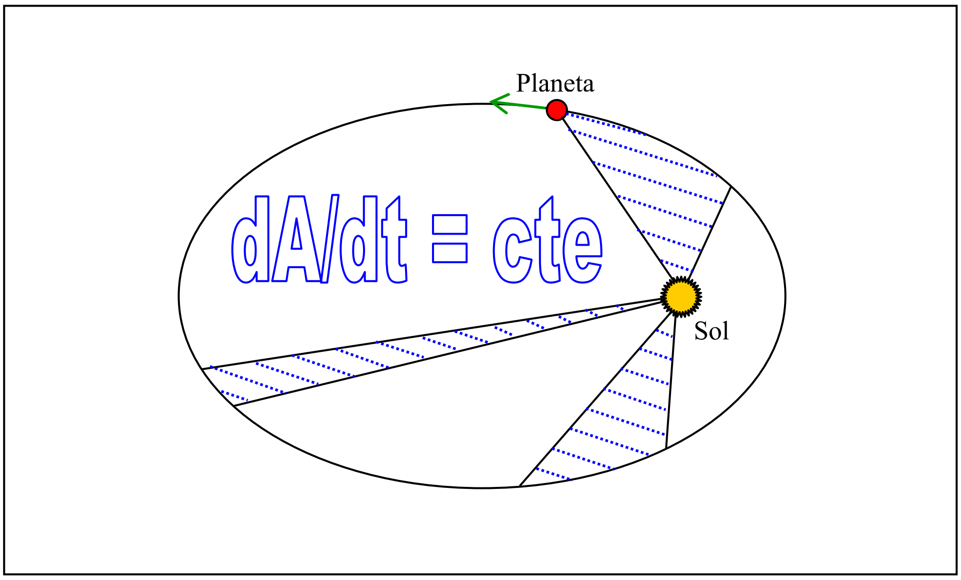
Con todo ello, tras el éxito de su último ajuste de los datos, Kepler consiguió, por fin, enunciar su primera ley planetaria (**LK1**):

"Los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al Sol en uno de sus focos"



Pero para un astrónomo planetario, no basta con conocer la trayectoria de un planeta, sino que es precisa además su descripción cinemática, esto es, conocer la posición del mismo en cada instante. Así, gracias al fechado de las observaciones de Brahe, Kepler descubrió también que los planetas no recorren arcos iguales en tiempos iguales (como harían en un movimiento circular uniforme), sino áreas iguales en tiempos iguales. Este es el contenido de su segunda ley planetaria (**LK2**):

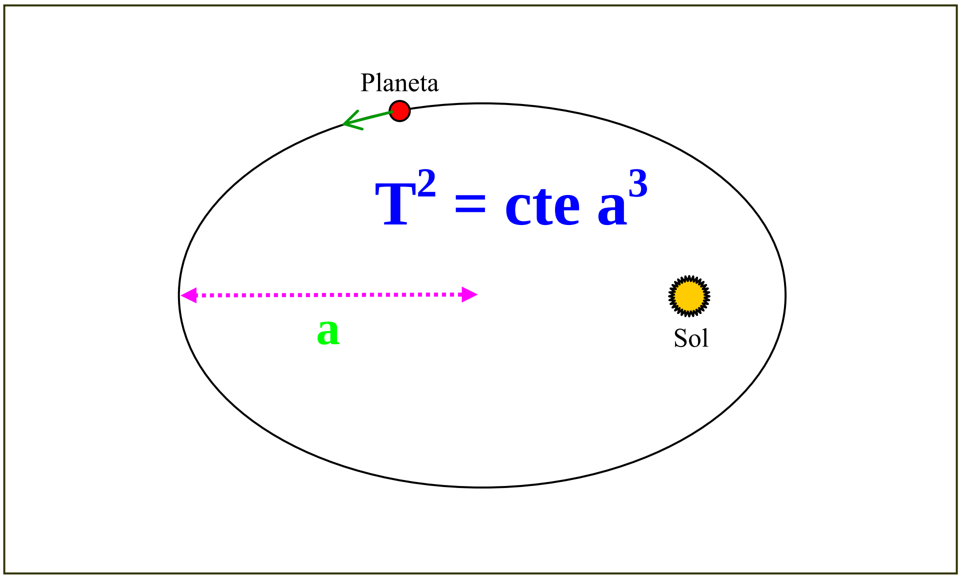
"El radio vector que une el Sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales"



Como consecuencia de ello, cuando el planeta está más cerca del Sol (a la derecha en la figura anterior), debe moverse a mayor velocidad que cuando está más lejos del mismo (a la izquierda en la figura anterior), para conseguir así que, en el mismo tiempo, las dos áreas triangulares barridas sean iguales (velocidad areolar = cte).

Descubiertas ya sus dos primeras leyes, publicadas en su ***"Astronomia Nova"*** (1609), y que hacen referencia al movimiento de cada planeta dado, Kepler investigó una tercera ley que relacionara el movimiento de los distintos planetas. Así, en su obra ***"De Harmonice Mundi"*** (1619), de acuerdo con su idea mística de encontrar una ley armoniosa del mundo que explicara lo observado (armonía en el sentido de relaciones matemáticas —como las de las proporciones en las cuerdas de los instrumentos que generan los sonidos musicales— y que llevaría a los planetas a moverse rítmicamente como si entonaran canciones en homenaje al Dios creador —algo ya propuesto por Pitágoras en el s. VI a.C.—, siendo estas sintonías no audibles por el oído, sino sólo por el intelecto), expresa su tercera ley planetaria (**LK3**):

"Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol"



En esta ley, el período orbital **T** se refiere al tiempo que tarda un planeta en completar su órbita elíptica alrededor del Sol, y la distancia media al Sol (la obtenida al promediar la distancia variable entre el planeta y el Sol a lo largo del tiempo que dura toda la órbita entera) coincide con el semieje mayor **a** de dicha elipse.

Nota importante. Aunque las tres leyes de Kepler fueron por él obtenidas para el movimiento de los planetas alrededor del Sol, con la posterior generalización de Newton, dichas leyes también valen para cualquier movimiento bajo la acción de la gravedad, por ejemplo, también las verifican los satélites (naturales o lunas y los artificiales) orbitando alrededor de un planeta.

Actividad nº 1:

La tercera ley de Kepler puede ser fácilmente comprobable hoy por el alumno, tal y como la estableciera el alemán hace cuatro siglos, sin más que partir de los datos modernos de los seis planetas conocidos en la época de Kepler (expresando las distancias medias, **a,** al Sol en unidades astronómicas —1 U.A. es la distancia media de la Tierra al Sol y equivale a 149,59787 millones de km— y los períodos de revolución, **T,** en años terrestres).

Para ello, en la tabla siguiente, siguiendo el ejemplo del primer planeta, calcule los valores de a^3 y de T^2 y compruebe que la razón T^2/a^3 tiene siempre el mismo valor (aproximadamente 1, en estas unidades) para todos los planteas que aparecen en ella:

Planeta	***a (U.A.)***	***T (años)***	***a^3 (UA^3)***	***T^2 ($años^2$)***	***T^2/a^3 ($años^2/UA^3$)***
Mercurio	0,387	0,241	0,058	0,058	1,000
Venus	0,723	0,615			
Tierra	1,000	1,000			
Marte	1,524	1,881			
Júpiter	5,203	11,862			
Saturno	9,516	29,458			

Soluc.: T^2/a^3 sale aproximadamente 1 en todos los casos.

Al completar esta tabla, se observa entonces que, en efecto, T^2/a^3 = cte, luego $T^2 = K\,a^3$, con la constante K =1 en estas unidades elegidas así para mayor comodidad.

Nota. La ligera desviación respecto al 1 exacto en la razón T^2/a^3 obtenida para los dos últimos planetas de la tabla se debe a que existe una fuerte perturbación entre Júpiter y Saturno que aleja algo el resultado real respecto al ideal que se tendría si cada planeta interaccionara sólo con el Sol y no, además, con otro planeta vecino.

Tras el descubrimiento de las tres leyes de movimiento planetario, Kepler intentó buscar la causa del mismo. Puesto que los planetas se aceleraban al acercarse al Sol y reducían su velocidad al alejarse del mismo (como indica la segunda ley kepleriana), el astrónomo alemán pensó que la causa estaba en la presencia del astro central y, como el magnetismo actuaba a distancia, sugirió que la fuerza magnética sería la verdadera causa del movimiento planetario (no en vano, el inglés Gilbert acababa de descubrir en 1600, en su obra *"De Magnete"*, que la Tierra era un gigantesco imán, intentando quizá justificar las órbitas planetarias mediante una fuerza de atracción magnética).

Lo importante es que, aunque Kepler no acertara al proponer la fuerza magnética como causa real del movimiento planetario, sí introdujo dos novedades importantes en la ciencia:

- Una primera, al plantearse que el movimiento de los planetas podía tener una causa física (una fuerza o ***"vis"*** debida a otro objeto, aunque para él la fuerza producía una velocidad proporcional a ella, en lugar de la fuerza newtoniana, que produce una aceleración proporcional a ella).

- Y una segunda, al proponer que las leyes observadas en la Tierra (para él el magnetismo) eran válidas en los cielos, acabando también con una larga época de explicaciones más místicas que científicas.

No en vano, el famoso astrónomo moderno norteamericano Carl Sagan (1980), recordando que Kepler se vio en la necesidad de hacer predicciones astrológicas para la realeza por razones de subsistencia, se refería a éste diciendo: *"El último astrólogo científico fue el primer astrofísico"*.

Lo cierto es que el gran Kepler murió en 1630 sin conocer la verdadera causa del movimiento planetario, causa que comenzaría a ser vislumbrada por Newton 35 años después cuando éste se planteara la posibilidad de extender la fuerza gravitatoria observada en la superficie terrestre hasta la órbita de la Luna.

Ejemplo nº 1:

Si el radio medio de la órbita de Saturno alrededor del Sol es 9,52 veces el terrestre, calcular el período orbital de dicho planeta expresado en años terrestres.

Según la tercera ley de Kepler,

$$\frac{T_{Sat}^2}{a_{Sat}^3} = \frac{T_{Tier}^2}{a_{Tier}^3} \Rightarrow T_{Sat}^2 = T_{Tier}^2 \left(\frac{a_{Sat}}{a_{Tier}}\right)^3 = 1^2\,(9{,}52)^3 = 862{,}8 \Rightarrow T_{Sat} = 29{,}37\ \text{\textit{años terrestres}}$$

2. Ley de Gravitación Universal de Newton.

Aunque el físico y matemático inglés Isaac Newton —muy reacio siempre a publicar sus resultados (lo cual le creó frecuentes polémicas de autoría de ideas, especialmente con Leibniz)— no diera a conocer su enunciado de la ley de inercia hasta la publicación de sus ***"Principia"*** en 1687 (en parte redactados por la insistencia de Halley ante Newton para que diera a conocer sus logros), lo cierto es que la idea de que la tendencia de un objeto en movimiento a continuar en línea recta si nada influye sobre él (en sus propias palabras: *"Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de* *movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas"*) estaba ya muy arraigada en su mente.

En realidad, esta idea del principio de inercia ya había sido anticipada realmente por el italiano Galileo para un movimiento en plano horizontal en sus famosos "Discorsi" (1638), y por el francés René Descartes en sus "Principia" (1644), e incluso había sido vislumbrada, en parte, ya mucho antes por Juan Filópono de Alejandría (s. VI) y por el árabe Avicena (s. XI), sin olvidar algunos rudimentarios atisbos de dicho principio en la filosofía de los griegos Demócrito (s. V a.C.) y Aristóteles (s. IV a.C.).

Pues bien, en base a esa idea de ley de inercia, Newton comenzó a pensar en 1665 que si la Luna no salía despedida tangencialmente de su órbita circular (su excentricidad es de sólo 0,055) sería debido a la existencia de una fuerza que la empujaba continuamente hacia la Tierra convirtiendo pues su trayectoria en una circunferencia (todavía hoy, en muchos alumnos se observa la dificultad de entender que la Luna, que está en movimiento, no se caiga sobre la Tierra pese a que ésta atrae a aquélla, imputándolo a un falso equilibrio entre la fuerza centrípeta real y una falsa fuerza centrífuga que sólo es fruto de una descripción desde un sistema no inercial, o sea, acelerado).

Newton generalizó el nombre de gravedad a esa fuerza que actuaba a distancias astronómicas. Además, a partir de la tercera Ley de Kepler, dedujo la forma matemática de la ley de gravitación planetaria de cuadrado inverso (aunque en sus Principia Newton no reconoce esta deuda con Kepler, sí se lo confesó a Halley en una carta particular) y demostró que esa fuerza planetaria era la misma fuerza que la que hacía caer una manzana sobre la Tierra (***carácter universal de la Ley***).

Todavía hoy es un problema de investigación vivo llegar a conocer cómo Newton estableció su Ley de Gravitación Universal (LGU). Para el experto newtoniano I. B. Cohen, de la Universidad de Harvard (1981), habría sido el inglés Robert Hooke en 1680 quien habría introducido a Newton en la idea de una fuerza centrípeta en un movimiento circular, frente al concepto conocido por éste de fuerza centrífuga (nombre y concepto introducido por el holandés Huygens y defendido también por Descartes); esta distinción puede parecer poco importante, pero con ello se pasaba a atender al cuerpo central y no al que da vueltas, algo que sería fundamental para el concepto de gravitación.

Hooke pensaba que la fuerza centrípeta dirigida hacia el Sol decrecería con la distancia r al mismo en la forma $1/r^2$ para explicar que la velocidad orbital de un planeta decrece al aumentar la distancia al Sol (como se deduce de la Segunda Ley de Kepler, para que a más distancia el área barrida por el radio vector en el mismo tiempo sea la misma que cuando se encuentra a menos distancia). Pero debido a que la ley de las áreas kepleriana no gozaba por entonces de demasiada aceptación (en parte porque rompía la belleza de una órbita perfecta circular y uniforme), Hooke menospreció la importancia de esta ley, lo cual, unido a su reducida habilidad matemática, hizo que no llegara a lo que sí pudo llegar Newton. Posiblemente pues a sugerencia de Hooke, Newton demostró matemáticamente, por complejos razonamientos geométricos, que un cuerpo bajo una fuerza atractiva en la forma $1/r^2$ describiría una órbita elíptica, y así se lo comunicó a Halley, muy interesado en el conocimiento de la astronomía planetaria (la forma $1/r^2$ de la ley no aparece como concepto explícito en los Principia, sino que

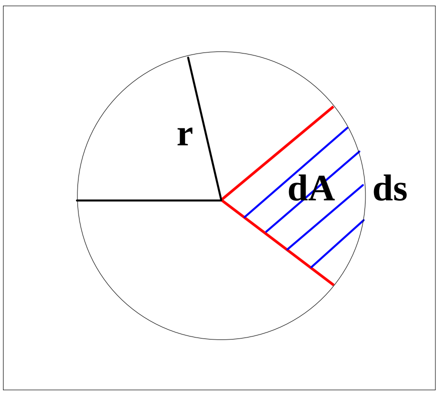
Newton sólo la demuestra matemáticamente, siendo la génesis de la idea más imputable pues a Hooke e incluso más a Gilbert, con contribuciones de Kepler y del napolitano Borelli).

Si bien no se conoce perfectamente el proceso conceptual interno que siguió la mente de Newton para elaborar su teoría de gravitación universal, podría haber sido el siguiente:

i) Partió de un modelo matemático: una masa puntual moviéndose alrededor de un centro de fuerzas, siendo esa fuerza de carácter sólo matemático (no físico, pues Newton repudiaba el concepto de fuerza a distancia). Dado que el 99,86% de la masa total del Sistema Solar se encuentra en el Sol, y sólo el 0,135% en los planetas, el 0,00004% en los satélites y el resto en cometas, asteroides, meteoritos y medio interplanetario, el sistema planetario sí puede estudiarse por tanto como un conjunto de masas puntuales planetarias girando en torno a un foco central masivo. Por ello, el Sistema Solar resulta ser el mejor laboratorio para estudiar la gravitación universal, lejos de perturbaciones externas apreciables que puedan enmascarar la realidad física.

ii) Desarrolló su modelo matemático: partió para ello de su conocimiento de las tres leyes de Kepler y las fue aplicando (en todo lo que sigue utilizaremos, por sencillez, deducciones físicas, en lugar de los complejos razonamientos geométricos seguidos por Newton en sus Principia; la dinámica newtoniana no pasaría de su elaboración geométrica inicial hasta su tratamiento analítico moderno, mediante ecuaciones diferenciales, con el trabajo de Euler en 1736).

La LK1 afirma que las órbitas planetarias son elípticas; dado que su excentricidad es muy baja podemos, por sencillez expositiva, partir de que son aproximadamente circulares, es decir con la distancia planeta-Sol r = cte (para la órbita de la Tierra, los radios máximo y mínimo difieren en sólo un 1,7% respecto a su valor medio, e incluso para la excéntrica órbita de Marte esta diferencia es sólo del 9%). Como además la LK2 afirma que el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (dA/dt = cte), entonces considerando el área del triángulo dA como (base ds x altura r)/2 se tiene:



$$\frac{dA}{dt} = cte \Rightarrow \frac{rds/2}{dt} = cte \Rightarrow \frac{1}{2} rv = cte$$

y como $r = cte$, entonces $v = cte$

luego el movimiento será *circular uniforme*, con lo que la fuerza sólo podrá ser radial *centrípeta*.

Es decir, el simple uso de la LK1 con la LK2 permite saber que la fuerza causante es centrípeta, de modo que, usando la segunda ley de Newton para la masa *m* del planeta y el concepto de velocidad uniforme = espacio de una órbita circular/ tiempo de la órbita o período *T* se tiene que:

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\,(2\pi\, r\,/\,T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \tag{1}$$

y, si se introduce ahora la LK3 (T^2 = cte r^3) en el denominador, queda finalmente que la fuerza sobre el planeta es:

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{cte\, r^3} = \frac{km}{r^2} \tag{2}$$

En suma, usar la LK2 permite postular una fuerza centrípeta, y la LK3 permite además ya medirla bajo la forma $1/r^2$.

iii) Modificó el modelo matemático: cambió el centro de fuerzas de carácter matemático por una masa puntual *M*, la masa del Sol.

iv) Introdujo la fundamental idea de atracción mutua, yendo con ello más allá de la propuesta de Hooke (a partir de la ley de acción-reacción, Newton introdujo que esa interacción no sólo dependía de la masa *m* del planeta, sino también de la masa *M* del foco, el Sol), es decir como la fuerza del foco (S) sobre el planeta (P) de masa m era según (2):

$$F_{SP} = \frac{km}{r^2} \tag{3}$$

de la misma manera, como cualquier fuerza es proporcional a la masa que la sufre, la fuerza del planeta sobre el foco (S) de masa *M* será:

$$F_{PS} = \frac{k'M}{r^2}$$

y, como según la tercera ley de Newton o ley de acción-reacción, F_{SP} = F_{PS}, entonces

$$km = k'M \quad , \quad \frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = cte \equiv G \quad , \quad k = GM$$

(e igualmente, si se hace con otros planetas, se va obteniendo $k/M = k'/m = k''/m' = \ldots = cte$)

que, sustituida, en (3) convierta a ésta en

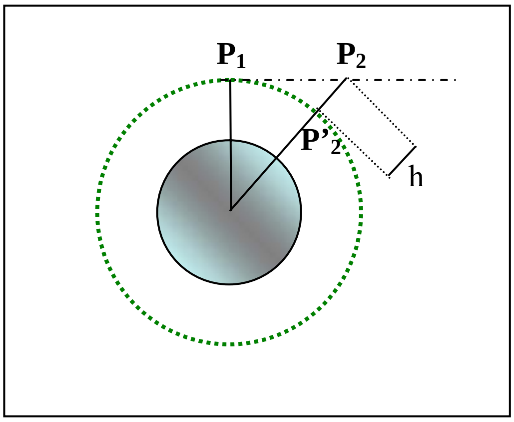
$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}} \qquad (4)$$

que más tarde se convertirá en la conocida como Ley de Gravitación Universal (LGU).

v) Generalizó su resultado asegurando que esa fuerza, así derivada matemáticamente, era la gravitación universal —yendo de nuevo más allá de la idea de Hooke— y comprobó su modelo:

En opinión de algunos investigadores modernos (Cohen, Drake y Herivel), quizá fuera el aspecto de un diagrama de los *"Diálogos"* de Galileo (1630) lo que inspiró a Newton a relacionar la caída de la manzana con la órbita lunar (y por ende con las órbitas planetarias) y llegar finalmente a la LGU.

Así, en la figura siguiente se observa que la Luna, en su órbita alrededor de la Tierra, no se mueve realmente de P_1 a P_2, sino de P_1 a P'_2, es decir como si hubiera caído desde P_2 a P'_2 (aunque pudo inspirar a Newton, realmente la figura de Galileo no tenía nada que ver con la Luna, sino que la había dibujado para explicar por qué un cuerpo pesado en reposo no salía despedido tangencialmente pese a la violenta rotación de la Tierra).



O quizá Newton se inspirara en un pasaje de los *"Diálogos"* de Galileo en el que Salviati se dirige a un anticopernicano: *"Y si él me asegura qué mueve a uno de esos cuerpos móviles (planetas), prometo que yo sabré decirle qué hace* ***mover a la Tierra*** *(alrededor del Sol). Más haré lo mismo si me puede mostrar qué es lo que en la Tierra hace* ***descender a las cosas****"*. Y en la misma línea, en cuanto al concepto de gravedad, sigue expresando Salviati al dirigirse a Simplicio: *"... Pero, en realidad, no sabemos más qué principio o fuerza hace* ***caer a las piedras*** *que lo que sabemos de lo que las hace subir una vez partidas de la mano del lanzador, o qué hace* ***girar a la Luna****..."*.

En suma, para verificar su hipótesis (comprobación del modelo) de universalidad de la gravitación, Newton, tomando la ley de inercia ya conocida por Descartes, razonó que si la Luna no seguía en línea recta era porque alguna fuerza curvaba su trayectoria. Sin recurrir al razonamiento geométrico que él utilizó, podemos atacar el problema más rápidamente de la siguiente manera:

Sabiendo que la distancia de la Luna a la Tierra es r = 3,84 x 10^8 m (medida por el método del ángulo de paralaje desde dos puntos distintos de la Tierra separados por una distancia conocida) y que el período de su órbita alrededor de nuestro planeta es de T = 2,36 x 10^6 s (27,3 días), el valor de la aceleración centrípeta de la Luna en su órbita de radio r será

$$a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2{,}72\times10^{-3}\ m/s^2$$

(luego en 1 s, la Luna "caería", respecto a su tendencia rectilínea, un espacio $h = a_L t^2/2$ = 1,36 mm, utilizando la expresión del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado que había sido ya descubierta por Galileo), de modo que su relación con la aceleración de la gravedad que sufre la manzana en la superficie terrestre (g = 9,81 m/s^2) será

$$\frac{g}{a_L} = 3602 \cong (60)^2$$

y, de acuerdo a su suposición de que la aceleración (como la fuerza) tiene la forma de $1/r^2$, se tiene que la relación entre distancias al centro de la Tierra desde la Luna y desde la manzana situada en la superficie de la Tierra (cuyo radio es R_T = 6,37 x 10^6 m, y que se conocía por el tamaño de las sombras creadas por dos estacas colocadas en dos puntos alejados en la superficie terrestre) será

$$\left(\frac{r}{R_T}\right)^2 = 3602 \cong (60)^2$$

es decir, la plena coincidencia numérica de ambas razones indicaba que la razón entre aceleraciones era inversa a la razón entre los cuadrados de las distancias, tanto en el cielo como en la superficie terrestre —$g/a_L = (r/R_T)^2$, luego $g \propto 1/R_T^2$, $a_L \propto 1/r^2$ y, en general, cualquier aceleración gravitatoria irá como $1/r^2$— de modo que la ley de gravitación adquiere ***carácter universal***. Este fue el gran acierto de Newton: pensar que la fuerza que hacía caer una manzana en la Tierra era la misma que la que hacía caer a la Luna hacia la Tierra, manteniéndola en órbita alrededor de ésta.

Recurriendo a la famosa anécdota de la caída de la manzana desde un árbol (que quizá no fuera más que un ejemplo inventado a posteriori para explicar mejor las ideas de Newton), podríamos decir que ésta cae en 1 s una altura de $s = gt^2/2$ = 4,9 m, mientras que la Luna, al estar 60 veces mas lejos que la manzana del centro de la Tierra (386000 km frente a los 6370 km del radio de la superficie terrestre), debería "caer" en cada segundo, si la ley $1/r^2$ fuera correcta, una distancia de 4,9/(60)^2 = 1,36 mm para seguir una órbita circular, predicción que comprobó a partir del valor de a_L observado (medido a través de r y T). Dicho de otra manera, Newton había demostrado que la Luna se movía como si fuera atraída hacia la Tierra con una fuerza que era 1/3600 de la fuerza de la gravedad con la que nuestro planeta tiraba de los objetos cerca de su superficie. Y puesto que la Luna está 60 veces más lejos del centro de la Tierra que los objetos colocados sobre o cerca de su superficie, el factor 1/3600 concordaba con la deducción de que la gravedad de la Tierra se extiende a la Luna y disminuye con el cuadrado de la distancia.

En resumen, Newton había visto que la "caída hacia la Tierra" (desde P_2 a P'_2) se producía al ritmo que debería esperarse si la gravedad terrestre se extiende desde la superficie de la Tierra hasta alcanzar la Luna, decreciendo como $1/r^2$, y por qué no a *todos* los planetas (***generalización universal***).

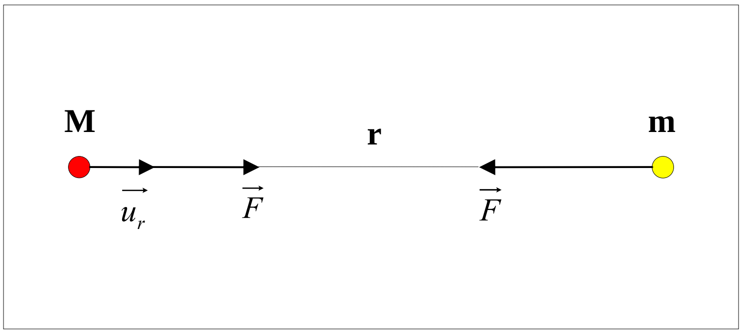
En suma, la LGU adquiere la forma de

$$\boxed{F=\frac{GMm}{r^2}}$$

en el año 1685, si bien se da a conocer con la publicación de los "Principia" en 1687. En forma vectorial, la LGU quedaría

$$\boxed{\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{u_r}} \qquad (5)$$

donde $\vec{u_r}$ representa un vector unitario en la dirección que une los objetos y el signo menos indica que la fuerza gravitatoria sobre un objeto es de sentido atractivo hacia el otro.



El enunciado de dicha LGU expresa pues que:

"La fuerza de atracción entre dos cuerpos de masas M y m es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y actúa a lo largo de la línea que une ambos cuerpos".

Newton procede luego a generalizar su ley de gravitación para todos los cuerpos celestes (idea posiblemente copiada de un texto de Hooke escrito en 1674) e incluso para todos los cuerpos: así en la Proposición IV del Libro III ("Sistema del mundo") expresa que "la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita es, en la misma superficie de la Tierra, igual a la fuerza de la gravedad que observamos aquí en los cuerpos pesados" y, de acuerdo con sus "Reglas para filosofar" sobre lo simple que debe ser la naturaleza y sobre tender a asignar a los mismos efectos las mismas causas, concluye que “la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita es precisamente la misma fuerza que comúnmente llamamos ***gravedad***”.

Esta ley, de carácter fundamental en la teoría de la Mecánica, es pues una ley experimental, en el sentido de que se deduce de las observaciones experimentales de las posiciones planetarias. Debe precisarse además que esta LGU está formulada para cuerpos puntuales puesto que utiliza una distancia r bien determinada. Para el caso de cuerpos homogéneos esféricos (que es, con bastante aproximación, la situación que se da entre planetas y el Sol o entre un planeta y sus lunas), esa distancia r se mide desde los centros de gravedad de las esferas.

Ejemplo nº 2:

¿Con qué fuerza se atraen el Sol y la Tierra?

Según la LGU de Newton, y expresando todo en el S.I. de unidades,

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(2\times10^{30})(6\times10^{24})}{(1{,}5\times10^{11})^2} = 3{,}56\times10^{22}\ N$$

Curiosidad. Una última observación sobre la LGU se refiere a que, de acuerdo con la ley de acción-reacción, la fuerza de atracción gravitatoria es mutua, es decir M atrae a m con la misma fuerza (pero de sentido opuesto) con la que m atrae a M. Debe precisarse que las que son iguales son las fuerzas sobre los objetos, no las aceleraciones de los mismos. Esto puede ilustrarse recurriendo a la anécdota de la caída de la manzana sobre el suelo que pudo hacer pensar a Newton en que la caída de la Luna sobre nuestro planeta podría tener la misma causa que aquélla. Así, dado que, según la LGU, la Tierra T (M_T = 6 x 10^{24} kg) atrae a la manzana M (m_M = 0,2 kg) con la misma fuerza que ésta atrae a aquélla, ¿por qué no vemos que cuando cae una manzana de un árbol la Tierra se eleve hacia el cielo? La razón estriba en que aunque las fuerzas sí son iguales, no lo son sus aceleraciones (g para la manzana y a_T para la Tierra): $F_{TM} = F_{MT} \Rightarrow m_M g = M_T a_T$, luego a_T = 3,27 x 10^{-25} m/s^2, es decir, que en los t = 0,6 s que tarda la manzana en caer al suelo con g = 9,81 m/s^2, la Tierra —acelerada con esa minúscula a_T— sólo ha podido desplazarse un espacio $x = a_T^2/2 \approx 6 \times 10^{-26}$ m, algo totalmente imperceptible.

El valor de la constante G de la LGU no sería determinado hasta un siglo después con el experimento del inglés Cavendish (1798) de la balanza de torsión (mediante la medida del par de giro creado por la atracción gravitatoria de dos masas) con una increíble precisión de sólo un 1% de diferencia respecto al valor más moderno conocido (G = 6,67 x 10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}). Este valor tan pequeño de G hace que, para masas normales y distancias normales, la fuerza de atracción gravitatoria sea tan débil que su valor sea difícil de medir con gran precisión (por ejemplo, entre dos masas de 1 kg separadas 1 m entre sí dicha fuerza es sólo de 6,67 x 10^{-11} N, es decir mil millones de veces menor que el peso de una hormiga; aún así debe tenerse en cuenta que cuando se habla de la debilidad de la gravitación se hace de modo relativo, ya que si bien es cierto que la fuerza gravitatoria entre dos protones es 10^{36} veces menor que su fuerza electrostática, tampoco debe olvidarse que la gravitación es suficiente para que un planeta como Plutón se mantenga atrapado por el Sol, sin poderse escapar de su órbita planetaria elíptica, incluso cuando se encuentra alejado del astro a más de 7000 millones de km).

De hecho, tras más de dos siglos de experimentos, la constante *G* sigue siendo conocida con una imprecisión relativamente alta comparada con la de otras constantes fundamentales. Así, las mejores medidas obtenidas hasta la primera década del s. XXI dan el valor seguro de G = (6,67±0,01) x 10^{-11} Nm^2kg^{-2}, lo cual representa un error relativo del 0,15%, aunque las más recientes determinaciones apuntan a un valor más probable de G = (6,67428±0,00067) x 10^{-11} Nm^2kg^{-2}, lo cual reduciría el error relativo hasta el 0,01%. La necesidad de reducir esta incertidumbre ha provocado que, tan sólo en los últimos setenta y cinco años, se hayan publicado varios centenares artículos sobre el valor de dicha constante; por el momento, los experimentos más precisos siguen estando basados aún en variantes modernas de la balanza de Cavendish o en medidas indirectas a través de la aceleración de caída libre g de objetos en la Tierra.

Como aplicación inmediata e interesante, conocer el valor de *G* permite, por ejemplo, deducir la masa de la Tierra M_T. Así, la segunda ley de Newton para un objeto de masa m que cae cerca de la superficie de la Tierra, $F_{aplicada} = m\, a_{observada}$, quedaría:

$$\frac{GM_T m}{R_T^2} = mg \quad , \quad M_T = \frac{gR_T^2}{G}$$

Actividad nº 2:

A partir de la ecuación anterior, sustituyendo en ella la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre $g = 9{,}81$ m/s^2, el radio de la Tierra $R_T = 6370$ km, y la constante $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}, obtenga el valor de la masa del planeta Tierra M_T. Usando este resultado de la masa de la Tierra, y considerando la forma aproximadamente esférica de la misma, obtenga el valor de la densidad media de nuestro planeta.

Soluc.: $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg; $\rho_T = 5{,}51 \times 10^3$ kg/m^3.

Nota. Con este último resultado para la densidad media del planeta entero, y dado que la densidad media de las rocas en la superficie de la Tierra es sólo de 2,8 x 10^3 kg/m^3, se deduce que el interior de la Tierra debe ser más denso que su superficie, lo cual es comprobable mediante el estudio de la propagación de las ondas sísmicas en los terremotos.

Otra aplicación interesante de la ley de gravitación universal es que permite obtener la forma de la constante de la tercera ley de Kepler que éste no pudo determinar. Así la segunda ley de Newton para una órbita circular uniforme daría:

$$F_{aplicada} = m\, a_{observada} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

y sustituyendo $v = 2\pi r/T$ para una órbita circular uniforme queda

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3$$

con lo que la constante de la tercera ley de Kepler es cte = $4\pi^2/GM$ (siendo M la masa del Sol, si éste es el foco central; pero esta expresión es válida en general, de modo que si se estudia la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, M sería la masa de la Tierra).

En resumen, el método newtoniano consistió pues en aplicar las matemáticas al mundo externo tal como éste se manifiesta por la experiencia y la observación crítica; se trataba de un ir y venir entre un modelo matemático y la realidad física. Finalmente, puesto que esa fuerza matemática de atracción explicaba las observaciones, Newton decidió que dicha fuerza existía de verdad, por lo que empezó a preocuparse por el origen de los efectos de esa gravitación universal. A este respecto, y si bien pensó, entre otras posibilidades, que esta fuerza podía deberse a una especie de corriente de partículas que bombardeaba el objeto (siempre repudió la posibilidad de acción a distancia a través del vacío), acabó permaneciendo fiel a su idea de *"no imaginar hipótesis"*.

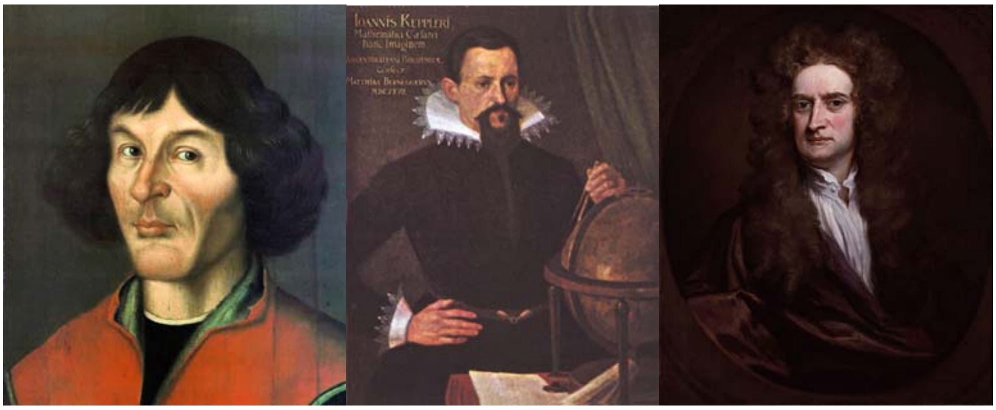
¿Qué avance representa pues Newton respecto a sus predecesores?

- Respecto a Kepler, cumplió el objetivo de éste de desarrollar una teoría física basada en las causas.

- Respecto a Galileo, dado que éste no trató nunca con el concepto de fuerza, sino con el de aceleración, al relacionar Newton aquélla con ésta —a través de su segunda ley— hizo de la aceleración una medida universal de la fuerza.

- Respecto a Hooke, éste había sugerido que la fuerza entre el Sol y los planetas tendría la forma $1/r^2$, pero la teoría de Newton incluye además el efecto de las masas de los cuerpos que se atraen. Y, por otro lado, proponer una ley $1/r^2$ para órbita circular no es lo mismo que llegar a demostrar que dicha ley vale también para las órbitas elípticas (y cónicas en general) en que se cumple la ley de las áreas, algo que sí consiguió Newton.

Finalmente, cabe mencionarse aquí que la confirmación definitiva de la LGU se consiguió con la predicción del retorno del cometa Halley (1758), cuya alargada órbita elíptica —de excentricidad 0,967— se repite cada 76 años (siendo sus pasos más recientes cerca de la Tierra en 1910 y 1986), así como con el descubrimiento del planeta Neptuno (1845) —cuya órbita tiene una excentricidad de 0,0096—, estudiando la perturbación que le provocaba a Urano. La teoría de gravitación universal de Newton sólo sería modificada con la llegada de la teoría de la Relatividad General de Einstein (1916) en la que la fuerza gravitatoria a distancia se sustituye por una curvatura del espacio-tiempo debida a la presencia de masa.



De izquierda a derecha: Copérnico, Kepler y Newton (fotografías de dominio público)

3. Fuerzas centrales. Campos conservativos.

El hecho de que la fuerza gravitatoria sea ***central***, o sea que actúa en la línea que une la distancia r entre las dos masas que interaccionan (apuntando siempre hacia un centro fijo: por ejemplo, sobre un planeta esa fuerza apunta siempre hacia un punto central situado en el Sol), tiene la inmediata consecuencia de que bajo ella ***se conserva el momento cinético***. En efecto, el momento de la fuerza respecto de un punto O vendrá dado por

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\overrightarrow{u_r} = 0$$

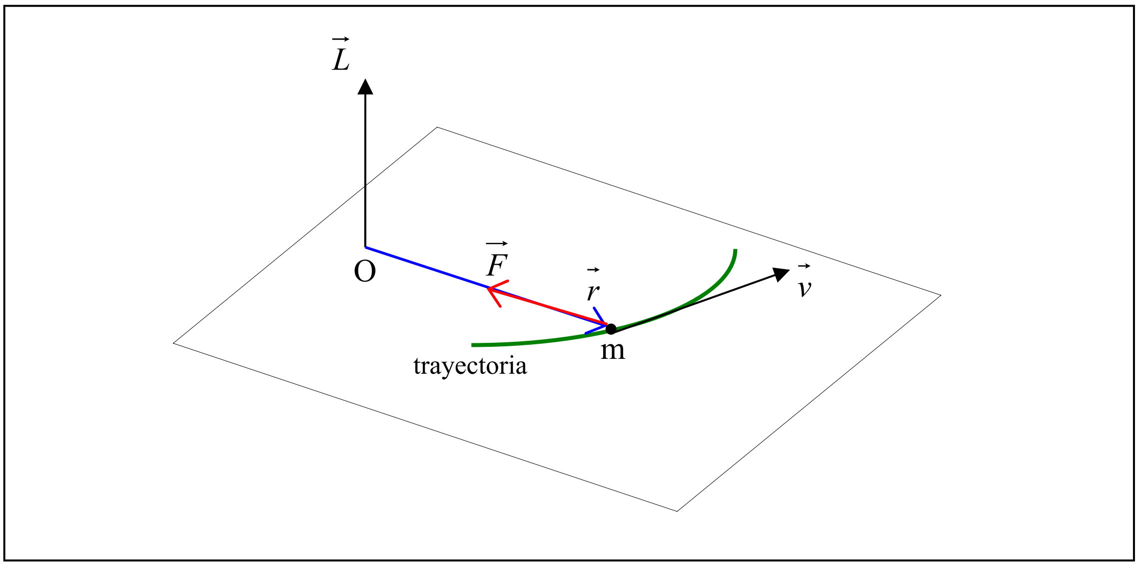
puesto que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos; es decir, como toda fuerza central, la fuerza gravitatoria no produce momento, y como, según el teorema del momento cinético

$$\overrightarrow{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

entonces, el momento cinético es un vector constante:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{cte} \qquad (6)$$

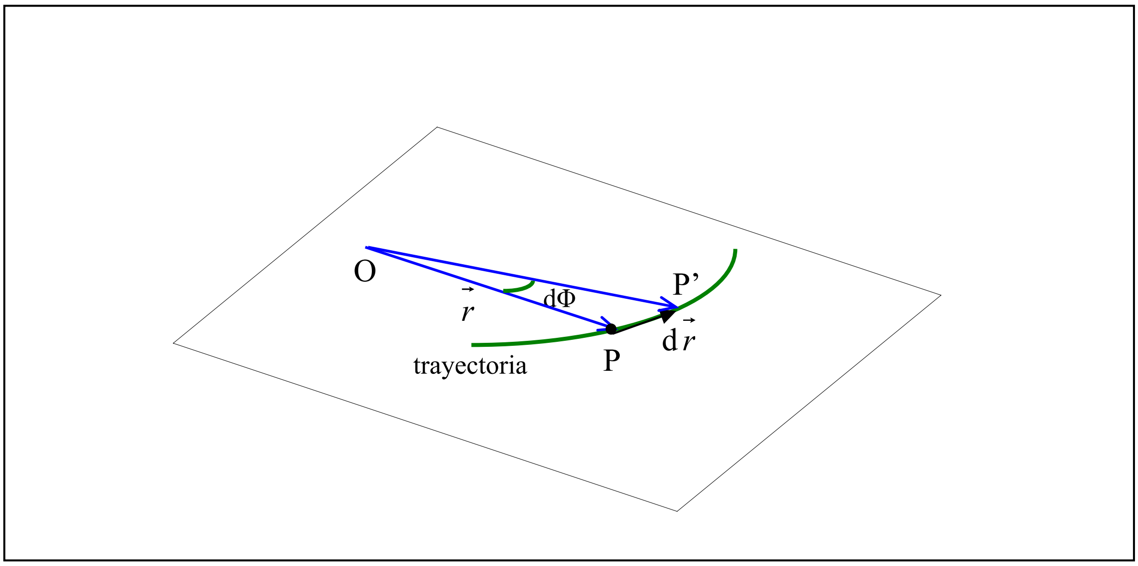
luego como debe ser constante no sólo en módulo, sino como vector con su orientación espacial, entonces, para que apunte siempre hacia el mismo sitio, como $\vec{L}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$ (por definición del producto vectorial), este plano, que es del movimiento, debe también permanecer fijo, lo que significa que la ***trayectoria*** de los objetos sometidos a esa fuerza (planetas, satélites, etc.) será ***plana*** (elipse, parábola o hipérbola para el caso de la gravitación universal).



Este resultado es general en el sentido de que

$$\vec{F}\ central \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

La constancia del momento cinético para una fuerza central (por ejemplo, la gravitatoria) permite incluso obtener de una forma sencilla la segunda ley de Kepler o ley de las áreas. Así, cuando el planeta P se mueve en un tiempo *dt* hasta P', avanzando un arco *dr*, barre un ángulo dΦ, de modo que el área del triángulo barrido OPP' será:



$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\,\right|$$

luego

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\,\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\,\right| = \frac{L}{2m}$$

y como vimos que

$$L = \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = cte$$

queda que

$$\frac{dA}{dt} = cte$$

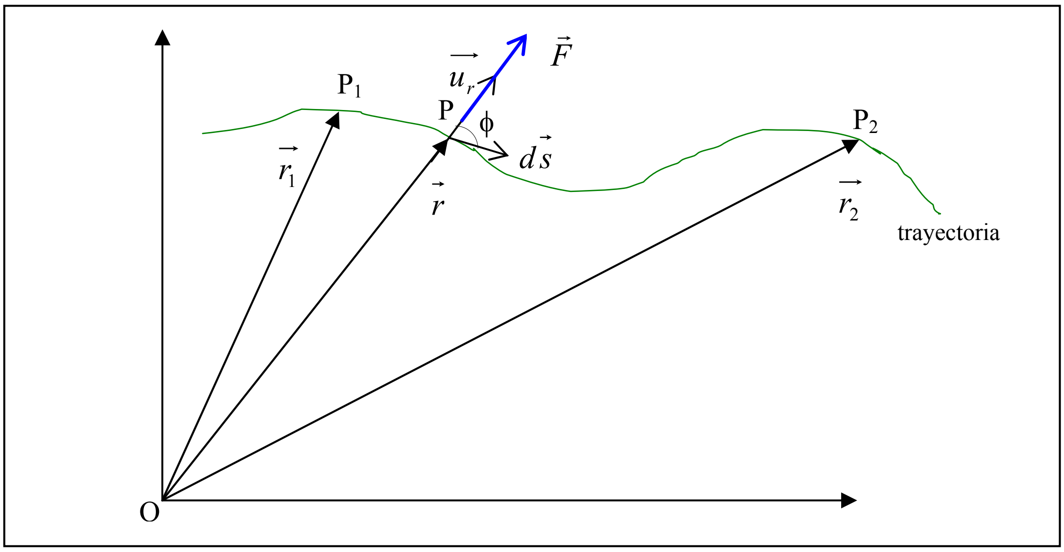
que no es más que la ley de las áreas o segunda ley de Kepler.

Otro aspecto aún más interesante de las fuerzas centrales es que si el módulo de la fuerza, F, depende sólo del módulo de la distancia, *r*, o sea *F = F(r),* es decir, $\vec{F} = F(r)\overrightarrow{u_r}$, entonces la fuerza es llamada conservativa (puesto que, como veremos, ello conlleva que la energía total de la partícula sometida a ella se mantiene siempre constante).

De modo general, se dice que una fuerza es ***conservativa*** si el trabajo realizado por ella, cuando la partícula que la sufre se mueve entre un punto inicial y otro final, se puede expresar como la diferencia de una magnitud escalar, llamada **energía potencial** $\boldsymbol{E_p}$, función sólo de las coordenadas de posición de la partícula, ente el punto inicial y el punto final, es decir:

$$\boxed{W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{s} = E_p(r_1) - E_p(r_2)} \qquad (7)$$

Podemos ver entonces que cualquier fuerza de la forma $\vec{F} = F(r)\overrightarrow{u_r}$ es, en efecto conservativa. Para ello, en la figura siguiente se tiene una fuerza central en la dirección radial OP (no importa si la fuerza va de O a P —repulsiva, como la fuerza entre dos cargas eléctricas del mismo signo— o de P a O —atractiva, como la gravitación o como la fuerza entre dos cargas eléctricas de signo opuesto—, pues en ambos casos es central).



Entonces, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de un trozo diferencial de camino (el concepto de trabajo como producto de fuerza por desplazamiento fue introducido por Poncelet y Coriolis en 1826) será

$$dW = \vec{F}.d\vec{s} = F(r)\vec{u_r}.d\vec{s} = F(r)ds\cos\phi = F(r)dr$$

donde se ha llamado *dr* a la proyección de *ds* sobre la dirección radial. Y entonces, el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos cualesquiera (P_1, P_2) de la trayectoria será:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{s} = \int_1^2 F(r)dr = \varphi(r_2) - \varphi(r_1) = E_p(r_1) - E_p(r_2)$$

donde se ha llamado E_p a la función φ cambiada de signo; de manera que, efectivamente toda fuerza de la forma $\vec{F} = F(r)\vec{u_r}$, como la de gravitación universal (o la de interacción electrostática de Coulomb), es conservativa.

Como consecuencia de ello, el trabajo realizado por cualquier fuerza conservativa entre dos puntos del espacio no depende del camino seguido por la partícula, sino sólo de las posiciones inicial y final de la misma y si la trayectoria es cerrada dicho trabajo será cero (puesto que el punto inicial y final coinciden).

Otra forma equivalente de expresar la ecuación anterior es $Fdr = - dE_p$, puesto que entonces integrándola daría

$$\int_1^2 Fdr = \int_1^2 - dE_p = E_p(r_1) - E_p(r_2)$$

como indicaba la ecuación del trabajo $W_{1\to 2}$, de modo que

$$\boxed{F = -\frac{dE_p}{dr}} \tag{8}$$

y, si dividimos por la masa en ambos lados de la ecuación, queda

$$\frac{F}{m} = -\frac{d(E_p/m)}{dr}$$

y, llamando ***intensidad de campo*** a *E=F/m* y **potencial** a $V=E_p/m$, queda la expresión

$$\boxed{E = -\frac{dV}{dr}} \tag{9}$$

llamándose ***superficies equipotenciales*** a las formadas por la unión de todos los puntos en los que se tiene el mismo valor del potencial, ***V = cte***.

4. Energía potencial gravitatoria.

A partir de la expresión (8), igualándola con la ley de gravitación universal (5), podemos calcular la energía potencial asociada a la fuerza gravitatoria:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{dE_p}{dr}$$

de donde

$$dE_p = \frac{GMm}{r^2}dr$$

luego, integrando, queda

$$E_p = -\frac{GMm}{r} + C$$

y, si se elige el origen de energía potencial en el infinito, o sea E_p (r=∞) =0, la ecuación anterior queda

$$0 = -\frac{GMm}{\infty} + C \Rightarrow C = 0$$

luego, finalmente, la ***energía potencial gravitatoria*** será:

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}} \qquad (10)$$

Nota. La expresión (10) es general para cualquier distancia r (medida desde el foco gravitatorio M hasta el objeto m; por ejemplo, desde el centro del Sol hasta el centro del planeta Tierra). Pero si se trabaja desde la superficie de la Tierra, suele utilizarse la expresión más sencilla $E_p = mgh$, siendo h la altura a la que está el objeto m medida desde el suelo de la Tierra. Para llegar a ello basta igualar la expresión (8) con el peso e integrar:

$$F = -\frac{dE_p}{dr} = -mg \Rightarrow dE_p = mgdr \Rightarrow E_p = mgr + C$$

y, si se elige ahora por comodidad que E_p sea 0 justo en la superficie de la Tierra (la elección del origen o cero de energía potencial es siempre arbitraria), o sea E_p (r=R) =0, la ecuación anterior da

$$0 = mgR + C \Rightarrow C = -mgR$$

luego

$$E_p = mgr - mgR = mg(r - R) = mgh$$

donde *h* es la altura medida desde el suelo (distancia *r* del centro de la Tierra al objeto m menos el radio de la Tierra *R*).

Por otro lado, si se iguala la expresión de la ley de gravitación universal de Newton con la fuerza peso se tiene que:

$$F = -\frac{GMm}{r^2} = -mg \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$

que da la ***aceleración de la gravedad g*** en cualquier punto del espacio a distancia *r* del foco de masa *M* (si en esta ecuación se sustituye *M* por la masa de la Tierra y *r* por el radio de la misma, se obtiene el conocido valor de g = 9,81 m/s^2 para la aceleración de la gravedad en la superficie de nuestro planeta).

5. Conservación de la energía total.

La ***energía total E*** de una partícula *m* (por ejemplo, un planeta) sometida a la interacción gravitatoria con la masa *M* (por ejemplo, el Sol), será la suma de las dos energías que posea dicha masa *m*, es decir la cinética asociada a su velocidad y la potencial (10) asociada a la gravedad, o sea:

$$\boxed{E = E_k + E_p \ = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}} \qquad (11)$$

Veamos ahora que ***cualquier fuerza conservativa conserva la energía total***. Para ello, sabemos que cualquier fuerza (sea o no conservativa) cumple el teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{s} = \int_1^2 Fds\cos\theta = \int_1^2 F_{tg}ds = \int_1^2 ma_{tg}ds = \int_1^2 m\frac{dv}{dt}ds$$

donde se ha llamado F_{tg} a la proyección de *F* sobre la tangente a la trayectoria en cada punto ($F\cos\theta$, siendo θ el ángulo que forman los vectores fuerza y desplazamiento), y como $ds/dt = v$ queda

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

y, definiendo la energía cinética como $E_k = mv^2/2$, queda:

$$W_{1\to 2} = E_{k_2} - E_{k_1}$$

Por tanto, para cualquier fuerza conservativa tenemos dos formas de expresar el trabajo que pueden igualarse entre sí:

$$W_{1\to 2} = E_{p_1} - E_{p_2} = E_{k_2} - E_{k_1}$$

(***atención a los signos***: nótese que en la expresión del trabajo al ir de un punto inicial 1 a otro final 2 en función de la energía potencial aparece la diferencia de ésta entre la posición inicial 1 y final 2, mientras que en función de la energía cinética es al revés, la final 2 menos la inicial 1)

de donde queda que

$$E_{p_1} + E_{k_1} = E_{p_2} + E_{k_2}$$

que expresa que ***la energía total de la partícula m es la misma en cualquier punto del espacio***, es decir $\boldsymbol{E_{total} = cte}$.

Aplicando este resultado a la ecuación (11) de la energía total de una partícula bajo la acción gravitatoria queda que

$$\boxed{E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = cte} \qquad (12)$$

Ejemplo nº 3:

Si se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil con velocidad inicial de 5 km/s desde la superficie de la Tierra, ¿hasta qué altura subirá?

Aplicando la conservación de la energía entre los puntos inicial (lanzamiento) y final (parada momentánea), se tiene

$$\frac{1}{2}mv_{inic}^{\;2} - \frac{GMm}{r_{inic}} = \frac{1}{2}mv_{fin}^{\;2} - \frac{GMm}{r_{fin}}$$

y simplificando m (el resultado no dependerá pues de la masa del proyectil lanzado) y sustituyendo v_{inic} = 5000 m/s, $r_{inic} = R_{Tierra}$ = 6,37 x 10^6 m, v_{fin} = 0 m/s, $M = M_{Tierra}$ = 6 x10^{24} kg y G = 6,67 x 10^{-11} Nm^2kg^{-2}, queda

$$r_{fin} = 7{,}951 \times 10^6 \text{ m}$$

contados desde el centro de la Tierra, es decir el proyectil se parará a una altura

h = 7951 km – 6370 km = 1581 km, contada desde la superficie del planeta

Nota importante. Si se aplicara la ecuación cinemática $v^2_{fin} = v^2_{inic} - 2gh$, con v_{inic} = 5000 m/s, v_{fin} = 0 m/s y g = 9,81 m/s^2, se obtendría h = 1274 km, lo cual es erróneo pues esta ecuación cinemática sólo puede aplicarse muy cerca de la superficie de la Tierra, considerando g constante, circunstancia que no se da en el problema planteado.

6. Velocidad de escape y velocidad orbital.

Como aplicación de la expresión de la energía total bajo campo gravitatorio podemos abordar el concepto de velocidad de escape ligado a la posibilidad de que un objeto lazado con una velocidad inicial y sin propulsión posterior propia pueda escapar de un campo gravitatorio.

Así, se llama ***velocidad de escape*** v_{esc} en un punto P del espacio a la velocidad mínima con la que habría que lanzar un objeto m en presencia de un foco masivo M para que llegue justo al infinito escapando de la atracción de éste.

Esta velocidad se puede obtener rápidamente usando la conservación de la energía (12) entre el punto inicial de lanzamiento P y el punto final en el infinito:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}{}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_{\infty}{}^2 - \frac{GMm}{\infty}$$

y como $v_\infty = 0$ pues se trata de llegar "justo" al infinito, o sea sin velocidad "sobrante", entonces, de la ecuación anterior, queda

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

que no depende de la masa m del objeto a lanzar, sino de la masa del objeto M del que se pretende escapar y de la distancia desde la que se lance m.

Actividad nº 3:

A partir de la ecuación anterior, calcule la velocidad necesaria para que un objeto escape de la atracción de la Tierra (M masa de la Tierra) si se lanza justo desde la superficie de ésta (r radio de la Tierra). Exprese el resultado en el S.I. de unidades y en km/h.

Soluc.: 11209 m/s = 40352 km/h

Nota. Con esta velocidad, el objeto escaparía de la atracción terrestre, pero no de la del Sol.

Como en la ecuación de energías utilizada no aparece para nada el ángulo de lanzamiento, la velocidad de escape es la misma independientemente de si se lanza el objeto m en vertical (con lo que se alejará en vertical hasta pararse en el infinito) o en horizontal (con lo que se alejará haciendo una trayectoria curvada hasta pararse en el infinito).

Así, según la velocidad con la que se lance inicialmente el objeto m en la figura siguiente, se tienen distintas posibilidades en cuanto a la trayectoria que trazará. Usando la expresión de la energía total E en un campo gravitatorio podemos obtener los resultados sobre la forma de la trayectoria; así, teniendo en cuenta que E_k *es siempre positiva*, de la ecuación

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

se tienen las siguientes posibilidades en cuanto al signo de la energía total E:

- $E < 0 \Rightarrow E_k < |E_p|$ siempre, luego como $E_p(\infty) = 0$, quedaría $E_k(\infty) < 0$, lo cual es imposible, o sea, la partícula no puede llegar al infinito, luego su trayectoria se cierra sobre sí misma (**elipse**, siendo la circunferencia un caso particular de excentricidad nula). Es por ello por lo que las órbitas con $E < 0$ se llaman *ligadas*, puesto que, en ellas, la partícula m no puede escapar de la atracción del foco M.

- $E = 0 \Rightarrow E_k = |E_p|$ siempre, luego como $E_p(\infty) = 0$, queda $E_k(\infty) = 0$, o sea, la partícula puede llegar al infinito pero "*justo*" con velocidad nula (**parábola**), lo cual corresponde al caso planteado en la velocidad de escape (por ello, a la velocidad de escape se le llama también velocidad parabólica).

- $E > 0 \Rightarrow E_k > |E_p|$ siempre, luego como $E_p(\infty) = 0$, queda $E_k(\infty) > 0$, o sea, la partícula aún tiene velocidad en el infinito (**hipérbola**).

  Nota: Para la ***repulsión electrostática coulombiana***, como la energía potencial es $E_p = Kqq'/r$, al ser las dos cargas del mismo signo, sólo puede haber $E_p > 0$, luego $E > 0$ y, entonces, sólo pueden darse trayectorias hiperbólicas.

Entonces, de otra manera, podemos decir que según la velocidad v con la que se lance un objeto m desde una distancia r al objeto M del que quiere escapar, se tiene que:

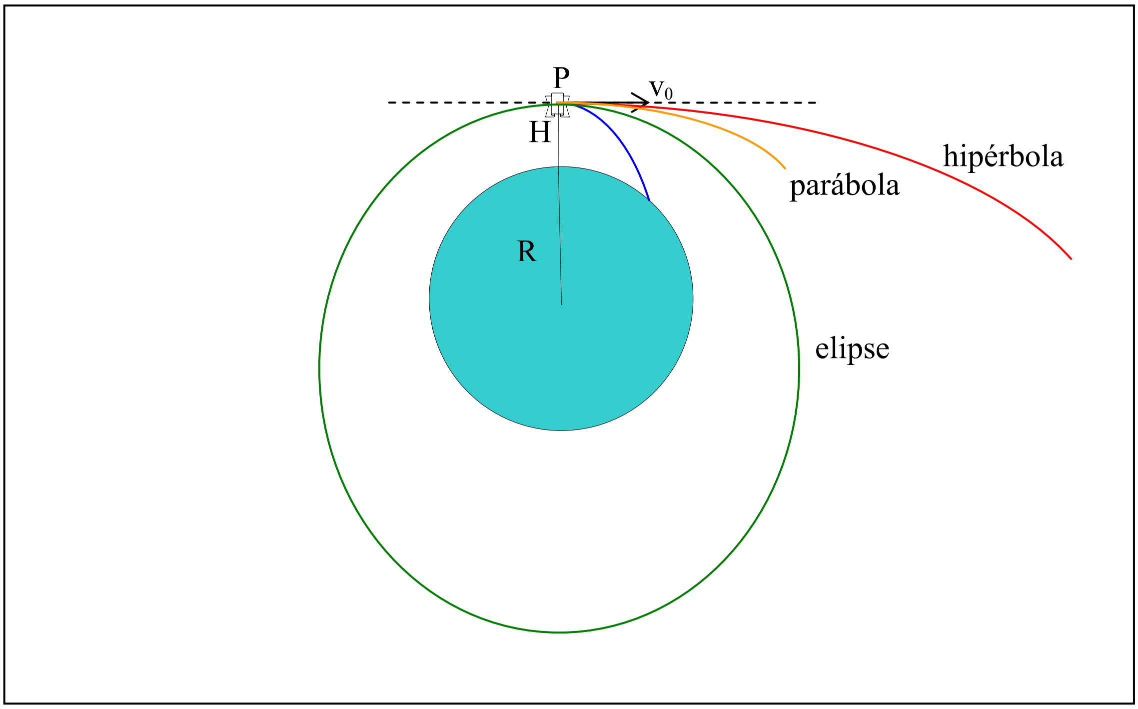
- $v < v_{esc} \Rightarrow$ el objeto m hace una elipse y no escapa de la atracción de M.

(si el objeto m se lanza verticalmente, vuelve a caer verticalmente sobre M; si se lanza inclinado desde una altura respecto de M, el objeto m queda atrapado en una órbita elíptica alrededor de M; y si el objeto m se hubiera lanzado inclinado desde la propia superficie de M, al cerrar la elipse volvería a chocar contra la superficie de éste).

- $v = v_{esc} \Rightarrow$ el objeto m hace una parábola y está justo en el límite de escapar a la atracción de M, llegando justo al infinito a pararse.

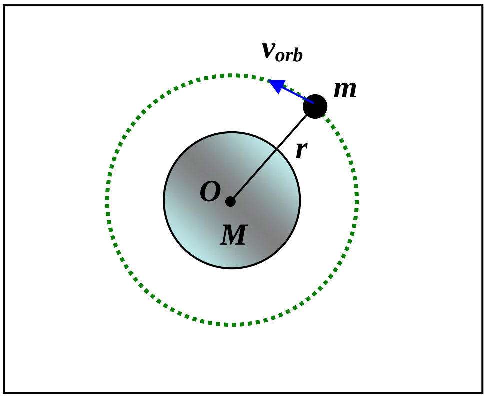
- $v > v_{esc} \Rightarrow$ el objeto m hace una hipérbola (como se ha observado ya que hacen varios cometas), escapando a la atracción de M, llegando al infinito con velocidad no nula sobrante.

Así, gracias a la aplicación de la ecuación de la energía, puede analizarse la situación de la puesta en órbita de un satélite artificial de masa *m* alrededor de un planeta de masa *M* y radio *R*, por ejemplo la Tierra. De acuerdo con lo obtenido, según la velocidad con la que se dote al satélite *m* en el punto P podría quedarse orbitando o no alrededor de nuestro planeta, como se ve en la figura adjunta.



Curiosidad: en el modelo astrofísico básico de los *agujeros negros* —regiones singulares del espacio donde se ha concentrado una enorme masa como consecuencia del colapso evolutivo de estrellas muy masivas— se tiene que la velocidad de escape sería mayor que la velocidad de la luz (límite físico insuperable), con lo que nada, ni siquiera la propia luz, puede escapar de ellos (de ahí el nombre de *"negros"*).

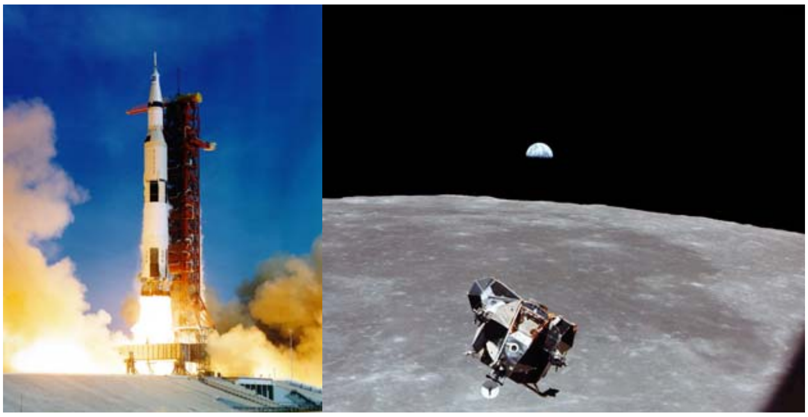
Por último, podemos abordar el concepto de ***velocidad orbital***, v_{orb} , es decir la velocidad que lleva un objeto de masa *m* (por ejemplo, un satélite) cuando está haciendo una órbita de radio *r* (circular uniforme, por sencillez) medido desde el centro O alrededor de un foco masivo *M* (por ejemplo, un planeta).



Para ello, basta con escribir la segunda ley de Newton para el objeto m, o sea:

$$F_{aplicada} = m\, a_{observada} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_{orb}^2}{r} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

que es inferior a la velocidad de escape v_{esc} en un factor raíz cuadrada de 2.



Lanzamiento de la misión Apolo 11 (izq.) y módulo lunar Eagle orbitando alrededor de la Luna, con la Tierra al fondo (dcha.), en 1969 (fotografías NASA de dominio público)

Actividad nº 4:

Calcule la velocidad orbital que llevaría el transbordador espacial cuando estuviera haciendo una orbita circular a 500 km de altura sobre la superficie de la Tierra (radio de la Tierra R_T = 6,37 x 10^6 m, M_T = 6 x 10^{24} kg, G = 6,67 x 10^{-11} Nm^2kg^{-2}), expresándola en el S.I. de unidades y en km/h. A partir de ese resultado, considerando la longitud de la circunferencia descrita por el transbordador ($2\pi r$), calcule el tiempo, en el S.I. de unidades y en horas, que tarda la nave en completar cada órbita.

Soluc.: v = 7632 m/s = 27475 km/h, T = 5656 s = 1,57 h

Curiosidad. Dado que un astronauta en dicha nave hace unas 15,3 órbitas a lo largo de un día terrestre de 24 horas, vería amanecer entre 15 y 16 veces cada día.

Por tanto, la ***energía total de un satélite m en esa órbita circular*** de radio r alrededor del planeta M sería:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

Curiosidad: si se quiere poner en órbita un satélite lanzándolo desde la superficie de la Tierra, no puede hacerse de una sola vez puesto que al lanzarlo, como debe hacerse con velocidad inferior a la de escape (pues no queremos que escape) volvería a caer sobre la Tierra al cerrar su órbita elíptica. Por ello, se lanza primero con velocidad inferior a la de escape y, cuando está a una altura deseada, un motor-cohete propio le da un impulso tangencial de modo que empiece a hacer una órbita elíptica quedando atrapado en ella.

Resumen.

- Las tres leyes del movimiento planetario fueron obtenidas de modo empírico por Kepler a partir de las observaciones de Brahe.

- Estas tres leyes —y por tanto las observaciones de Brahe— pueden derivarse de los principios teóricos newtonianos, y viceversa. No en vano, Newton afirma en sus Principia: "***Demuestro ahora la estructura del mundo***".

Leyes de Kepler del movimiento planetario ⇔ Ley de Newton de la Gravitación Universal

- Newton alcanzó el objetivo deseado —y el sueño incumplido— de Kepler de desarrollar una Física basada en las causas.

- Kepler y Newton representan una transición crítica en la historia de la Ciencia y de la propia humanidad, ya que descubrieron que:

  - hay leyes matemáticas bastante simples que se extienden por toda la naturaleza.

  - las mismas reglas físicas son válidas tanto en la Tierra como en los cielos.

- Ambos respetaron los datos observacionales, y la precisión de sus predicciones sobre el movimiento planetario proporcionó una prueba convincente de que el hombre puede entender el Cosmos en profundidad.

Reflexión final. Nuestra moderna civilización, nuestra visión del mundo y nuestra exploración del Universo tienen una deuda profunda con los autores de estas concepciones. Sirva la modesta exposición recogida en el desarrollo de este tema como un merecido homenaje a todos ellos.

El autor: Prof. Dr. Álvaro G. Vitores González (Madrid, 2009)

Bibliografía.

Básica preuniversitaria.

- Navarro, F. ***Física fácil para Bachillerato y acceso a la Universidad***. Editorial Espasa Calpe, S.A., Madrid (2005), sección 5, pp. 99-112.

- Zubiaurre, S., Arsuaga, J. M., Moreno, J. Y Gálvez, F. ***Física. Bachillerato 2*** con CD-ROM. Grupo Anaya, Madrid (2009), capítulos 1 y 2, pp. 35-88.

Básica universitaria.

- Alonso, M. y Finn, E. J. ***Física***. Addison-Wesley Iberoamericana, Madrid (1995), capítulo 11.

- Arenas, A. ***Física 1***. Servicio de Publicaciones de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de la Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (2000), capítulos 10, 11, 13, 15 y 17.
- Tipler, P. A. y Mosca, G. ***Física para la Ciencia y la Tecnología***. Editorial Reverté, Barcelona (2005), capítulo 11.

- Wilson, J. D. y Buffa, A. J. ***Física***. Pearson Educación Prentice-Hall, México (2003), capítulo 7.

Lecturas complementarias.

- Cartier, P. ***Kepler y la música del mundo***. Mundo Científico, Editorial Fontalba, Barcelona, (Octubre 1995), p. 830-835.

- Christianson, G. E. ***Newton***. Salvat Editores, Barcelona (1987), capítulos 11 y 12.

- Cohen, I. B. ***El descubrimiento newtoniano de la gravitación***. Investigación y Ciencia, Prensa Científica, Barcelona (Mayo 1981), p. 110-120.

- Drake, S. ***La manzana de Newton y el Diálogo de Galileo***. Investigación y Ciencia, Prensa Científica, Barcelona (Octubre 1980), p. 106-112.

- Gamov, G. ***Biografía de la Física***. Alianza Editorial, Madrid (1980), capítulos 2 y 3.

- García, J. L. ***Copérnico y Kepler***. Nivola Libros y Ediciones, Madrid (2000).

- Gleick, J. ***Isaac Newton***. RBA Libros, S.A., Barcelona (2005).

- Goodstein, D. y Goodstein, J. ***La conferencia perdida de Richard Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del Sol***. Tusquets Editores, Barcelona (1998), capítulos 1, 3 y 5.

- Gribbin, J. ***Historia de la Ciencia 1543-2001***. Editorial Crítica, Barcelona (2003), capítulos 2 y 5.

- Guicciardini, N. ***Newton***. Temas nº 50. Investigación y Ciencia. Prensa Científica, S.A., Barcelona (2007).

- Guillen, M. ***Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo***. Editorial Debate, Madrid (1999), capítulo 1.

- Hawking, S. ***A hombros de gigantes***. Editorial Crítica, Barcelona (2004).

- Holton, G. ***Introducción a los conceptos y teorías de las Ciencias Físicas***. Editorial Reverté, Barcelona (1989), capítulos 4 y 11.

- Horvitz, L. A. ***¡Eureka! Descubrimientos científicos que cambiaron el mundo***. Ediciones Paidós, Barcelona (2003), capítulo 4.

- Kepler, J. ***El secreto del Universo***. Alianza Editorial, Madrid (1992).

- Koestler, A. ***Kepler***. Salvat Editores, Barcelona (1985).

- Lea, S. M. y Burke, J. R. ***Física. La naturaleza de las cosas***. Editorial Paraninfo, Madrid (2001), capítulo 0 y ensayos 1 (p. 164-165) y 3 (p. 331-333).

- Muñoz, J. ***Newton. El umbral de la ciencia moderna***. Nivola Libros y Ediciones, S.L., Madrid (2005).

- Newton, I. ***Principios Matemáticos de la Filosofía Natural***. Alianza Editorial (1998).

- Ordóñez, J., Navarro, V. y Sánchez Ron, J. M. ***Historia de la Ciencia***. Editorial Espasa Calpe, Madrid (2004), parte II (Edad moderna), capítulos 1 y 2.

- Repcheck, J. ***El secreto de Copérnico***. Editorial Ariel, Barcelona (2009).

- Rivadulla, A. ***Revoluciones en Física***. Editorial Trotta, Madrid (2003), capítulos I y II.

- Sagan, C. ***Cosmos***. Editorial Planeta, Barcelona (1980), capítulo 3.

- Sánchez del Río, C. ***Los principios de la Física en su evolución histórica***. Editorial Complutense, Madrid (1995), capítulo 2.

- Sánchez del Río, C. ***El significado de la Física***. Editorial Complutense, Madrid (2002), capítulo 2.

- Solís, C. y Sellés, M. ***Historia de la Ciencia***. Editorial Espasa Calpe, S.A., Madrid (2005), capítulos 9, 10 y 12.

- Udías, A. ***Historia de la Física: De Arquímedes a Einstein***. Editorial Síntesis, Madrid (2004), capítulos 6,7 y 8.

- Valera, M. ***La ambición de una ciencia sin límites: Hooke***. Nivola Libros y Ediciones, Madrid (2004), capítulo 7.

- Westfall, R. S. ***Isaac Newton: una vida***. Cambridge University Press, Madrid (2000).

- Yáñez, M. ***Copérnico***. Colección Grandes Biografías EDIMAT Libros, S.A., Madrid (2003).

Videoteca.

- ***"El Universo mecánico"***. California Institute of Technology, Arait Multimedia, Madrid (1992). Vídeos nº 8 "La manzana y la Luna", nº 21 "Las tres leyes de Kepler", nº 22 "El problema de Kepler", nº 23 "Energía y excentricidad", nº 24 "Navegar por el espacio", nº 25 "Desde Kepler a Einstein" y nº 26 "La armonía del Universo".

- ***"Grandes genios e inventos de la humanidad"***. Crest Films, Madrid (2007). DVD nº 6 "Copérnico, Galileo, Newton y Einstein".

- ***"Objetivo: la Luna. Cuatro décadas de viajes espaciales"***. DVD National Geographic, Barcelona (2009).

Webgrafía.

Básica.

- http://newton.cnice.mec.es/materiales_didacticos.html Magnífica dirección web del Proyecto Newton elaborado por el Ministerio de Educación como un taller abierto de creación de recursos interactivos para la enseñanza de la Física preuniversitaria. Presenta resúmenes conceptuales, cuestiones de autoevaluación y simulaciones gráficas interactivas de todas las partes de la Física, y en lo que concierne al presente tema, sobre gravedad, campo gravitatorio y velocidad de escape.

- http://portales.educared.net/wikillerato/Fisica Dentro del conocido Programa Educared —impulsado por la Fundación Telefónica y una serie de organizaciones educativas—, que promueve el uso de Internet en la educación, está el recurso Wikillerato, que presenta diversos contenidos estructurados por asignaturas, entre ellas la Física, cuya sección está moderada por el Catedrático de Física y Química de Enseñanza Secundaria D. Juan Ignacio Valero. En cuanto a la Física, se incluyen contenidos de todos los temas de su programa y, en lo que aquí concierne, incluye una vistosa sección sobre teoría de campos gravitatorios, fuerzas centrales, sistemas planetarios y satélites, todo ello con animaciones y textos presentados en forma de atractivas pizarras.

- http://www.selectividad.profesores.net Servicio gratuito de recursos en red de Ediciones SM que facilita el acceso a todos los exámenes de Selectividad, con sus enunciados y soluciones, correspondientes a las Pruebas de Acceso a la Universidad desde el año 1998.

- https://moodle.upm.es/puntodeinicio Dirección web de la Universidad Politécnica de Madrid elaborada por un grupo de profesores (entre ellos el autor de esta unidad) como apoyo en las materias básicas, entre ellas la Física, a los alumnos de nuevo ingreso. En ella se presentan numerosas cuestiones de autoevaluación (en lo que afecta a este tema, se recomienda al lector realizar las cuestiones de las distintas secciones del bloque Interacción gravitatoria), así como enlaces a otras webs con sugerencias de repaso de los conceptos básicos en esta materia.

Avanzada.

- http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/celeste.htm Magnífica dirección web que pertenece al curso de Física interactiva del profesor Ángel Franco de la EUITI de Eibar. Contiene secciones sobre las leyes de Kepler, la ley de gravitación universal, fuerzas centrales, trayectorias y astronáutica, estando desarrolladas mediante texto, ecuaciones deducidas y animaciones sobre la ley de las áreas, la ley de los períodos y la forma de las órbitas en función de la energía.

- http://www.walter-fendt.de/ph11s/ Página del profesor alemán W. Fendt que incluye applets sobre las dos primeras leyes de Kepler. Así, uno de ellos dibuja la órbita de cada uno de los nueve planetas y del cometa Halley, aportando los valores sobre los semiejes mayor y menor, excentricidad, distancia máxima y mínima al Sol en cada instante. El otro dibuja además el movimiento de esos diez cuerpos y va comprobando la ley de las áreas, dibujando también el vector velocidad en cada posición, así como aportando los valores máximo, mínimo e instantáneo de la velocidad orbital.

- http://www.astro.utoronto.ca/~zhu/ast210/kepler.html Dirección del profesor Ming Zhu, de la Universidad de Toronto, que incluye animaciones que permiten ver el efecto que el tamaño de la órbita y la excentricidad tienen sobre la misma, viendo también las áreas barridas por el planeta en comparación con la órbita de la Tierra.

- http://csep10.phys.utk.edu/guidry/java/doublebuf/kepler.html Página del profesor M. Guidry de la Universidad de Tennessee que incluye applets en JAVA que permiten ver las órbitas elípticas, sus radios máximo y mínimo y comprobar que su suma es una constante, así como ver el efecto que produce cambiar la masa del Sol el semieje mayor de la elipse planetaria en el valor del período, a través de la tercera ley de Kepler.

- http://physics-animations.com/Physics/English Dirección cuyo origen nació en Siltec Ltd. que incluye interesantes animaciones sobre conceptos de Mecánica (entre ellos el movimiento de los satélites), Ondas, Termodinámica y Óptica, así como otras sobre los experimentos más famosos de la Física.

- http://www.mhhe.com/physsci/physica/jones/student_index.mhtml Página que incluye variadas e interesantes animaciones, entre ellas de las leyes de Kepler, órbitas y satélites, correspondientes al texto de Física "Contemporary College Physics" de Jones, E. y Childers, R., editado por McGraw-Hill (2001).

- http://www.phy.ntnu.edu.tw/oldjava/Kepler/Kepler_s.htm En esta dirección, con versión en castellano, el profesor Fu-Kwun Hwang de la National Taiwan Normal University de Taipei ofrece un applet, sencillo pero interesante, con animaciones sobre las tres leyes de Kepler.