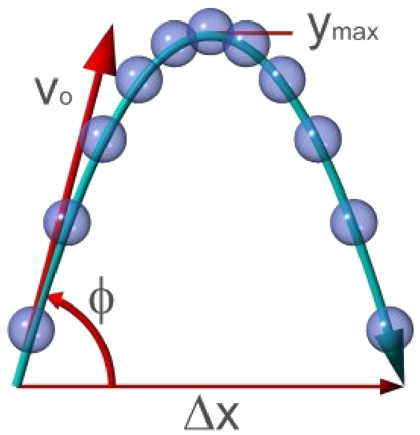
Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)



Unidades 5, 6 y 7:Cinemática

Universidad Politécnica de Madrid

28 de junio de 2010

5.1. Planificación de la Unidad

5.1.1. Objetivos

1. Comprender la necesidad de utilizar un sistema de referencia para describir el movimiento de un punto material.
2. Adquirir los conceptos y definir correctamente las magnitudes cinemáticas necesarias para describir el movimiento del punto material o partícula.
3. Identificar el carácter vectorial de las magnitudes: vector de posición, velocidad y aceleración.
4. Comprender el significado físico de las componentes intrínsecas de la aceleración y conocer la forma de determinarlas.
5. Conocer e interpretar las ecuaciones de movimiento de una partícula.
6. Plantear y resolver problemas sencillos en los que intervengan diferentes movimientos de la partícula.

5.1.2. Contenidos

1. Introducción.
2. Vector de posición y trayectoria. Ecuaciones de la trayectoria.
3. Vectores velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.
4. Clasificación de los movimientos.
5. Movimiento rectilíneo.
6. Movimiento circular.
7. Movimiento parabólico.

5.1.3. Actividades

1. Lectura del resumen del tema
2. Realización de los cuestionarios de las unidades 5, 6 y 7:
3. Realización de los ejercicios

4. Actividades complementarias

   a) Poner ejemplos de estos movimientos en el entorno real

   b) Redactar una pequeña reseña (máximo 1 página).

5.1.4. Bibliografía

1. Libros de primero y segundo de Bachillerato.

2. P.A. Tipler y G. Mosca, Física para Ciencias e Ingeniería", 5^a Edición, Editorial Reverté, 2005.

5.1.5. Enlaces relacionados

1. Proyecto Newton:

   movimiento1: http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/mru/rectobjetivos.htm

   Movimiento2: http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/movimiento(II)/obmov2.htm

   Composición de movimientos: http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/comp_mov/index.html

2. Física Interactiva en Internet (Angel Franco) Cinemática: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica//cinematica/cinematica.htm

5.2. Introducción

Se da el nombre de Cinemática a la ciencia que estudia el movimiento en si mismo, prescindiendo de las causas que lo producen, es decir, estudia el movimiento en su aspecto geométrico.

Puede considerarse por tanto la Cinemática como una geometría en la que interviene un parámetro ajeno a ella: el tiempo.

Empezaremos estudiando la Cinemática del punto. En Mecánica el punto material o punto es un concepto ideal y corresponde al de un cuerpo o región de él, de cuyas dimensiones se puede prescindir en el estudio del fenómeno considerado.

Esto equivale a decir que un punto material puede asimilarse a un punto geométrico, aunque dotado de masa, magnitud física básica en Dinámica.

Como ejemplo diremos que en Mecánica Celeste, los planetas se consideran como puntos materiales, sus dimensiones reales pueden ser consideradas puntuales en relación a las grandes distancias que existen entre los diversos cuerpos celestes.

Estudiaremos aquí los diversos tipos de movimiento de un punto material, por tanto, la Cinemática del punto material.

Movimiento

Cuando decimos que un punto está en movimiento entendemos que su posición cambia en el espacio con relación a algo que consideramos fijo y que nos sirve de referencia. El mejor modo de establecer esta relación en su aspecto geométrico, es tomar un sistema positivo de tres ejes de coordenadas que se supone fijo. Definido así el sistema de referencia, diremos que un punto está inmóvil cuando sus coordenadas respecto a este sistema se mantienen constantes al variar el tiempo y diremos que está en movimiento cuando sus coordenadas varían en el transcurso del tiempo.

De acuerdo con la idea clásica, admitimos la existencia de un espacio euclídeo y el concepto intuitivo de tiempo, considerando esta magnitud como una variable escalar, que puede ser medida por cualquier observador independientemente del estado de movimiento en que se encuentre, pudiendo fijarse con toda precisión el concepto de simultaneidad.

5.3. Vector de posición y trayectoria. Ecuaciones de la trayectoria

Según hemos definido el movimiento, entre la posición de un punto móvil P y la variable tiempo existirá una correspondencia unívoca. Esta posición quedará determinada por el vector de posición $\vec{r}$ (vector con origen en el sistema de referencia y extremo la posición del punto material), que será función continua del tiempo.

La ecuación

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{5.1}$$

recibe el nombre de ecuación vectorial del movimiento.

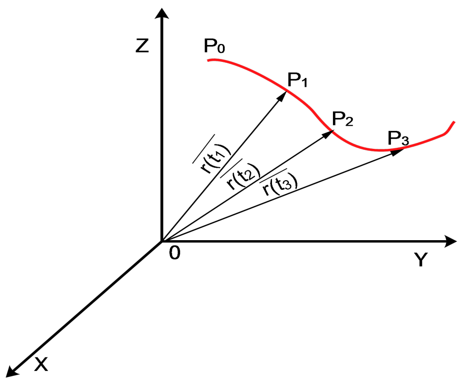


Figura 5.1: vector de posición

El lugar geométrico de todas las posiciones sucesivas constituye la trayectoria del punto, que será una curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

Si eliminamos t entre las tres ecuaciones anteriores obtenemos dos ecuaciones que también representan la trayectoria.

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Si se conoce la trayectoria, el movimiento también queda definido dando la posición del punto en la trayectoria en cada instante, para lo cual se tomará en dicha trayectoria un punto P y llamando s a la longitud del arco *PP'* sobre dicha curva, esta magnitud estará dada en función del tiempo por una ecuación $s = f(t)$ que es la ley horaria del movimiento o ecuación intrínseca del movimiento.

5.4. Vectores velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas

5.4.1. Velocidad

Supongamos que un móvil recorre la curva C siendo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ la ecuación del movimiento.

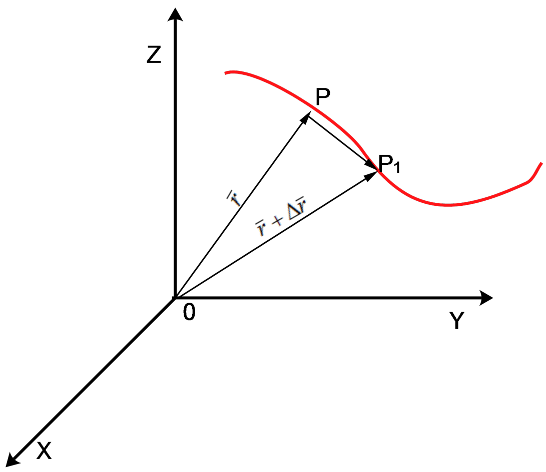


Figura 5.2: vector velocidad

Sea P la posición ocupada por el móvil en el instante t y P_1 la posición en otro instante $t + \Delta t$, cuyo vector de posición es $\vec{r} + \Delta\vec{r}$.

El cociente $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ es un vector que recibe el nombre de velocidad media del punto móvil en el intervalo de tiempo $t - t + \Delta t$

El límite a que tiende este cociente al tender Δt a cero, o sea, la derivada del vector de posición $\vec{r}$ con respecto al tiempo es lo que llamaremos velocidad del punto móvil en el instante t. Según esto la velocidad del punto será el vector

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{5.4}$$

Introduzcamos ahora como variable intermedia el incremento de arco Δs correspondiente al incremento de tiempo Δt y escribamos

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{5.5}$$

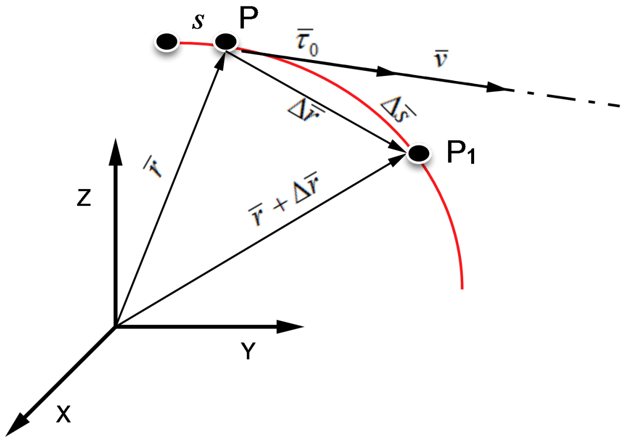


Figura 5.3: vector velocidad

Donde $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ es un vector cuyas características son:

- Módulo igual a uno; ya que al tender Δs a cero $|\Delta\vec{r}|$, arco infinitesimal de cuerda, y el elemento de arco Δs son infinitésimos equivalentes y su cociente será por tanto igual a la unidad.

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1, \tag{5.6}$$

- Dirección, la tangente a la trayectoria, pues cuando $\Delta s \to 0$, P_1 tiende a confundirse con P y la cuerda a confundirse con la tangente.

- Sentido, el de avance del movimiento $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ es por lo tanto un vector unitario que representaremos por $\vec{\tau}_0$, de modo que:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}_0 \tag{5.7}$$

Luego el vector velocidad es un vector de dirección la tangente a la trayectoria en el punto P, sentido el del movimiento y módulo la derivada del arco de trayectoria respecto del tiempo

$$\vec{v} = \vec{\tau}_0\frac{ds}{dt} \tag{5.8}$$

Hodógrafa de un movimiento

La velocidad es a su vez una función del tiempo, tanto por modificarse su módulo que puede variar de unos puntos a otros, como su dirección. Representemos gráficamente sus variaciones; para ello tracemos a partir de un punto arbitrario O' vectores equipolentes a los vectores velocidad en cada instante. Los extremos de dichos vectores determinan una curva denominada hodógrafa del movimiento.

5.4.2. Aceleración

5.4.2.1. Aceleraciones media e instantánea

Si las velocidades del móvil en los instantes t y $t + \Delta t$ son respectivamente $\vec{v}$ y $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.

Al cociente $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ se le llama aceleración media en el intervalo de tiempo Δt

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{5.9}$$

El límite de dicha relación cuando Δt tiende a cero es la aceleración en el instante t:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5.10}$$

Derivada de vector velocidad respecto del tiempo o segunda derivada del vector de posición respecto del tiempo.

5.4.2.2. Componentes intrínsecas de la aceleración

Hemos visto que $\vec{v} = \vec{\tau}_0 \dfrac{ds}{dt}$

Luego el vector aceleración $\vec{a}$ será:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}_0 \frac{ds}{dt}\right) = \vec{\tau}_0 \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\vec{\tau}_0}{dt}\frac{ds}{dt} \tag{5.11}$$

El primero de estos sumandos es un vector de dirección $\vec{\tau}_0$ (es decir, la de la tangente a la trayectoria en el punto considerado), y cuyo módulo vale $\dfrac{d^2s}{dt^2}$; se le denomina componente tangencial de la aceleración y se representa por $\vec{a}_t$:

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}_0 = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0 \tag{5.12}$$

En cuanto al segundo sumando $\frac{d\vec{\tau}_0}{dt}\frac{ds}{dt}$ demostraremos que es un vector de dirección la de la normal a la curva y cuyo módulo también determinaremos a continuación.

Se le denomina componente normal de la aceleración y se representa por $\vec{a}_n$

Introduciendo el parámetro s (arco de trayectoria), tenemos:

$$\vec{a}_n \frac{d\vec{\tau}_0}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\vec{\tau}_0}{ds}v^2 \tag{5.13}$$

Pues como sabemos el módulo de $\vec{v}$ es $\frac{ds}{dt}$.

En cuanto a $\frac{d\vec{\tau}_0}{ds}$ su dirección será normal a $\vec{\tau}_0$, pues $\vec{\tau}_0$ es un vector de módulo constante e igual a 1; es decir, perpendicular a la tangente en el punto de la trayectoria considerado. Tiene pues, la dirección de la normal, y se tendrá en cuenta esta dirección mediante el vector $\vec{\eta}$, unitario de dirección la normal.

El módulo de $\frac{d\vec{\tau}_0}{ds}$ será :

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau_0}{\Delta s} \tag{5.14}$$

Veamos el significado de esta expresión. Consideremos, para ello, dos puntos P y P' infinitamente próximos, en los que el vector unitario será $\vec{\tau}_0$ y $\vec{\tau}_0 + \Delta\vec{\tau}_0$ respectivamente.

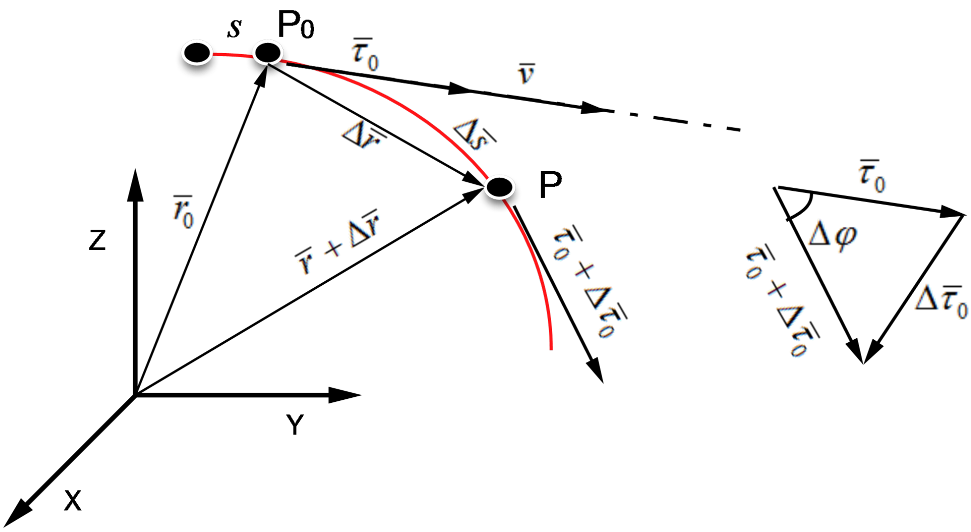


Figura 5.4: vector de posición y vector $\vec{\tau}_0$

$$|\vec{\tau}_0| = |\vec{\tau}_0 + \Delta\vec{\tau}_0| = 1 \tag{5.15}$$

Vemos que $\Delta\vec{\tau}_0$ es el vector diferencia $\vec{\tau}_0 + \Delta\vec{\tau}_0$ y $\vec{\tau}_0$ y su módulo $\Delta\tau_0$ será, llamando $\Delta\varphi$ al ángulo formado por los dos vectores unitarios $\vec{\tau}_0$ y $\vec{\tau}_0 + \Delta\vec{\tau}_0$

$$\Delta\tau_0 = 1 \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi \tag{5.16}$$

Luego:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} \tag{5.17}$$

A $\dfrac{d\varphi}{ds}$ se le denomina curvatura y se representa por χ .El inverso de χ es el radio de curvatura ρ. Así pues:

$$\chi = \frac{1}{\rho} \tag{5.18}$$

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{ds} \begin{cases} \text{Dirección: normal a la curvatura} \\ \text{Módulo:}\, \chi = \dfrac{1}{\rho} \\ \text{Sentido: hacia la concavidad de la trayectoria según se ve del sentido de}\Delta t \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{ds} = \chi \cdot \vec{\eta} = \vec{\eta} \cdot \frac{1}{\rho} \tag{5.19}$$

y

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{\tau}_0}{ds} v^2 = \frac{v^2}{\rho} \vec{\eta} \tag{5.20}$$

Finalmente escribiremos:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{\eta} \tag{5.21}$$

5.4.3. Componentes cartesianas de la velocidad y la aceleración

Consideremos un sistema de ejes cartesianos con origen en el punto “O” que sirve de referencia al vector de posición.

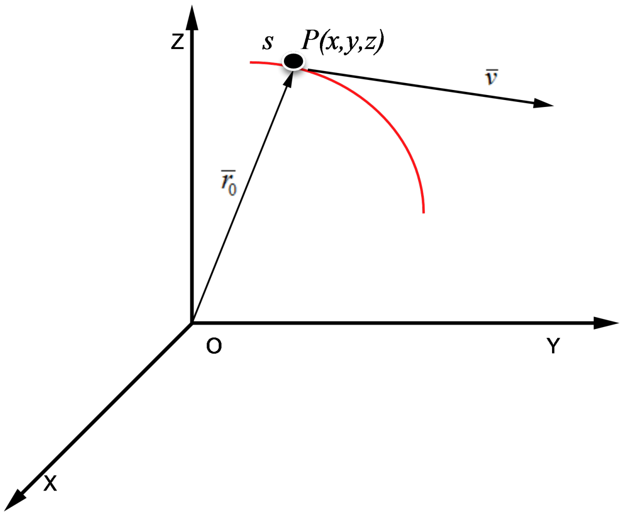


Figura 5.5: vector de posición en un punto *P(x,y,z)* y vector velocidad

El vector de posición en este sistema será un vector de componentes las coordenadas de su punto extremo P.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{5.22}$$

Teniendo presente que los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son constantes, resulta:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{5.23}$$

Luego las componentes del vector velocidad son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad ; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{5.24}$$

Para hallar el vector aceleración tendremos que hacer una segunda derivación:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} \tag{5.25}$$

Y por tanto las componentes de la aceleración según los ejes son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt} \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt} \tag{5.26}$$

5.4.4. Ecuación de dimensiones y unidades de la velocidad y la aceleración

Tanto la velocidad como la aceleración son magnitudes derivadas, cuyas ecuaciones de dimensiones serán:

$$\begin{cases} v = L \cdot T^{-1} \\ a = L \cdot T^{-2} \end{cases}$$

Siendo L y T las magnitudes Longitud y Tiempo respectivamente.

Las unidades serán:

Sistema	cgs	MKS	técnico
Velocidad	cm·s^{-1}	m·s^{-1}	m·s^{-1}
Aceleración	cm·s^{-2}	m·s^{-2}	m·s^{-2}

Tabla 5.1: unidades de la velocidad y aceleracion en sistemas cgs, MKS y técnico

5.5. Clasificación de los movimientos

Atendiendo a la forma de la trayectoria, los movimientos de un punto material se clasifican en:

- Rectilíneos $\Rightarrow$ Trayectoria Recta $\rho = \infty$
- Curvilíneos $\Rightarrow$ Trayectoria Curva $\rho \neq \infty$

Dentro de los curvilíneos son especialmente interesantes los circulares, en los que $\rho = cte$ =Radio de la circunferencia trayectoria.

De acuerdo con el módulo del vector velocidad. Otra posible clasificación es:

- Uniforme $\Rightarrow$ si el módulo de la velocidad, v, es constante (independiente del tiempo).
- Uniformemente acelerado $\Rightarrow$ si el módulo de la velocidad, v, es una función lineal del tiempo, t, $v = c_1 + c_2 \cdot t$ siendo c_1 y c_2 constantes $\Rightarrow a_t' = c_2$
- Acelerado $\Rightarrow$ si el módulo de la velocidad, v, es función no lineal de t, $a_t \neq cte$

Agrupando ambas clasificaciones se podría sintetizar la clasificación del siguiente modo:

- Rectilíneos ($\rho = \infty; \quad a_n = 0; \quad \vec{a} = \vec{a}_t$)
  - Uniformes: $v = \dfrac{ds}{dt} = cte$
  - Variados :

$$\begin{cases} \text{- Uniformemente: } a = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \text{Cte} & \begin{cases} a > 0\,(\text{acelerados}) \\ a < 0\,(\text{retardados}) \end{cases} \\ \text{- No Uniformemente: } a = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \neq \text{Cte} \end{cases}$$

- Curvilíneos ($\rho \neq \infty$)

  - Circulares ($\rho = \text{Cte}$):

$$\begin{cases} \text{- Uniformes: } a = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{Cte} \Rightarrow \omega \text{velocidad angular} = \text{Cte} \\ \text{- Uniformemente variados: } a_t = cte \Rightarrow \alpha\,\text{ac. ang.}) = \text{Cte} \\ \text{- No uniformemente variados: } a_t not = \text{Cte} \end{cases}$$

  -Curvilíneos en general ($\rho \neq cte; \quad \rho \neq \infty$)

5.6. Movimiento rectilíneo

Su trayectoria es una línea recta, por tanto $\rho = \infty$. Esto implica que, para todo tipo de movimiento rectilíneo $a_n = 0$, ya que $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$. Por tanto $\vec{a} = \vec{a}_t$; es decir el vector aceleración en un movimiento rectilíneo tiene la misma dirección que la recta trayectoria del movimiento. Estudiaremos los siguientes tipos de movimiento rectilíneo:

5.6.1. Movimiento rectilíneo uniforme

Se define como aquel en el que $v = cte \Rightarrow \vec{v} = cte$:

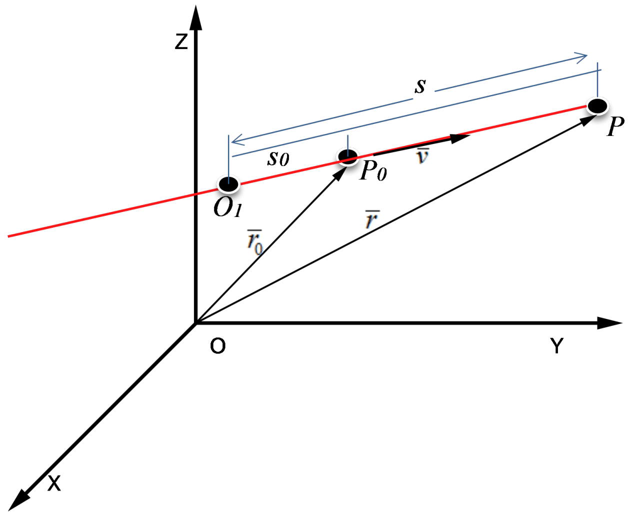


Figura 5.6: movimiento rectíneo uniforme

Deduciremos la ecuación vectorial del movimiento:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt \tag{5.27}$$

Integrando:

$$\int d\vec{r} = \int \vec{v} \cdot dt = \vec{v} \cdot \int dt \tag{5.28}$$

Luego:

$$\vec{r} = \vec{v} \cdot t + \vec{C} \tag{5.29}$$

Para la determinación de C (constante de integración) consideraremos las condiciones iniciales.

Si para $t = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0$, es decir, el punto está en P_0 cuando se inicia el movimiento; por tanto:

$$\vec{r}_0 = \vec{v}_0 \cdot 0 + \vec{C} = \vec{C} \tag{5.30}$$

Así pues, la ecuación vectorial del movimiento es:

$$a = \frac{dv}{dt} = cte \quad \text{ó} \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v} \cdot t \tag{5.31}$$

Tomando módulos en esta última ecuación, se obtiene la ley horaria del movimiento:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{v}| \cdot t \quad ; \quad |\overrightarrow{P_0P}| = v \cdot t \tag{5.32}$$

Es decir:

$$s - s_0 = v \cdot t \Rightarrow s = s_0 + v \cdot t \tag{5.33}$$

Siendo $O_1P_0 = s_0$ la trayectoria inicial, considerando O_1 como punto origen sobre la trayectoria.

5.6.2. Movimiento rectilíneo uniformemente variado

Aquel en que $\vec{v} \neq cte$ siendo $\vec{a} = \vec{a}_t = cte$

Ecuación vectorial de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt \tag{5.34}$$

E integrando

$$\int d\vec{v} = \vec{a} \int dt \quad ; \quad \vec{v} = \vec{a} \cdot t + \vec{C} \tag{5.35}$$

La constante de integración la obtendremos, como antes, a partir de la consideración de las condiciones iniciales.

Si en el instante $t = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0$,la inclusión de estos valores en la ecuación anterior nos da:

$$\vec{v}_0 = \vec{a} \cdot 0 + \vec{C}; \quad \vec{v}_0 = \vec{C} \tag{5.36}$$

Luego:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \tag{5.37}$$

Ecuación vectorial del Movimiento:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt = (\vec{a} \cdot t + \vec{v}_0) \cdot dt \tag{5.38}$$

Integrando esta ecuación:

$$\int d\vec{r} = \int (\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t) \cdot dt = \int \vec{v}_0 \cdot dt + \int \vec{a} \cdot t \cdot dt \tag{5.39}$$

Y como $\vec{a}$ y $\vec{v}_0$ son vectores constantes:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 + \vec{C}_1 \tag{5.40}$$

Esta nueva constante $\left(\vec{C}_1\right)$se determina a partir de las condiciones iniciales.

Si para $\left.\begin{array}{r} t = 0 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 \\ \vec{r} = \vec{r}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{r}_0 = \vec{C}_1$

Y por tanto:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 \tag{5.41}$$

La ley horaria del movimiento la obtenemos, como antes, tomando módulos en esta ecuación vectorial:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{v}_0| \cdot t + \frac{1}{2}\,|\vec{a}| \cdot t^2 \tag{5.42}$$

Es decir:

$$s - s_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \tag{5.43}$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \tag{5.44}$$

Siendo s y s_0 las longitudes de los segmentos de trayectoria inicial y final contados desde el origen O_1.

Puede ocurrir en este tipo de movimiento que $\vec{a} = \vec{a}_t$ tenga el mismo sentido que el de avance del movimiento, y entonces decimos que el movimiento rectilíneo es uniformemente acelerado, siendo su ecuación vectorial y ley horaria del movimiento las anteriormente deducidas.

En el caso que $\vec{a} = \vec{a}_t$ tenga sentido distinto al de avance del movimiento, este se denomina uniformemente retardado, y para que haya movimiento se necesita una cierta velocidad inicial $\vec{v}_0$. Con esta situación las ecuaciones son:

Ec. Vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 \tag{5.45}$$

Módulo de la velocidad :

$$v = v_0 - a \cdot t \tag{5.46}$$

Ley horaria:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2}a \cdot t^2 \text{ (siendo } a \text{el valor absoluto o módulo de } \vec{a}) \tag{5.47}$$

Un ejemplo del primer caso lo tenemos en la caída libre de cierta altura, y del segundo, en el ascenso vertical de un cuerpo.

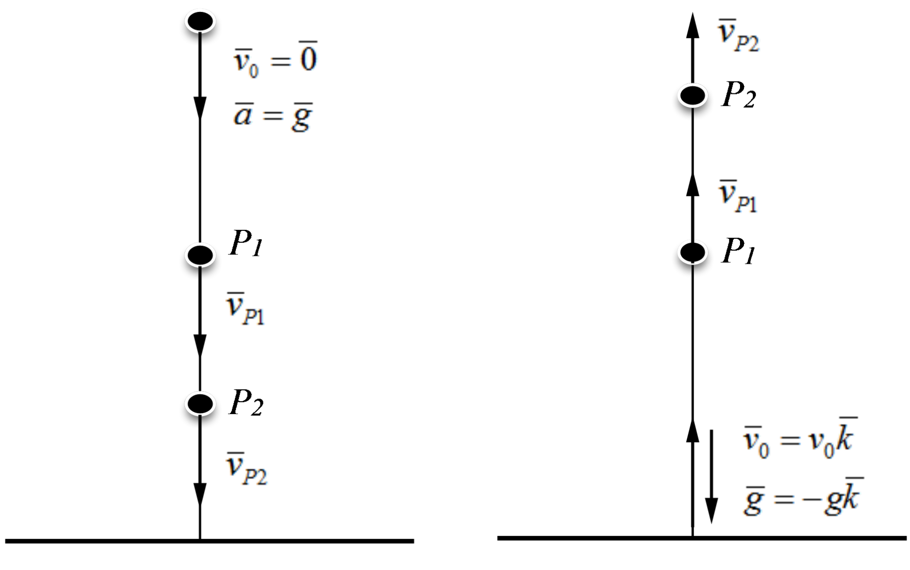


Figura 5.7: Movimientos de (a) caída libre y (b) ascenso vertical

Caida libre	ascenso vertical
$a,\ v$: Mismo sentido	$a,\ v$: Sentido contrario
v : Aumenta	v : Disminuye

5.6.3. Movimiento rectilíneo variado

Aquí; $\vec{a}_n = 0$; $\vec{v} \neq cte$; $\vec{a} = \vec{a}_t$ pero la $\vec{a}$ no es constante. Un ejemplo de este tipo de movimiento es el movimiento vibratorio armónico, cuya gran importancia dentro de la Física merece un estudio independiente que realizaremos en otro tema.

5.7. Movimiento circular

La trayectoria en este tipo de movimiento es una circunferencia, por tanto la curvatura χ es constante y el radio de curvatura $\rho = R$ (radio de la circunferencia).

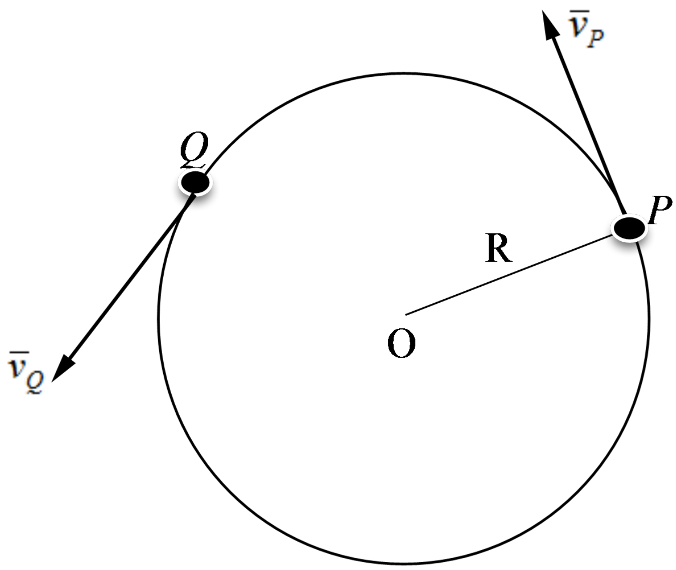


Figura 5.8: Movimiento circular

El vector $\vec{v}$ es en cada punto tangente a la trayectoria, y por tanto, normal al radio de dicho punto.

Según que $|\vec{v}| = cte$ ó $|\vec{v}| \neq cte$ distinguiremos dos tipos de movimiento circular: el uniforme, y el variado, ocupando los uniformemente variados dentro de los últimos un importante lugar.

5.7.1. Movimiento circular uniforme

Como hemos dicho en él $|\vec{v}| = cte$ y $\rho = R$,luego:

$$|\vec{a}_n| = \frac{v^2}{R} = cte \Rightarrow |\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \tag{5.48}$$

Existeaceleración en el movimiento, aunque toda ella normal, pues aunque el módulo del vector velocidad no varía, si lo hace su dirección. A esta aceleración dirigida siempre hacia el centro de la trayectoria se le denomina **aceleración centrípeta**.

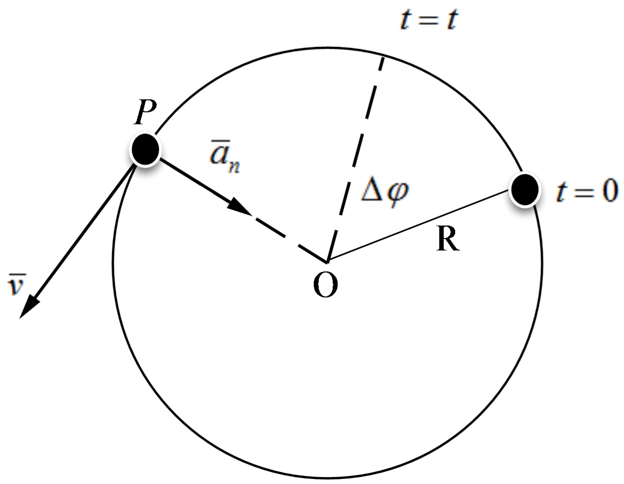


Figura 5.9: Movimiento circular uniforme

Se define en este tipo de movimiento la **velocidad angular** ω como la variación que experimenta el ángulo en el centro por unidad de tiempo y así hablamos de velocidad angular media:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{5.49}$$

Y de velocidad angular instantánea ω como

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{5.50}$$

Esta nueva magnitud tiene las dimensiones T^{-1} ya que un ángulo carece de dimensiones y su unidad coincidente en los tres sistemas es el rad/s ó s^{-1} simplemente.

Expresando el ángulo $\Delta\varphi$ en radianes el arco que abarca es evidentemente $\Delta s = \Delta\varphi \cdot R$ luego dividiendo por Δt y pasado al límite:

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}; \quad v = \omega \cdot R \tag{5.51}$$

Y por tanto la velocidad angular $\omega = \dfrac{v}{R}$ será también constante.

El módulo de la aceleración centrípeta será:

$$a_n = a = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = \omega^2 \cdot R = cte \tag{5.52}$$

Si $\omega \neq cte$, se define también la aceleración angular α como la variación que experimenta ω por unidad de tiempo. La aceleración angular en un instante será pues $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$ y en el movimiento circular uniforme será nula pues ω es constante.

Vamos ahora a hallar la expresión que da el ángulo girado y el arco correspondiente recorrido en función del tiempo.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt \tag{5.53}$$

Integrando:

$$\int d\varphi = \int \omega \cdot dt = \omega \cdot \int dt \Rightarrow \varphi = \omega \cdot t + C \tag{5.54}$$

La constante la determinaremos mediante las condiciones iniciales.

En el instante $t = 0$:

$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \cdot \omega + C \tag{5.55}$$

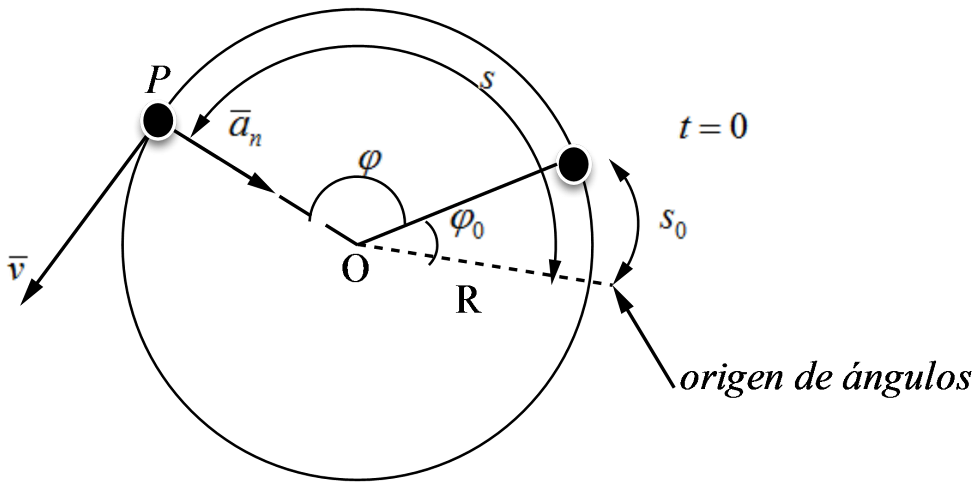


Figura 5.10: Movimiento circular uniforme

Y el ángulo en el instante t después de iniciado el movimiento es:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t \tag{5.56}$$

ó bien:

$$\varphi \cdot R = \varphi_0 \cdot R + \omega \cdot R \cdot t \Rightarrow s = s_0 + v \cdot t \tag{5.57}$$

El movimiento circular uniforme es un ejemplo de los denominados **movimientos periódicos**, que definiremos del siguiente modo: un movimiento es periódico, cuando a intervalos regulares de tiempo se repiten la posición del móvil y su velocidad. El tiempo entre dos pasos sucesivos del móvil por un punto determinado se denomina **periodo** del movimiento y, en el caso del movimiento que nos ocupa, estará relacionado con la velocidad angular del movimiento mediante la ecuación:

$$\varphi \cdot \mathrm{T} = 2\pi \tag{5.58}$$

Pues evidentemente, al cabo de una vuelta completa (2π radianes) se repiten la posición y la velocidad del punto.

El inverso del periodo es la frecuencia $f = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$, que se mide en s^{-1}(a veces llamados "ciclos s^{-1}" ó "hertz") y representa el número de vueltas completas que recorre el móvil en una unidad de tiempo; es decir, el número de revoluciones por segundo.

5.7.2. Movimiento circular variado

En él $|\vec{v}| \neq cte$, por tanto existirá aceleración tangencial $\vec{a}_t = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}_0$ y aceleración normal o centrípeta $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$.

5.7.3. Circular uniformemente variado

Si $|\vec{a}_t| = cte$ entonces el movimiento se denomina circular uniformemente variado

Veamos la relación entre la aceleración angular (α) y el módulo de la componente tangencial de la aceleración ($\vec{a}_t$) en este tipo de movimiento:

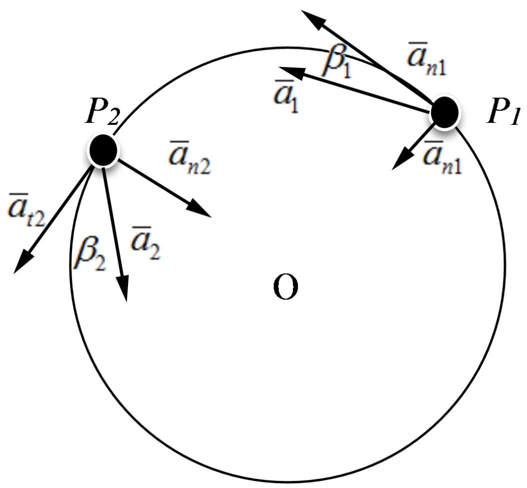


Figura 5.11: Movimiento circular uniformemente variado

Se tiene:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot R) = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a_t}{R} = cte \tag{5.59}$$

Como en cada punto $w = \omega \cdot R$, por tanto $\omega = \dfrac{v}{R}$ no es constante al no serlo v.

Las componentes de $\vec{a}$ son:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}_0 = R\,\alpha\,\vec{\tau}_0 \quad (\text{ siendo su módulo constante}) \tag{5.60}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \omega^2 R\,\vec{n} \quad (\text{que será distinta en cada punto, pues } \omega \text{ no es constante}) \tag{5.61}$$

La aceleración total $\vec{a}$ tendrá por módulo:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_n|^2 + |\vec{a}_t|^2} = \sqrt{\omega^4 \cdot R^2 + \alpha^2 \cdot R^2} = R \cdot \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{5.62}$$

En cuanto a $\hat{\beta}$, ángulo que forma en cada instante $\vec{a}$ con $\vec{a}_t$ será:

$$tg\,(\beta) = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\omega^2 \cdot R}{\alpha \cdot R} = \frac{\omega^{\ 2}}{\alpha} \tag{5.63}$$

Las expresiones que relacionan la velocidad angular y el ángulo girado por el punto en su movimiento, con el tiempo, se obtendrán de:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow d\omega = \alpha \cdot dt \tag{5.64}$$

E integrando:

$$\omega = \alpha \cdot t + C \tag{5.65}$$

Condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \text{- Si para : } t = 0; \omega = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \omega = \alpha \cdot t \\ \text{- Si para : } t = 0; \omega = \omega_0 \Rightarrow C = \omega_0 \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \end{cases}$$

Para el ángulo se tiene:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad ; \quad d\varphi = \omega \cdot dt \tag{5.66}$$

Integrando, si no tenemos ω_0;

$$\omega_0 = 0 \Rightarrow d\varphi = \alpha \cdot t \cdot dt \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + C_1 \tag{5.67}$$

Si por el contrario en el instante $t = t_0$ tenemos velocidad angular inicial:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \quad d\varphi = (\omega_0 + \alpha \cdot y) \cdot dt \Rightarrow \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 + C_2 \tag{5.68}$$

Las constantes las hallamos a partir de las condiciones iniciales:

- Si para $t = 0 \quad \omega = 0$:

$$\varphi = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \tag{5.69}$$

$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow C_1 = \varphi_0 \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \tag{5.70}$$

- Si para $t = 0 \quad \omega = \omega_0$

$$\varphi = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \tag{5.71}$$

$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow C_2 = \varphi_0 \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \tag{5.72}$$

Es decir $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$ es la expresión más general, que corresponde al caso en que en el instante en que comienza el movimiento, el punto material tiene una determinada velocidad angular ω_0y ha recorrido ya un ángulo φ_0.

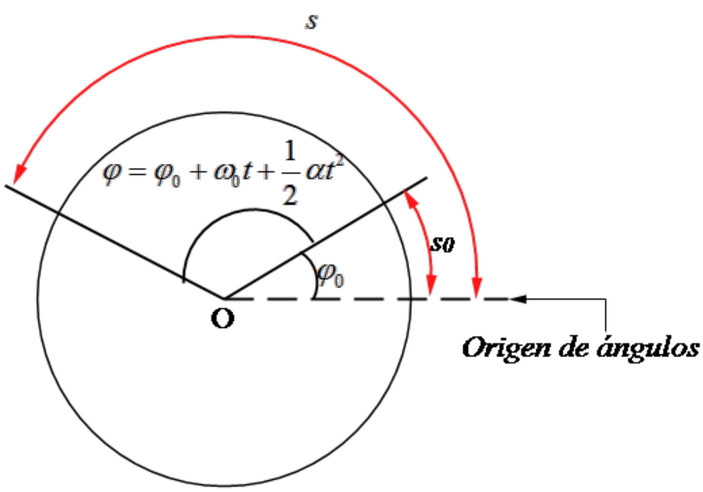


Figura 5.12: Movimiento circular uniformemente variado

En cuanto a las longitudes de arco recorridas, evidentemente:

$$s_0 = \varphi_0 \cdot R \Rightarrow s = \varphi \cdot R \tag{5.73}$$

Estando φ_0 y φ expresados en radianes. Si $\alpha > 0$ el movimiento es circular uniformemente acelerado mientras que para $\alpha < 0$ el movimiento es circular uniformemente retardado.(Siendo válidas para ambos las expresiones anteriores).

Si $|\vec{a}_t| \neq cte$, α ya no es constante y tanto $a_t = \alpha \cdot R$ como $a_n = \omega^2 R$ variarán con el tiempo. El movimiento es variado en general, dependiendo las expresiones de ω y φ de la relación que en cada caso ligue a α o a a_t con el tiempo.

5.8. Movimiento parabólico

5.8.1. Composición de dos movimientos de direcciones perpendiculares, uno uniforme y otro uniformemente variado sin velocidad inicial

Tomemos como eje X la dirección del movimiento uniforme y sea $\vec{v}_1$ la velocidad. El movimiento uniformemente acelerado estará por tanto dirigido según el eje Y. Sea $\vec{a}_2$ su aceleración y supongamos que no existe velocidad inicial.

Se puede escribir que $\vec{v}_1 = v_1 \cdot \vec{i}$ y $\vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{j}$

El movimiento resultante será un movimiento de aceleración constante $\vec{a} = \vec{a}_2 = a_2 \cdot \vec{j}$ como se deduce al efectuar la composición de aceleraciones y ser el movimiento según el eje X uniforme; $(\vec{a}_1 = 0)$.

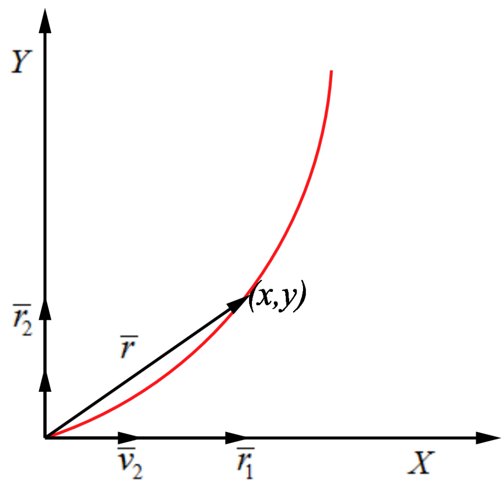


Figura 5.13: Movimiento parabólico

La velocidad del movimiento resultante en cualquier instante será:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = v_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot t \cdot \vec{j} \tag{5.74}$$

Luego las componentes de $\vec{v}$ son: $v_x = v_1$; $v_y = a_2 \cdot t$ y $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

La posición del móvil en cualquier instante estará dada por:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{r}_1 = \vec{v}_1 \cdot t = v_1 \cdot t \cdot \vec{i} \\ \vec{r}_2 = \dfrac{1}{2} a_2 \cdot t^2 \cdot \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{r} = v_1 \cdot t \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} a_2 \cdot t^2 \cdot \vec{j} \tag{5.75}$$

y las componentes de $\vec{r}$ serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = v_1 \cdot t \\ y = \dfrac{1}{2} a_2 \cdot t^2 \end{array} \right. \tag{5.76}$$

Eliminando el tiempo entre estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_2}{v_1^2} \cdot x^2 \tag{5.77}$$

que es una parábola de eje Y.

El movimiento resultante es, por tanto, un movimiento parabólico, en el cual la posición, velocidad y aceleración del móvil en cada instante se determinan como hemos indicado.

5.8.2. Composición de dos movimientos de direcciones perpendiculares, uno uniforme y otro uniformemente variado con velocidad inicial: Movimiento de proyectiles

Cuando se lanza una partícula desde un punto de la superficie terrestre con una velocidad $\vec{v}_0$ que forma un ángulo α con la horizontal, el movimiento por ella realizado puede considerarse como el movimiento resultante de dos, uno horizontal y uniforme y otro vertical uniformemente variado.

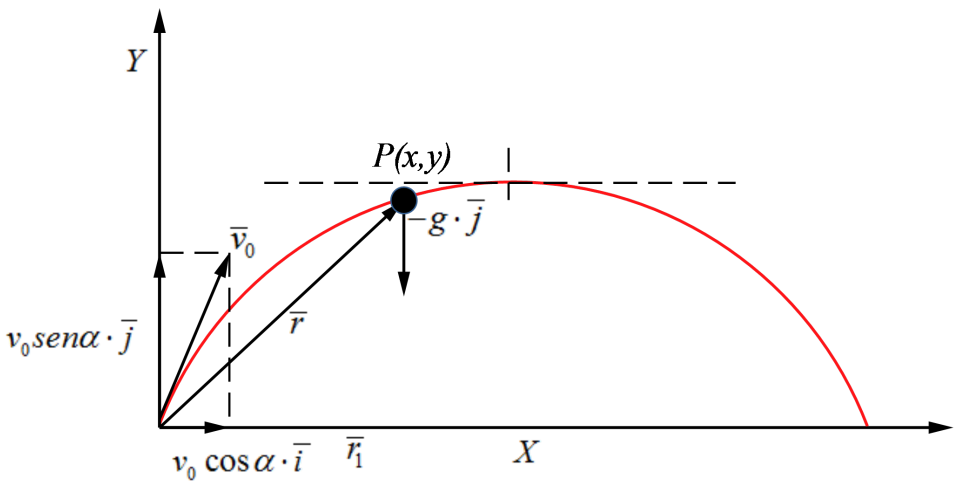


Figura 5.14: Tiro parabólico

Tomados el eje horizontal como eje X y el vertical como eje Y, tendremos:

- Movimiento según eje X: Uniforme de velocidad:

$$\vec{v}_1 = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{i} \tag{5.78}$$

- Movimiento según eje Y: Uniformemente variado de velocidad inicial $v_0 \cdot sen(\alpha) \cdot \vec{j}$ y aceleración $-g \cdot \vec{j}$ (siendo g el valor correspondiente a la aceleración de la gravedad). La velocidad de dicho movimiento en cualquier instante será por tanto:

$$\vec{v}_2 = (v_0 \cdot sen(\alpha) - g \cdot t) \cdot \vec{j} \tag{5.79}$$

La aceleración, velocidad y posición de la partícula en el movimiento resultante, se tendrá sin más que aplicar las correspondientes leyes de composición.

La aceleración será constante:

$$veca = -g \cdot \vec{j} \tag{5.80}$$

La velocidad será:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \vec{i} + (v_0 \cdot sen(\alpha) - g \cdot t) \cdot \vec{j} \tag{5.81}$$

Luego las componentes cartesianas de $\vec{v}$ en cualquier instante son:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \quad ; \quad v_y = v_0 \cdot sen(\alpha) - g \cdot t; \quad \text{y el módulo } |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{5.82}$$

La posición en cualquier instante estará determinada por el vector de posición $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ siendo:

- el vector de posición correspondiente al movimiento según el eje X : $\vec{r}_1 = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \cdot \vec{i}$
- el vector de porsición correspondiente al movimiento según el eje Y : $\vec{r}_2 = (v_0 \cdot sen(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2) \cdot \vec{j}$

Luego:

$$\vec{r} = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \cdot \vec{i} + (v_0 \cdot sen(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2) \cdot \vec{j} \tag{5.83}$$

Y sus componentes cartesianas:

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y = v_0 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases} \tag{5.84}$$

Eliminando el tiempo entre estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = tg(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 \tag{5.85}$$

que corresponde a una parábola.

Ejercicio

Se propone como ejercicio determinar, en función de v_0 y α, la altura máxima y el alcance horizontal alcanzados por la partícula.

5.9. Ejercicios resueltos

1. Las coordenadas de un cuerpo en movimiento son:

   x = t^2; y = $(t\text{-}1)^2$

   a) Encontrar la ecuación cartesiana de la trayectoria.

   b) Representar gráficamente la trayectoria

   c) Encontrar las coordenadas cuando la velocidad es 10 m/s

   d) Calcular las aceleraciones tangencial y normal en cualquier instante.

   Solución:

   a)

$$\sqrt{x} = t \quad \Rightarrow \quad y = (\sqrt{x} - 1)^2$$

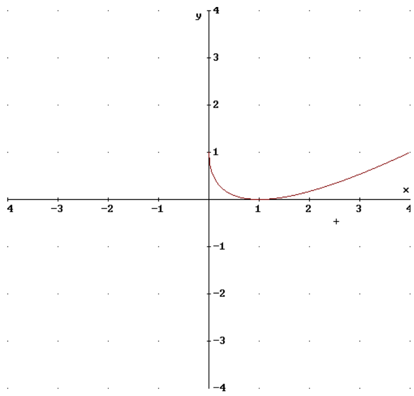


Figura 5.15: Problema 1

b)

$$c) \rightarrow \vec{r} = t^2\vec{i} + (t-1)^2\vec{j}; \vec{v} = 2t\vec{i} + 2(t-1)\vec{j}$$
$$|\vec{v}| = 2\sqrt{t^2+(t-1)^2} = 10 \Rightarrow t = 4s \rightarrow x = 16\text{m}; y = 9\text{m}$$
$$d) \rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\,\vec{i} + 2\vec{j}; a_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} = \frac{4t-2}{\sqrt{2t^2-2t+1}}\, {}^{m}\!/_{s^2}; \qquad \vec{a}_t = a_t\,\vec{\tau}$$
$$|\vec{a}_n|^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{a}_t|^2 \rightarrow |\vec{a}_n| = \sqrt{(8 - \frac{(4t-2)^2}{2t^2-2t+1}} = \sqrt{\frac{4}{2t^2-2t+1}}\ \text{m/s}^2$$
$$\vec{a}_n = a_n\,\vec{n} \qquad \rightarrow \qquad \vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$$

2. En un cierto instante los vectores velocidad y aceleración de una partícula son:

   $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$(m/s) y $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ (m/s^2).

   Determinar:

   a) Las componentes tangencial y normal de la aceleración.

   b) El radio de curvatura en dicho instante.

   Solución:

a)

$$\vec{a}_t = \frac{d\,|\vec{v}|}{dt} \cdot \vec{\tau}_0 = (\vec{a} \cdot \vec{\tau}_0) \cdot \vec{\tau}_0$$
$$\vec{\tau}_0 = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{9 + 16 + 144}}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{\tau}_0 = \left(3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{\sqrt{9 + 16 + 144}}\right) = {}^{65}\!/_{13} = 5$$
$$\vec{a}_t = 5 \cdot \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{13} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$
$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \left(3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}\right) - \left(5 \cdot \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}}{13}\right)$$
$$\vec{a}_n = \frac{1}{13} \cdot 24\vec{i} + 45\vec{j} - 21\vec{k}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b)

$$\rho = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_n|} = \frac{169}{3\sqrt{2}}\ \mathrm{m}$$

3. El vector de posición del punto P de un sólido rígido en movimiento es $\vec{r} = (t^3 - 2)\vec{i} + 3t\vec{j} + (t^2 - 1)\vec{k}$ (r en cm y t en s).
Determinar en el instante t =1 s:

   a) La posición, velocidad y aceleración del punto P.
   b) Las componentes intrínsecas de la aceleración del punto P

Solución:

a)

$$\vec{r} = t^3 - 2\vec{i} + 3t\vec{j} + t^2 - 1\vec{j}\mathrm{cm}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3t^2\vec{i} + 3\vec{j} + 2(t-1)\vec{k}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \rightarrow\ t = 1\ \mathrm{s} \rightarrow$$
$$\rightarrow\mid \vec{v}_1 \mid= 3\sqrt{2}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6t\vec{i} + 2k\vec{k} = \ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \rightarrow\ t = 1\ \mathrm{s} \rightarrow\rightarrow\mid \vec{a}_1 \mid= \sqrt{40}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$$

b)

$$t = 1\,\mathrm{s} \rightarrow\ \vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \rightarrow \vec{a}_1 = 6t\vec{i} + 2k\vec{k}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \rightarrow \tau_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$
$$t = 1\,\mathrm{s} \rightarrow\ \vec{a_{t1}} = (|\vec{a}_{t1}||\vec{\tau}_1|)\vec{\tau}_1 = \frac{6}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$$
$$\rightarrow\ \vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}\ \rightarrow\ \vec{a_{n1}} = \vec{a_1} - \vec{a_{n1}} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}$$

4. La velocidad de una partícula que se mueve en el plano xy, viene dada por la ecuación $\vec{v} = (2t-6)\vec{i} + (3t^2 - 18t + 27)\vec{j}$ Si en el instante inicial la partícula se encuentra en el punto
(9, −27), determinar la ecuación de su trayectoria.
Solución

$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$
$\int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} ((2t-6)\vec{i} + (3t^2 - 18t + 27)\vec{j})\, dt$
$\vec{r} - \vec{r}_0 = (t^2 - 6t)\vec{i} + (t^3 - t^2 + 27t)\vec{j}$
Como $\vec{r}_0 = 9\vec{i} - 27\vec{j} \rightarrow\ \vec{r} = (t^2 - 6t + 9)\vec{i} + (t^3 - t^2 + 27t - 27)\vec{j}$

La trayectoria en paramétricas será: $\begin{cases} x = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2 \\ y = t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = (t-3)^2 \end{cases}$

Eliminando el tiempo: $y = x^{2/3}$

5. El movimiento de una partícula viene dado por el vector de posición:
$\vec{r} = (4\, sen\, \omega\, t)\, \vec{i} + (4\, \cos\, \omega\, t)\, \vec{j} + 3$ (unidades SI)
siendo ωg una magnitud constante, determinar:

   a) La velocidad y la aceleración de la partícula
   b) las componentes intrínsecas del vector aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria.
   c) ¿Qué tipo de trayectoria recorre la partícula? ¿Qué tipo de movimiento realiza?
   d) La ecuación del movimiento a lo largo de la trayectoria (s = s (t)).

Solución:
a)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (4\, sen\, \omega\, t)\, \vec{i} + (4\, \cos\, \omega\, t)\, \vec{j} + 3 \text{ m} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = (4\,\omega\, \cos\, \omega\, t)\, \vec{i} + (4\,\omega\, sen\, \omega\, t)\, \vec{j}\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = (-4\,\omega^2 sen\, \omega\, t)\, \vec{i} + (-4\,\omega^2 \cos\, \omega\, t)\, \vec{j}\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

b)

$$\vec{v} = (4\,\omega\, \cos\, \omega\, t)\, \vec{i} + (4\,\omega\, sen\, \omega\, t)\, \vec{j}\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \ \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(4\omega^2)(\cos^2\, \omega t + \cos^2\, \omega t)} = 4\,\omega\, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \ \rightarrow \vec{a}_n = \vec{a} = (-4\,\omega^2 sen\, \omega\, t)\, \vec{i} + (-4\,\omega^2 \cos\, \omega\, t)\, \vec{j}\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ \rightarrow |\vec{v}| = 4\,\omega^2\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$
$$\vec{a}_n = \frac{|v|^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{|v|^2}{\vec{a}_n} = \frac{16\,\omega^2}{4\,\omega^2}\, \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c)

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4\ \operatorname{sen}\omega t \\ y = 4\ \cos\omega t \end{array}\right\} x^2 + y^2 = 16 \quad \text{trayectoria circular de radio igual a 4 m}$$

$$|\vec{v}| = 4\,\omega^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ \text{(constante)}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0\ \rightarrow \vec{a}_n = 4\,\omega\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow \text{movimineto circular uniforme}$$

d)

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \quad ds = |\vec{v}|\,dt = 4\,\omega\ dt$$
$$\rightarrow s = \int ds = 4\omega\ \int ds = 4\omega\ t + C$$
$$\rightarrow \text{si}\ \ t = 0\ \Rightarrow s = s_0 = C\ t = 0\ \Rightarrow s = s_0 + 4\omega\ t$$

5.10. Problemas propuestos

Problema 1

Un móvil describe una trayectoria dada por la ecuación vectorial:

$\vec{r} = (t^2 + 3t - 1)\,\vec{i} + (t^3 + 1)\vec{j} + t^2\vec{k}$ ($\vec{r}$en metros y t en segundos). Determinar:

1. Los vectores velocidad y aceleración en cualquier instante.
2. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.
3. La ecuación cartesiana de la trayectoria.
4. Las componentes intrínsecas de la aceleración y el valor del radio de curvatura de la trayectoria en el instante inicial t= 0.

Problema 2

En un cierto instante los vectores velocidad y aceleración de una partícula son:

$\vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$(m/s) y $\vec{a} = 2\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}$ (m/s^2). Determinar: a) Las componentes tangencial y normal de la aceleración. b) El radio de curvatura en dicho instante.

Problema 3

En un cierto instante los vectores velocidad y aceleración de una partícula forman un ángulo de 120^o. Si los módulos de dichos vectores son 5 cm/s y 10 cm/s^2 respectivamente, calcular las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura en dicho instante.

Problema 4

Una partícula se mueve a 10 cm/s en una circunferencia de 0,2 m de radio. En el instante t =0 la partícula está sobre el eje OX. Calcular: a) Las componentes x e y de la velocidad de la partícula y su posición para $t = 4\pi/3$ s. b) Las componentes x e y de la aceleración de la partícula para $t = 0$.

Problema 5

Una partícula que describe una trayectoria circular $x^2 + y^2 = 100$, cuando se encuentra en el punto $\vec{r} = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$ su velocidad y aceleración valen respectivamente: $\vec{v} = 40\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$; $\vec{a} = -150\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$. Determinar los valores de v_y (componente cartesiana); v (módulo de la velocidad); a_y(componente cartesiana), a_n(componente normal de la aceleración) y las componentes intrínsecas de vector aceleración a_n,y a_t

(Nota: distancias en cm *y tiempos en* s)