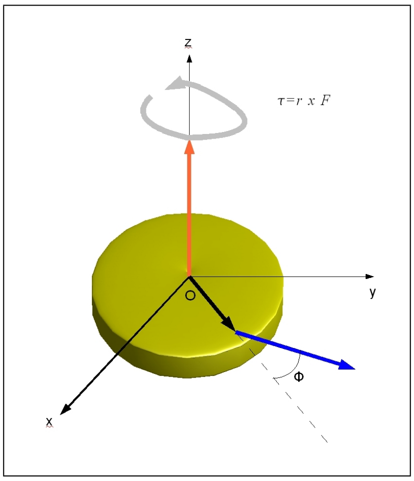
Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)



Unidad 4: Vectores

Universidad Politécnica de Madrid

5 de marzo de 2010

4.1. Planificación de la unidad

4.1.1. Objetivos

1. Clasificar las magnitudes más importantes en escalares y vectoriales.
2. Expresar un vector en sus componentes y operar con los vectores.
3. Conocer las propiedades del producto escalar.
4. Conocer las propiedades del producto vectorial.
5. Utilizar los productos escalar y vectorial para calcular distancias, áreas, etc de interés en geometría.

4.1.2. Actividades

1. Lectura del resumen del tema
2. Realización del cuestionario.
3. Realización de los ejercicios
4. Actividades complementarias
    a) Buscar información sobre vectores en internet.
    b) Redactar una pequeña reseña (máximo 1 página).

4.1.3. Bibliografía

1. Libros de primero y segundo de Bachillerato.
2. Libros de primero y segundo de Bachillerato de Matemáticas.
3. P.A. Tipler y G. Mosca, Física para Ciencias e Ingeniería", 5^a Edición, Editorial Reverté, 2005.

4.1.4. Enlaces relacionados

1. Proyecto Descartes (Matemáticas ESO y Bachillerato)::
    - Descartes: `http://descartes.cnice.mec.es/`
2. Página web con actividades de vectores: `http://www.xtec.cat/~jbartrol/vectores/index.html`

4.2. Magnitudes escalares y vectoriales

Una magnitud *escalar* está determinada completamente por un único número con las unidades apropiadas y no tiene dirección, ni sentido. Una magnitud *vectorial* está determinada completamente por un número con las unidades apropiadas (módulo), una dirección y un sentido

Un ejemplo lo tenemos en la figura 4.1 Una partícula viaja de $\vec{A}$ a $\vec{B}$ a lo largo del camino representado por la línea roja discontinua esta es la distancia que ha recorrido y es un escalar El desplazamiento es la línea negra continua de $\vec{A}$ a $\vec{B}$ El desplazamiento es independiente del camino que tomemos entre ambos puntos El desplazamiento es un vector.

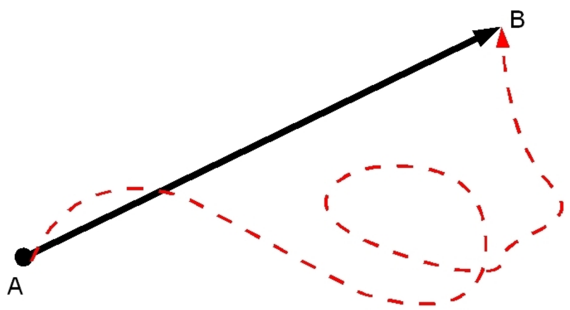


Figura 4.1: Ejemplo de vector

4.3. Sistemas de referencia

Se utilizan para describir la posición de un punto en el espacio. Un sistema de coordenadas consiste en:

- un punto de referencia que llamaremos origen
- ejes específicos con escalas y etiquetas
- instrucciones de cómo designar un punto relativo al origen y a los ejes

Existen varios sistemas de coordenadas de interés en los problemas de la Física. El sistema más utilizado es el sistema de coordenadas cartesianas, bien en el plano o en el espacio. También resultan de interés las coordenadas polares en el plano, las coordenadas cilíndricas y esféricas en el espacio.

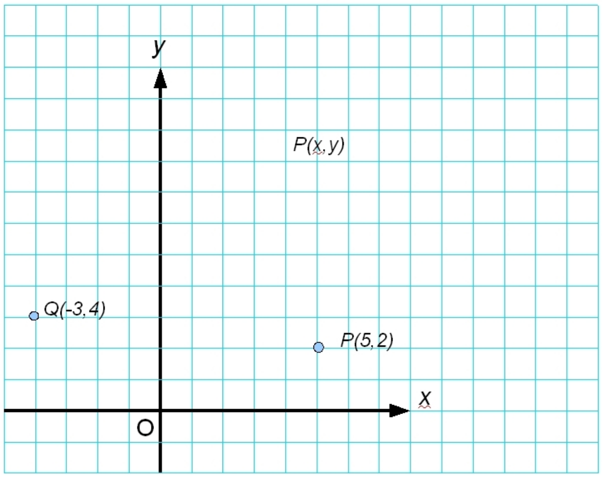


Figura 4.2: Sistemas de coordenadas cartesianas

4.3.1. Sistema de coordenadas cartesianas en el plano

También llamado sistema de coordenadas rectangular. Consta de dos ejes x e y que se cortan en el origen, formando un ángulo recto. Los puntos se designan (x, y)

4.3.2. Sistema de coordenadas polares en el plano

Es necesario definir un origen y una línea de referencia El punto se define como la distancia r desde el origen en dirección del ángulo θ, en dirección antihoraria desde la línea de referencia. Los puntos del plano se denotan como (r, θ)

Para hacer el cambio de coordenadas entre coordenadas cartesianas y polares en el plano, construimos un triángulo rectángulo a partir de r y θ

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Para hacer el cambio inverso, tomamos r como la hipotenusa y θ como el ángulo con el eje.

$$\tan\, \theta = \frac{y}{x}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

θ se toma en sentido antihorario desde el eje X positivo

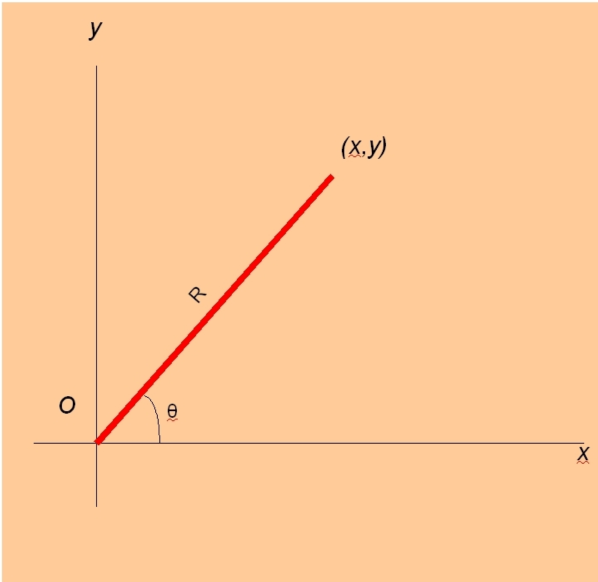


Figura 4.3: Sistemas de coordenadas polares

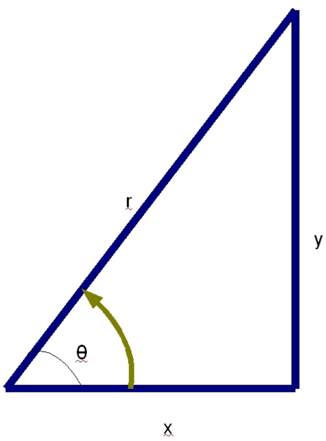


Figura 4.4: Cambio de coordenadas cartesianas a polares

4.3.3. Sistema de coordenadas cartesianas en el espacio

Se añade un eje Z perpendicular a los ejes X e Y de las coordenadas cartesianas en el plano. Los puntos se denotan con las coordenadas (x, y, z).

4.3.4. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son:

- Radio r: distancia hasta P desde el origen.
- Ángulo θ: ángulo entre el vector de posición de P y el eje Z. (como la latitud).
- Ángulo azimutal ϕ: ángulo entre la proyección del vector de posición de P y el eje X. (como la longitud)

Los puntos se denotan como (r, θ, ϕ).

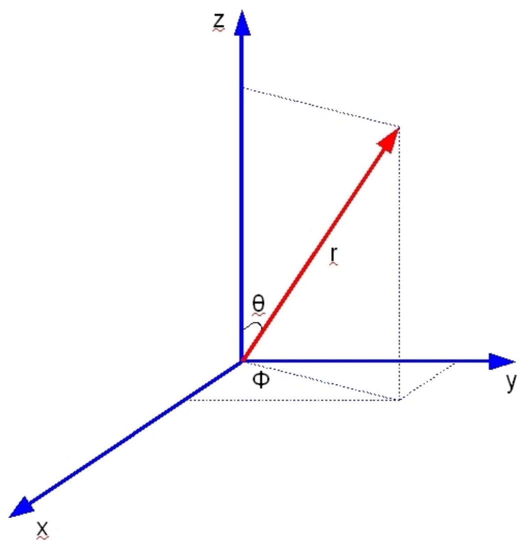


Figura 4.5: Sistema de coordenadas esféricas

4.3.5. Coordenadas cilíndricas

La coordenadas cilíndricas son:

- Radio ρ: distancia hasta P desde el eje Z.
- Ángulo azimutal ϕ: ángulo entre la proyección del vector de posición de P y el eje X. (como la longitud)
- Coordenada z: componente del vector de posición de P a lo largo del eje Z (igual que la coordenada z del sistema de coordenadas cartesianas en el espacio).

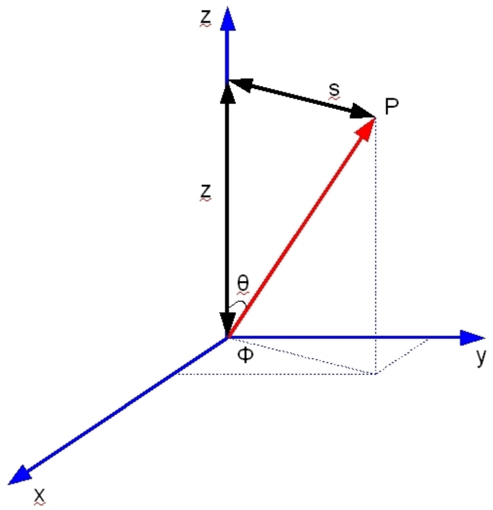


Figura 4.6: Sistemas de coordenadas cilíndricas

4.4. Operaciones con vectores

4.4.1. Igualdad de dos vectores

Diremos que dos vectores son iguales, si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Los vectores que se muestran en la figura 4.7 son iguales.

4.4.2. Suma gráfica de vectores

La suma de dos vectores es otro vector. Los vectores que se suman deben tener las mismas magnitudes y unidades.

Para sumar vectores gráficamente hay que situar los vectores uno a continuación del otro y unir el origen del primer vector con el final del último.

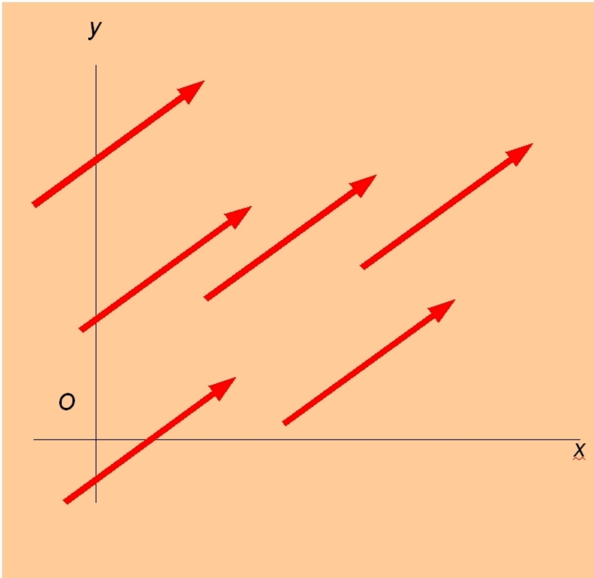


Figura 4.7: Vectores iguales

En la figura 4.8 podemos ver la suma de dos vectores.

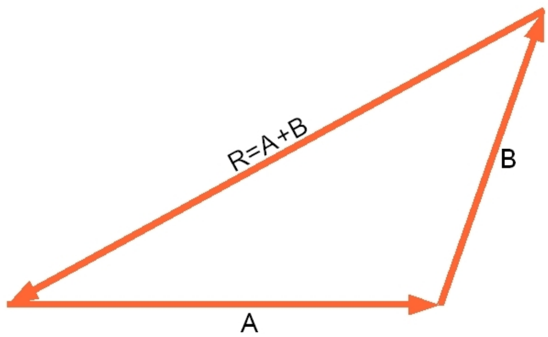


Figura 4.8: Suma de dos vectores

Cuando son varios los vectores que se quieren sumar se sigue con este proceso hasta que se obtenga el vector suma. En la figura 4.9 se puede ver la construcción geométrica necesaria para hallar la suma de varios vectores de forma gráfica.

4.4.3. Propiedades de la suma de vectores

1. Propiedad conmutativa:

   La suma es independiente del orden de los vectores.

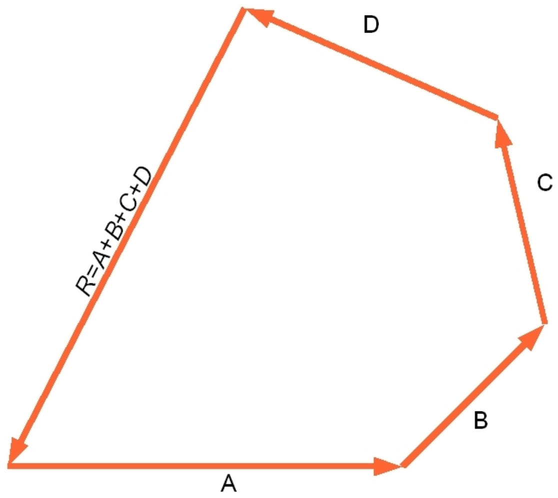


Figura 4.9: Suma de varios vectores

2. Propiedad asociativa: Cuando sumamos tres o más vectores, la suma es independiente de la forma en que los vectores se agrupan.

4.4.4. Diferencia de vectores

La diferencia de vectores es un caso especial de suma de vectores Para calcular $\vec{A} - \vec{B}$, se hace $\vec{A} + (-\vec{B})$, por lo que daremos la vuelta al vector $\vec{B}$ y continuaremos con el procedimiento normal de la suma de vectores.

En la figura 4.10 podemos ver la construcción geométrica para poder hallar la diferencia entre dos vectores.

4.4.5. Multiplicar o dividir un vector por un escalar

El resultado de la multiplicación o de la división es un vector. El módulo del vector se multiplica o divide por el escalar.

Si el escalar es positivo, la dirección y sentido del resultado son los mismos que los del vector original. Si el escalar es negativo, la dirección del resultado es la misma que la del vector original, pero su sentido es opuesto.

Las unidades del vector resultado son el producto de las unidades del escalar y el vector. En caso de que el escalar no tenga unidades serán las unidades del vector original.

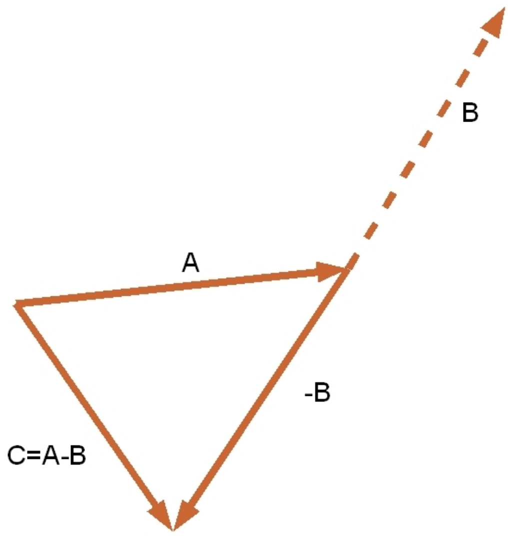


Figura 4.10: Diferencia de dos vectores

4.4.6. Componentes de un vector

Un vector se puede expresar matemáticamente mediante sus componentes. Las componentes de un vector son las proyecciones del mismo en los ejes de coordenadas. En la figura 4.11 podemos ver las proyecciones de un vector en un sistema de ejes cartesianos en el plano.

4.4.7. Cosenos directores

En la figura 4.11 se puede ver que el vector forma unos ángulos con el sentido positivo de los ejes coordenados, α, β y γ, que se denominan ángulos directores.

Los cosenos de esos ángulos son los cosenos directores del vector. La relación que tienen éstos con las componentes del vector se puede expresar escribiendo las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_x &= a\ \cos\alpha \\ a_y &= a\ \cos\beta \\ a_z &= a\ \cos\gamma \end{aligned} \tag{4.1}$$

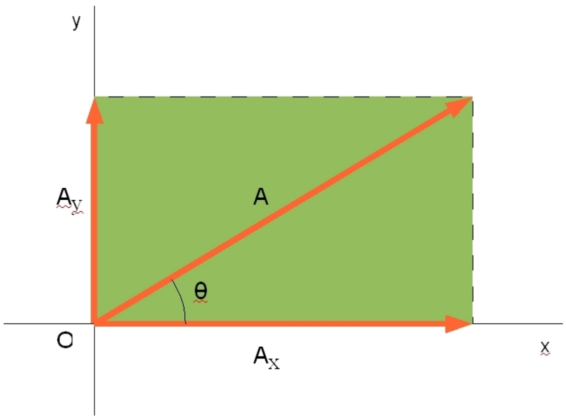


Figura 4.11: Componentes de un vector

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$a^2 = a^2 \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{4.2}$$

4.4.8. Vectores unitarios

Un vector unitario es un vector sin unidades cuyo módulo es exactamente la unidad. Se utilizan para especificar dirección y sentido. Por ejemplo, dado un vector $\vec{a}$, podemos hallar un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{a}$, sin más que escribir:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

En un sistema de coordenadas rectangular o cartesiano, podemos definir un conjunto de vectores unitarios perpendiculares dos a dos. Los llamaremos

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

donde $\vec{i}$ es el vector unitario en el eje de las X, $\vec{j}$ es el vector unitario en el eje de las Y y $\vec{k}$ es el vector unitario en el eje de las Z.

Como vimos anteriormente, para hallar las componentes de un vector, se proyecta éste en las tres direcciones X, Y y Z, hallando A_x, A_y y A_z y escribiendo el vector:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

De modo que tenemos un vector expresado como una suma de vectores unitarios.

Utilizando las componentes de un vector podemos utilizarlas para operar con los vectores. Es fácil ver que la suma de vectores se puede obtener sumando las componentes de los vectores que queremos sumar. La componente X del vector suma será la suma de las componentes X de los vectores y lo mismo con las componentes Y y Z.

Por ejemplo, tomando $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

podemos calcular la suma como,

$$R_x = A_x + B_x; R_y = A_y + B_y \text{ y } R_z = A_z + B_z$$

4.5. Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores se escribe $\vec{A} \cdot \vec{B}$ Se define como: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

donde θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$

por lo tanto, se trata de un escalar.

Con esta definición, es fácil ver que si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es nulo, pues el coseno de un ángulo recto es nulo.

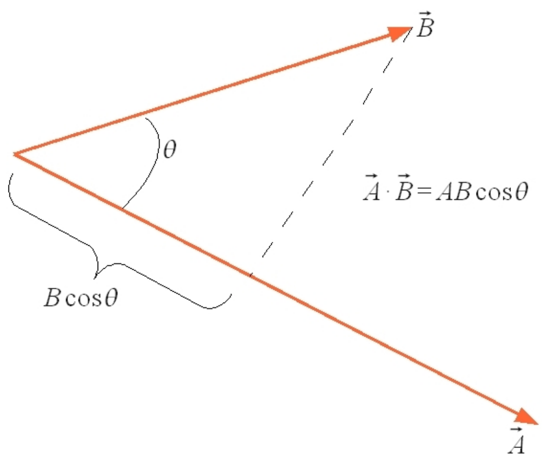


Figura 4.12: Interpretación geométrica del producto escalar de dos vectores

La interpretación del producto escalar se recoge en la figura 4.12. En esta figura se puede ver que el producto escalar corresponde al producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro en la dirección del primer vector.

4.5.1. Propiedades del producto escalar

1. Propiedad conmutativa $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
2. Propiedad distributiva $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

4.5.2. Expresión del producto escalar utilizando sus componentes

Utilizando la expresión en componentes de los vectores en coordenadas cartesianas es sencillo calcular el producto escalar.

Utilizando la expresión de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en vectores unitarios:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

Como los vectores unitarios son perpendiculares entre sí, resulta que podemos expresar el producto escalar como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x\ B_x + A_y\ B_y + A_z\ B_z$$

4.6. Producto vectorial

4.6.1. Definición de Producto Vectorial

Dados dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ definimos producto vectorial como un vector, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ con las siguientes características:

1. El módulo de $\vec{C}$ es $AB \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
2. La dirección es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
3. El sentido viene dado por el sentido de avance del sacacorchos llevando el vector $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$.

Podemos ver que el producto vectorial es nulo si ambos vectores son paralelos o antiparalelos.

En efecto, si $\vec{A}$ es paralelo a $\vec{B}$ ($\theta = 0°$ ó $\theta = 180°$), entonces $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

Por lo tanto, es fácil comprobar que $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, ya que un vector es paralelo a sí mismo.

La cantidad $AB \operatorname{sen}\theta$ es igual al área del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

La mejor forma de hallar el sentido del producto vectorial es la regla de la mano derecha. Podemos ver la explicación de la regla de la mano derecha en la figura 4.13.

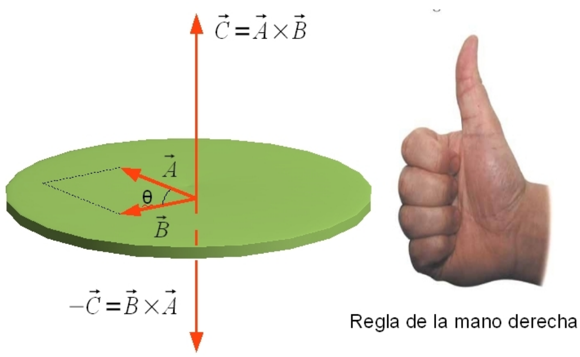


Figura 4.13: Regla de la mano derecha

4.6.2. Propiedades del producto vectorial

1. El producto vectorial no es conmutativo. El orden en el que los vectores se multiplican es importante.

   Al cambiar de orden aparece un signo menos $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

2. Si $\vec{A}$ es perpendicular a $\vec{B}$, entonces se cumple $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$

3. El producto vectorial cumple la ley distributiva $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

4. Los signos son intercambiables en el producto vectorial $\vec{A} \times (-\vec{B}) = -\vec{A} \times \vec{B}$

4.6.3. Producto vectorial y momento de un vector

Una de las aplicaciones más importantes del producto vectorial es el momento de un vector, ya que éste momento describe algunos fenómenos físicos de interés, como el momento angular o el momento de fuerzas.

Definimos el momento de un vector como el producto vectorial del vector de posición del origen del vector y el propio vector.

El vector momento de fuerzas (τ) se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición del punto de aplicación y el vector fuerza aplicada $\tau = r \times F$

4.6.4. Cálculo del producto vectorial utilizando determinantes

El producto vectorial se puede calcular utilizando un determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Expandiendo los determinantes nos da

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\ \hat{\mathbf{i}} - (A_x B_z - A_z B_x)\ \hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x)\ \hat{\mathbf{k}}$$

4.7. Producto mixto

Definiremos el producto mixto de tres vectores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ a la siguiente expresión:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

Obviamente el resultado es un escalar, que se puede demostrar que es el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores y numéricamente se puede escribir:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

4.8. Ejercicios resueltos

4.8.1. Dados los vectores $\vec{a} = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$:

a) Halla el ángulo formado por ambos vectores

b) Halla la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$.

c) Halla los ángulos que forma el vector $\vec{a}$ con los ejes coordenados.

SOLUCIÓN:

a) Halla el ángulo formado por ambos vectores
Con las propiedades del producto escalar podemos hallar el coseno del ángulo formado entre ambos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\theta \tag{4.3}$$

De forma que despejando obtenemos:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = -0{,}985527 \tag{4.4}$$

Con lo que el ángulo vale:

$$\boxed{\theta = 170{,}29^\circ} \tag{4.5}$$

b) Halla la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$.

La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es el producto del módulo del vector $\vec{a}$ por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{Proy_{\vec{a}} = |\vec{a}|\ \cos\theta = -2{,}41} \tag{4.6}$$

c) Halla los ángulos que forma el vector $\vec{a}$ con los ejes coordenados.

Para hallar los ángulos es necesario calcular los cocientes entre las correspondientes coordenadas y el módulo del vector:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 114{,}09^\circ \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \beta = 35{,}26^\circ \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \gamma = 114{,}09^\circ \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.8.2. Dados los vectores $\vec{c} = 4\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$ y $\vec{d} = \vec{i} - 3\ \vec{k}$:

a) Halla un vector unitario perpendicular a ambos vectores.

b) Calcula el área del paralelogramo definido por ambos vectores.

c) Calcula el momento resultante con respecto al origen de coordenadas, si el punto de aplicación de ambos vectores es el $O'(1, 2, -2)$.

SOLUCION:

a) Halla un vector unitario perpendicular a ambos vectores.

Para hallar un vector unitario perpendicular a ambos se puede utilizar el producto vectorial:

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k} \tag{4.8}$$

Para que el vector sea unitario dividimos por su módulo:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{164}}\left(-12\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}\right)} \tag{4.9}$$

b) Calcula el área del paralelogramo definido por ambos vectores.

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de ambos vectores:

$$\boxed{|\vec{c} \times \vec{d}| = \sqrt{164}} \tag{4.10}$$

c) Calcula el momento resultante con respecto al origen de coordenadas, si el punto de aplicación de ambos vectores es el $O'(1, 2, -2)$.

Podemos hallar el momento de cada uno de los vectores y luego sumarlos:

$$\vec{\tau}_{\vec{c}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 12\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \tag{4.11}$$

$$\vec{\tau}_{\vec{d}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\,\vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k} \tag{4.12}$$

De manera que el momento resultante es la suma de ambos vectores:

$$\boxed{\vec{\tau}_{Res} = 6\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}} \tag{4.13}$$

Se puede comprobar que, en este caso, el momento resultante es igual al momento de la resultante:

$$\vec{R} = \vec{i} + 4\,\vec{j} - \vec{k} \tag{4.14}$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{\vec{R}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6\,\vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}} \tag{4.15}$$

4.9. Ejercicios propuestos

4.9.1. Dado un punto $P(x, y)$:

a) Calcular el ángulo que forma su vector de posición, $\overrightarrow{r}$, con los ejes X e Y.

b) Escribir el vector $\overrightarrow{r}$ en coordenadas polares.

Si se tiene otro sistema de coordenadas $X'Y'$, girado 30^0 respecto al XY, en sentido levógiro:

a) Escribir el vector $\overrightarrow{r}$ en función de los vectores unitarios del sistema $X'Y'$, obteniendo las coordenadas x' e y' del punto P.

b) Escribir los vectores unitarios del sistema $X'Y'$ en función de los del sistema XY, y viceversa.

4.9.2. Se tiene un sistema de coordenadas polares, r y θ, medidas tal como se muestra en la figura 4.14. En el punto (2, 30°) existe un campo eléctrico de 100 V m^{-1}, dado por el vector:

$$\overrightarrow{E} = \frac{100}{\sqrt{2}}\,\overrightarrow{u_r} + \frac{100}{\sqrt{2}}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Expresar dicho campo en el sistema de coordenadas cartesiano XY.

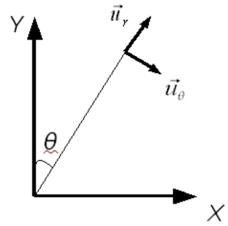


Figura 4.14: Figura del problema 2

4.9.3. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo módulo. Su suma es un vector $\vec{c}$ de módulo 8, y su producto escalar es -32:

1) Calcular el módulo de dichos vectores.

A continuación, supóngase que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están contenidos en el plano XY y que $\vec{a}$ tiene la dirección y sentido de $\vec{u}_x$:

2) Expresar los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en función de sus componentes cartesianas.

4.9.4. Escribir dos vectores unitarios perpendiculares al vector $3\,\vec{u}_x + 2\,\vec{u}_y - \vec{u}_z$.

4.9.5. Dados los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$:

a) Calcula el ángulo θ entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Halla el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) Halla el momento de cada uno de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con respecto al origen, teniendo en cuenta que están aplicados en los puntos $A(1,-1,0)$ y $B(0,3,-2)$, respectivamente.