Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)

Unidad 9 : Aplicaciones de las leyes de Newton

Universidad Politécnica de Madrid

16 de abril de 2010

9.1. Planificación de la Unidad

9.1.1. Objetivos

1. Repasar las tres leyes de Newton a distintos problemas:

    a) Planos inclinados

    b) Poleas

    c) Sistemas con rozamiento

9.1.2. Actividades

1. Lectura del tema

2. Realización del cuestionario de la unidad (enlace)

3. Resolución de los ejercicios propuestos básicos

4. Resolución de los ejercicios avanzados.

5. Actividades complementarias:

    a) Buscar información sobre dinámica en el ámbito de tu titulación. Listado de asignaturas que se relacionan, directa o indiréctamente, con ella.

    b) Redactar una pequeña reseña (máximo 1 página).

9.1.3. Bibliografía

1. Libros de primero y segundo de Bachillerato

2. P.A. Tipler y G. Mosca, *Física para Ciencias e Ingeniería*, 5^a edición, Editorial Reverté, 2005. Capítulo 5.

9.1.4. Enlaces relacionados

1. Proyecto Newton:

    a) Dinámica

    b) Rozamiento

2. Wikipedia:

a) Leyes de Newton

b) Rozamiento

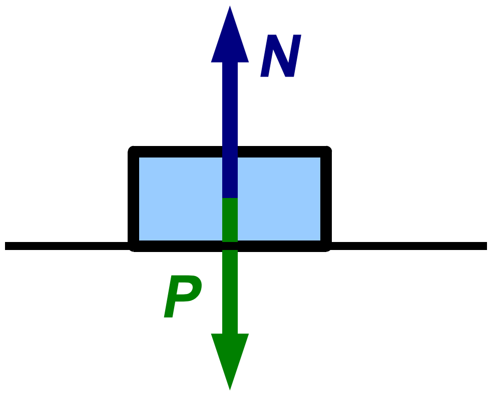

Figura 9.1: Fuerzas sobre un cuerpo en reposo sobre una superficie. La fuerza peso y la fuerza normal se cancelan exactamente.

9.2. Fuerzas normales

Antes de entrar a discutir las aplicaciones más habituales de las leyes de Newton, hablemos de las fuerzas normales.

9.2.1. Cuerpos sobre superficies

Un situaciones práctica común se da cuando un cuerpo está en contacto con una superficie. Consideremos un objeto que reposa horizontalmente en una superficie. El objeto está sujeto a la fuerza peso, debida al campo gravitatorio, que le empuja hacia abajo. Si el cuerpo está en equilibrio, este peso debe estar compensado por una fuerza igual pero de sentido contrario, hacia arriba. Esta es la fuerza normal, que la superficie ejerce sobre el objeto. Un error común, causado por el hecho de que estas fuerzas sean iguales pero de sentido opuesto, es creer que la fuerza normal es la fuerza de reacción de la fuerza peso (en el sentido de la Tercera Ley de Newton). Esto es erróneo, entre otras cosas porque la fuerza de acción y la de reacción se ejercen siempre en cuerpos distintos, nunca sobre el mismo.

En todo caso, se verifica que las superficies ejercen fuerzas repulsivas *normales* a los cuerpos que están en contacto sobre ellas. Es decir, perpendiculares a la superficie.

¡! **Error habitual:**

Olvidarse de la existencia de fuerzas normales. O, no considerarlas realmente perpendiculares a la superficie.

9.2.2. Descomposición de fuerzas

Si la superficie no es horizontal la fuerza normal, que es perpendicular a la superficie, no puede en general compensar a la fuerza peso, que apunta siempre hacia abajo. En este caso podemos descomponer la fuerza peso en dos componentes vectoriales: una componente normal al plano inclinado y otra tangencial. La primera es la que equilibra exactamente la fuerza normal (de otro modo, el móvil no se desplazaría a lo largo de la superficie). La segunda es la que no está equilibrada, y la responsable de que el cuerpo se desplace (siempre que no haya rozamiento, como se discute en otro lado).

9.3. Planos inclinados

El caso más sencillo de un cuerpo moviéndose sobre una superficie es un plano inclinado: una superficie plana pero no horizontal. Escojamos un sistema de coordenadas con uno de los ejes, el x por ejemplo, tangencial al plano inclinado, y el y perpendicular. Si el ángulo que la superficie hace con la horizontal es α, en la dirección y tendremos la condición de equilibrio entre la fuerza normal y la componente de la fuerza peso P :

$$N - P\cos\alpha = 0.$$

En el eje de las x tendremos

$$-P\sin\alpha = ma.$$

En este sentido, como no hay equilibrio, ha de haber una aceleración de acuerdo con la Segunda Ley. Es fácil comprobar que estas expresiones son correctas en el caso $\alpha =$ (plano horizontal): se reducen a $N = P$ y $a = 0$, como debe ser.

La aceleración resultante es

$$a = -g\sin\alpha,$$

y la normal es

$$N = mg\cos\alpha \tag{9.1}$$

¡! Error habitual:

Confundir los ángulos. En el dibujo, puede no ser fácil darse cuenta de cuál de los ángulos que forman las fuerzas en α. Conviene ponerse en el límite de ángulos muy agudos: en este caso está claro intuitivamente cuál de los ángulos es el "pequeño". Además, las fórmulas finales no tendrán sentido en el caso $\alpha = 0$, como hemos discutido.

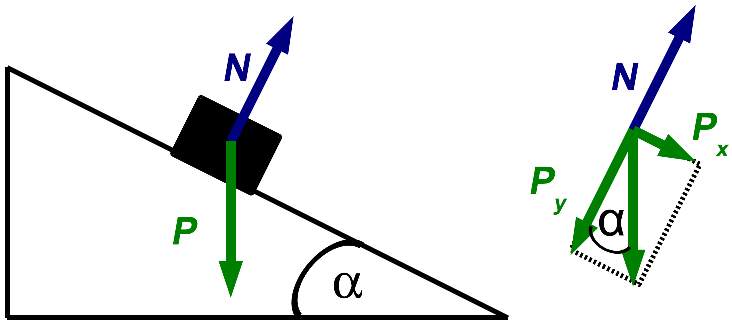

Figura 9.2: Fuerzas sobre un cuerpo sobre un plano inclinado (sin rozamiento). La fuerza normal cancela exactamente una componente de la fuerza peso, la P_y, pero la P_x producirá necesariamente una aceleración.

Figura 9.3: Sistema de poleas en una embarcación. De wikipedia commons

9.4. Poleas

Una de las más sencilas aplicaciones de las leyes de Newton se refieren a las poleas, unas de las máquinas clásicas (es decir, ya conocidas y estudiadas al menos por los griegos).

9.4.1. Las cuerdas

Las cuerdas son objetos capaces de mantener una fuerza constante, llamada *tensión* entre sus extremos. En el caso más sencillo se supone que las cuerdas poseen masa despreciable y son inextensibles.

Que tengan masa despreciable significa que podemos olvidarnos de su peso: por ejemplo, si se suspende una masa del techo mediante una de estas cuerdas ideales, se transmitiría sólo la fuerza peso de esta masa al techo. Que sean inextensibles significa que los objetos que estén enlazados por estas cuerdas se mueven al unísono, de manera instantánea. Por ejemplo, si dos móviles sobre una superficie horizontal están unidos por una de estas cuerdas ideales y se tira de uno de ellos con cierta fuerza, la aceleración resultante será igual para los dos cuerpos (si fuera distinta, la longitud de la cuerda acabaría cambiando).

9.4.2. Las ruedas

Asimismo, se supone que las ruedas de las poleas (que también se llaman, de manera confusa, “poleas”) tienen masa despreciable y que giran sin rozamiento. En términos prácticos, esto significa que estas poleas ideales son capaces de cambiar de sentido la tensión de las cuerdas, sin que cambie nada su módulo.

9.4.3. Ejemplo básico

Consideremos una masa m_1 suspendida en vertical y unida a otra, m_2, que está sobre una superficie horizontal. Tanto las cuerdas como la rueda son “ideales”, y no hay rozamiento en la superficie. El balance de fuerzas para la masa que cuelga es

$$f_{1,y} = m_1 g - T_1;$$

$f_{1,x} = 0$, obviamente. T_1 es la tensión de la cuerda sobre la masa que cuelga. Para la masa horizontal $f_{2,y} = 0$, y

$$f_{2,x} = T_2$$

, donde T_2 es la tensión de la cuerda.

Como las cuerda tiene masa despreciable, a ambos lados de la rueda se tienen las mismas dos tensiones, T_1 y T_2, en sentidos distintos. Pero, como no hay rozamiento, estas dos tensiones son iguales en módulo. Podemos, por tanto, igualar su módulo al mismo valor $T_1 = T_2 = T$. La segunda ley de Newton para los dos móviles puede escribirse así:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T$$

$$m_2 a_2 = T.$$

Además, como la cuerda es inextensible, las dos aceleraciones deben ser iguales en módulo. No lo son en sentido, obviamente. Fijémonos además que nuestro convenio de signos es: positivo hacia abajo y hacia la derecha. Con este convenio las dos aceleraciones son iguales en signo. Con otro convenio, podrían tener el signo cambiado. Finalmente:

$$m_1 a = m_1 g - T$$

$$m_2 a = T,$$

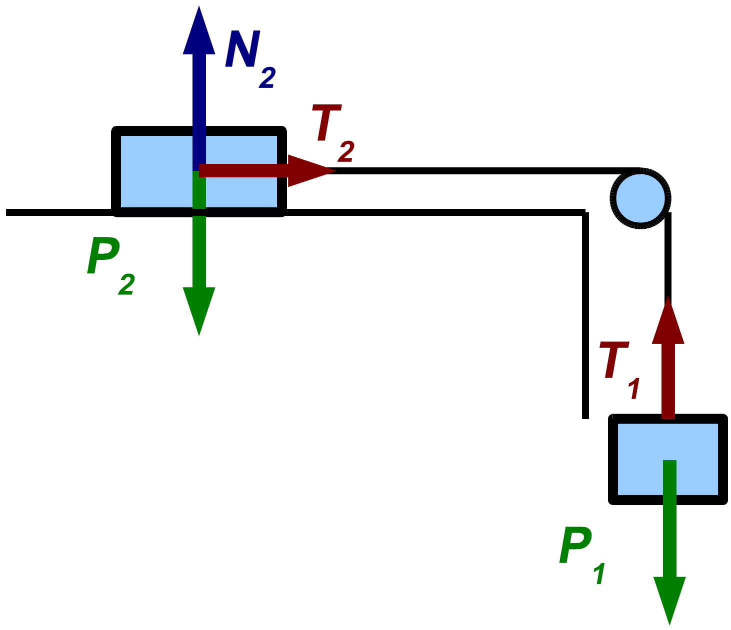

Figura 9.4: Fuerzas sobre dos cuerpos unidos por una cuerda que pasa por una polea.

de donde se deduce, restando las dos ecuaciones:

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g,$$

la aceleración es proporcional a la gravedad, y a la fracción de la masa total que cuelga ($m_1/(m_1 + m_2)$).

También podemos despejar T:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g;$$

La expresión es interesante también, porque la combinación $m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ aparece en mecánica en muchas ocasiones. Se denomina "masa reducida".

¡! **Error habitual:**

Los signos. Un posible error en los signos lleva a expresiones sin sentido físico, como $a = \frac{m_1}{m_1 - m_2} g$. Este resultado es erróneo porque el denominador puede hacerse nulo (cuando las dos masas son iguales), resultando una aceleración infinita.

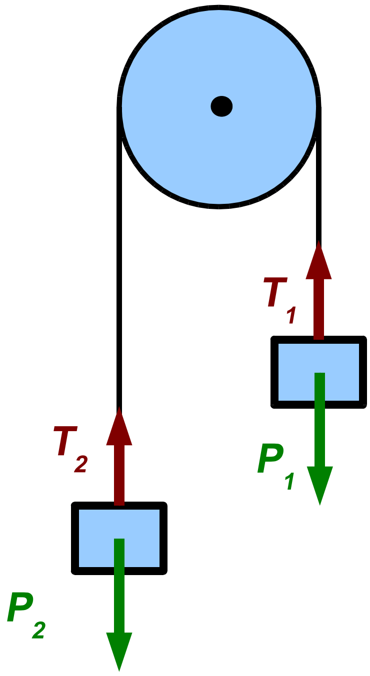

Figura 9.5: La máquina de Atwood.

9.4.4. La máquina de Atwood

El ejemplo clásico es el que considera dos masas colgando de una polea. Esta máquina fue diseñada en 1784 por el reverendo George Atwood para estudiar cuantitativamente las leyes básicas de la dinámica (aunque la polea como tal se viene usando desde la antigüedad, y fue estudiada por Arquímedes). Las ecuaciones de movimiento para las dos masas son:

$$m_1 a = m_1 g - T$$

$$-m_2 a = m_2 g - T,$$

donde ya hemos supuesto directamente que T será igual para las dos masas. Hay que tener cuidado con el signo de la aceleración que, como se ve, es distinto en los dos casos. Restando las dos ecuaciones obtenemos la aceleración:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Es decir, puede ser positiva o negativa (o nula) según el valor de las masas m_1 y m_2, como es intuitivo: la polea gira en el sentido de la masa mayor. La tensión resulta ser

$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g,$$

igual que en el ejemplo anterior, salvo el factor 2.

9.5. Rozamiento

En los problemas analizados antes, podemos comprobar cómo el sistema se encuentra, por lo general, en movimiento. Por ejemplo, un cuerpo sobre un plano inclinado se debe empezar a mover sea cual sea el ángulo con la horizontal, por pequeño que sea. Sabemos por experiencia que esto no es así, porque los objectos sobre una mesa terminarían cayéndose tarde o temprano. Esto se debe a las fuerzas de fricción, que se oponen a los posibles movimientos de los cuerpos.

9.5.1. Rozamiento estático

Experimentalmente, se comprueba que para desplazar un objeto que está en reposo sobre una superficie es preciso ejercer una fuerza que sobrepase cierto umbral. También experimentalmente (aunque esto no es nada obvio), esta fuerza umbral es directamente proporcional a la fuerza normal. La constante de proporcionalidad depende de la superficie y de la parte del cuerpo que está en contacto con ella, y se llama *coeficiente de rozamiento estático*:

$$F_e \leq \mu_e N.$$

En esta fórmula tenemos que hacer hincapié en una serie de hechos.

- Primero, es una igualdad entre módulos: la fuerza de rozamiento no tiene, en general, la misma dirección ni sentido que la fuerza normal. Por el contrario: *siempre se dirije en contra de la fuerza que causaría el movimiento.*
- Fijémonos que es una desigualdad: la fuerza de rozamiento estática debe ser *menor* que el valor umbral $\mu_e N$. Es decir, toma el valor necesario para contrarestar la fuerza que causaría el movimiento, hasta cierto límite.
- En cuanto a μ_e, fijémonos que es una magnitud física sin dimensiones, ya que es el cociente de proporcionalidad entre dos fuerzas. Cuanto mayor sea su valor, mayor debe ser la fuerza necesaria para que el objeto se mueva.

¡! **Error habitual:**

El valor máximo *y el valor* real. La fuerza de rozamiento estática puede tomar cualquier valor que sea menor que el máximo; el que haga falta para que el cuerpo esté en equilibrio. Si no, podría ocurrir que un cuerpo en reposo comenzara a moverse espontáneamente debido al rozamiento.

Móvil	Soporte	μ_s	μ_d
Acero	Acero	0,7	0,6
Bronce	Acero	0,5	0,4
Cobre	Hierro	1,1	0,3
Vidrio	Vidrio	1,1	0,4
Teflón	Teflón	0,04	0,04
Teflón	Acero	0,04	0,04
Caucho	Asfalto seco	1,0	0,8
Caucho	Asfalto mojado	0,3	0,25
Esquí	Nieve	0,1	0,05

Cuadro 9.1: Lista de coeficientes de rozamiento de interés, tanto estáticos (μ_s) como dinámicos (μ_d).

En la tabla 9.1 proporcionamos una lista de coeficientes de rozamiento estático. Como se ve, el coeficiente depende de los dos materiales en contacto: el soporte y el móvil. Los valores van desde 0,04 para el teflón, un material que se ha utiliza justamente como antideslizante (como curiosidad, es la única superficie por la cual una salamanquesa no puede trepar), y 0,1 para los sistemas de esquís y trineos sobre nieve, hasta valores superiores a 1 para sistemas con bastante fricción, como el vidrio sobre vidrio. Es también relevante que el coeficiente de fricción del caucho sobre el asfalto se reduzca aproximadamente a un tercio en condiciones de humedad, con el consiguiente impacto en la seguridad automovilística (el coeficiente de rozamiento estático, como se verá en cursos más avanzados, es el relevante para ruedas que no se deslizan).

Ejemplo 9.1 ***Plano inclinado con rozamiento estático***
Un ejemplo clásico es considerar un objeto sobre un plano con rozamiento y ver cuánto hay que inclinar el plano para que caiga. Las ecuaciones son ahora:

$$N - P\cos\alpha = 0.$$

$$F_r - P\sin\alpha = 0.$$

La primera de ellas es igual que antes. La segunda incluye la fuerza de rozamiento y expresa la condición de equilibrio (que la suma de las fuerzas se anule). De la primera ecuación deducimos que el valor máximo de la fuerza de rozamiento será:

$$F_r = \mu_e N = \mu_e P\cos\alpha.$$

La segunda nos dice entonces que, en este caso,

$$\mu_e P\cos\alpha - P\sin\alpha = 0.$$

Se elimina el valor de P, y se obtiene

$$\tan\alpha = \mu_e.$$

Es decir, para ángulos por debajo de este valor el objeto no cae, pero lo hace para ángulos superiores. Esto proporciona una estimación intuitiva del coeficiente de rozamiento. Por ejemplo, para un valor de 1 *hay que inclinar un plano un ángulo de* 45°*.*

9.5.2. Rozamiento dinámico

Si un cuerpo se está moviendo con respecto a una superficie, se comprueba experimentalmente que sigue existiendo una fuerza de rozamiento que se opone al movimiento. A diferencia del caso estático, su valor es siempre proporcional a la fuerza normal:

$$F_d = \mu_d N.$$

El *coeficiente de rozamiento dinámico*, μ_d, depende también de la composición de la superficie y de la parte del cuerpo que está en contacto con ella, aunque su valor es, por lo general, distinto al valor estático (casi siempre, menor). En la tabla 9.1 también se proporciona una lista de coeficientes de rozamiento dinámico. Como se ve, son generalmente inferiores a los coeficientes estáticos; como mucho, son muy similares, como en el caso del teflón. Vemos también que los sistemas de esquís y trineos sobre nieve tienen valores muy bajos, comparables al teflón, en situaciones dinámicas. De nuevo, es importante que el coeficiente de fricción del caucho sobre el asfalto dependa de lo mojado que está este último (el coeficiente de rozamiento dinámico es el relevante para ruedas que se deslizan, como en un derrape).

Ejemplo 9.2 ***Ejercicio básico de rozamiento dinámico***
Si se empuja un cuerpo horizontalmente con una cierta velocidad inicial, es sencillo ver hasta donde llegaría. Tendríamos, simplemente

$$-F_r = ma,$$

porque el móvil no está sujeto a ninguna otra fuerza (estrictamente, en el sentido vertical se cancelan la fuerza normal y la fuerza peso). Entonces,

$$ma = -\mu_d mg.$$

La aceleración es $a = -\mu_d g$ *(deceleración, en realidad). Con la fórmula cinemática* $v_f^2 - v_i^2 = 2al$*, deducimos que, cuando el movil se para (*$v_f = 0$*),* $l = -v_i^2/(2a)$*. Con el valor de la aceleración obtenido:*

$$l = \frac{v_i^2}{2\mu_d g}.$$

Es decir: cuanta más velocidad inicial se imprima al móvil, más lejos llega (de hecho, si se dobla la velocidad inicial se cuadruplica el desplazamiento). Por otro lado, cuanto más pequeño sea el coeficiente de rozamiento dinámico, más lejos llega (si se reduce en la mitad, se dobla el desplazamiento). Como se ve, el valor de la masa no es relevante (aunque sí la aceleración de la gravedad).

¡! Error habitual:

Atención al valor del coeficiente de rozamiento dinámico. A diferencia del estático, siempre vale lo mismo (en valor absoluto).

¡! Error habitual:

Signos. El rozamiento *siempre* se opone al movimiento. Como en algunos problemas no está claro hacia dónde se mueve el cuerpo en cuestión, caben dos estrategias:

- En las fórmulas, escribir f para el "módulo" de la fuerza de rozamiento, pero admitiendo la posibilidad de que pueda ser negativo
- Resolver el problema suponiendo un movimiento dado, y repetir el cálculo para las otras posibilidades. Por lo general esto no representa mucho trabajo: sólo hay que repetirlo una vez más, y las fórmulas son idénticas salvo el signo de la fuerza de rozamiento.

9.6. Problemas

1. Un plano está inclinado un ángulo α con la horizontal. Sobre él se desplaza, sin rozamiento, un móvil de masa m. Si parte de una altura h, calcular la velocidad con la que llegará al suelo (las dos componentes, horizonta y vertical) y el tiempo que tarda en hacerlo.

2. **Avanzado**. Resolver el problema anterior con un rozamiento dinámico μ. Comprobar que se recupera el resultado anterior si $\mu = 0$.

3. Un móvil de masa m está sobre una mesa horizontal. Se desplaza sobre ella porque está atado a otro de masa M que pende en vertical del extremo de la mesa (a través de una polea sin fricción y de masa despreciable). Calcular la aceleración de la masa m cuando se desplaza con rozamiento, y con un coeficiente de rozamiento dinámico μ.

4. **Avanzado**. Un plano está inclinado un ángulo α con la horizontal. Sobre él se desplaza, sin rozamiento, un móvil de masa m que está atado con un cable a otro, M, que cuelga en vertical al extremo del plano (a través de una polea). Calcular la aceleración de los dos móviles (es igual para los dos, en módulo). Comprobar que el resultado coincide con el anterior (sin rozamiento) cuando $\alpha = 0$.