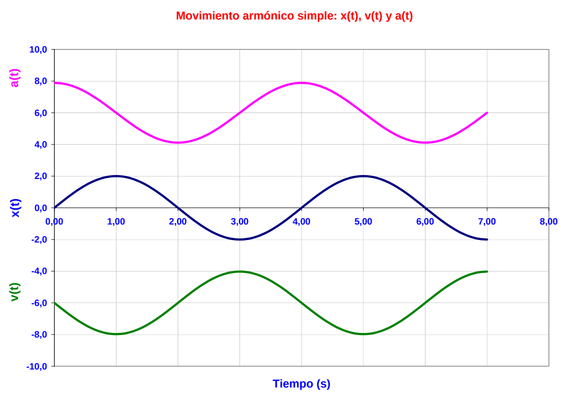
Apoyo para la preparación de los estudios de Ingeniería y Arquitectura

Física (Preparación a la Universidad)

Unidad 12: Oscilaciones



Universidad Politécnica de Madrid

16 de marzo de 2010

12.1. Planificación de la unidad

Entender y aplicar el concepto de la conservación de energía en el m.a.s. Obtener la composición de oscilaciones armónicas paralelas y perpendiculares. Identificar las ecuaciones características de los osciladores amortiguados y forzados. Describir el fenómeno de la resonancia.

12.1.1. Objetivos

1. Describir de manera matemática la posición, velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple.

2. Analizar las fuerzas que actúan en el movimiento armónico simple y plantear la ecuación general del m.a.s. en diferentes situaciones físicas.

3. Entender y aplicar el concepto de la conservación de energía en el m.a.s.

12.1.2. Actividades

1. Lectura del resumen del tema

2. Realización de los ejercicios

12.1.3. Bibliografía

1. TIPLER, P.A. y MOSCA, G. *Física para la ciencia y la tecnología*, 5ª Edición, vol. 1, Tema 14, Editorial Reverté, 2005.

12.1.4. Enlaces relacionados

12.2. Introducción

En muchas situaciones físicas se repite una determinada magnitud al cabo de un período fijo de tiempo, T, que llamaremos *período*. Es decir, se representan con funciones periódicas:

$$f(t+T) = f(t)\ \forall t \tag{12.1}$$

donde $f(t)$ es una *función periódica*.

Según el teorema de Fourier, cualquier función periódica se puede aproximar como una suma de funciones armónicas, es decir, senos y cosenos:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \omega_n t \tag{12.2}$$

Cada uno de estos elementos de la suma de funciones representa, como hemos mencionado anteriormente, una función armónica. Al más sencillo de estos movimientos periódicos se le denomina *movimiento armónico simple* o con sus siglas, *m.a.s.*. Cualquier movimiento periódico puede descomponerse en una suma de m.a.s. por lo estudiaremos primero éstos, para poder abordar en cursos posteriores los movimientos periódicos más complejos.

En todo caso, hay algunos ejemplos de movimientos en la Naturaleza que se pueden aproximar a movimientos armónicos simples, como pueden ser el péndulo simple o matemático, el péndulo compuesto o físico, el péndulo de torsión, el muelle, las vibraciones de un diapasón o las oscilaciones en un circuito LCR con una resistencia muy baja.

12.3. Cinemática del m.a.s.

Definiremos el m.a.s. desde un punto de vista cinemático, es decir en lo que respecta al movimiento, como aquel cuya trayectoria se puede escribir como:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{12.3}$$

donde

- x es la posición y t es el tiempo,
- $\omega t + \phi$ es la *fase*,
- ω es la *frecuencia angular*,
- A es la *amplitud*,
- ϕ es la *fase inicial*.

Es evidente que podríamos haber escrito una función coseno en lugar de una función seno, ya que cambiando la fase inicial, son equivalentes:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = A \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos(\omega t + \phi') \tag{12.4}$$

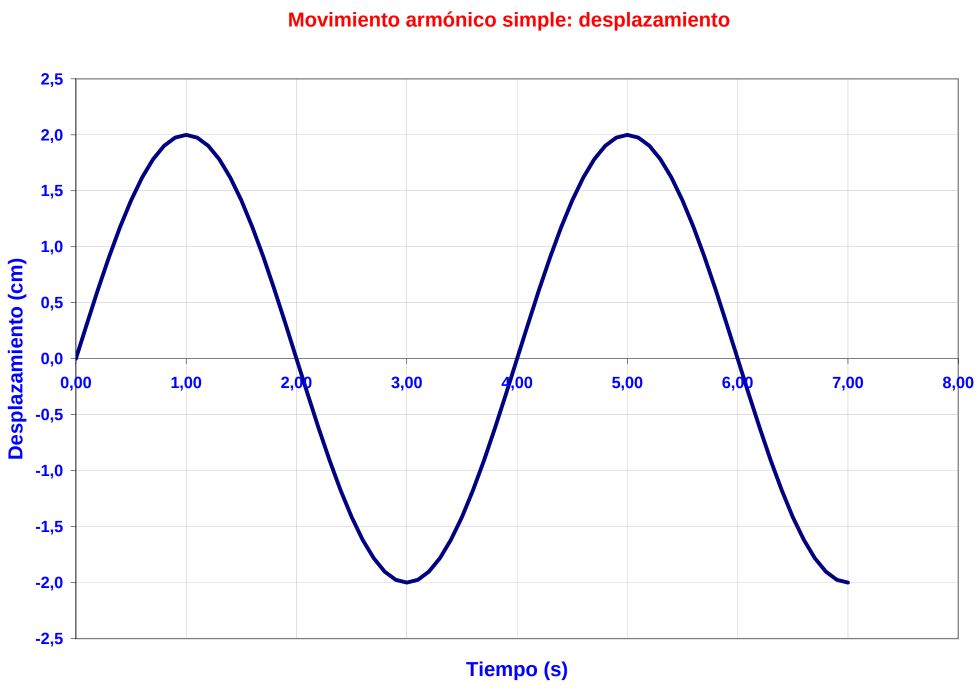


Figura 12.1: Desplazamiento en el movimiento armónico simple

Es fácil ver que el período, T, se puede calcular en función de la frecuencia angular:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \tag{12.5}$$

donde f es la frecuencia y se mide en hercios (Hz).

La velocidad se puede calcular como la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\ \omega\ \cos(\omega t + \phi) \tag{12.6}$$

Por lo tanto, podemos ver que entre la posición y la velocidad hay un desfase de $\pi/2$.

Por su parte, la aceleración será:

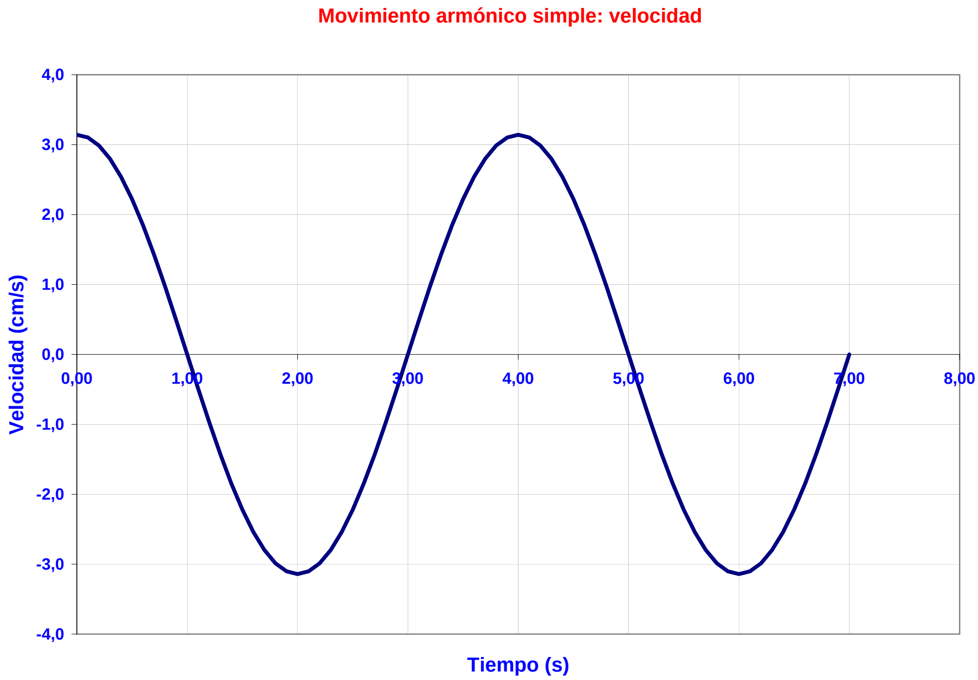


Figura 12.2: Velocidad en el movimiento armónico simple

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega^2\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \phi) = -\omega^2\ x(t) \tag{12.7}$$

Podemos ver que entre la velocidad y la aceleración vuelve a haber un desfase de $\pi/2$, por lo que entre la posición y la aceleración hay un desfase de π.

Podemos ver una comparación entre desplazamiento, velocidad y aceleración en la figura 12.4, en la que en el eje horizontal tenemos tiempo y en el vertical unidades arbitrarias, ya que, obviamente no tienen las mismas unidades.

Podemos apuntar, a modo de resumen, las siguientes conclusiones:

1. $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ son funciones periódicas de período T.

2. $x(t)$ y $v(t)$ están DESFASADAS $\pi/2$, ya que una está expresada con la función seno (o coseno) y la otra con la función coseno (o seno). Por tanto, si el desplazamiento es nulo, la velocidad es máxima (o mínima) y si el desplazamiento es máximo (o mínimo), la velocidad es nula.

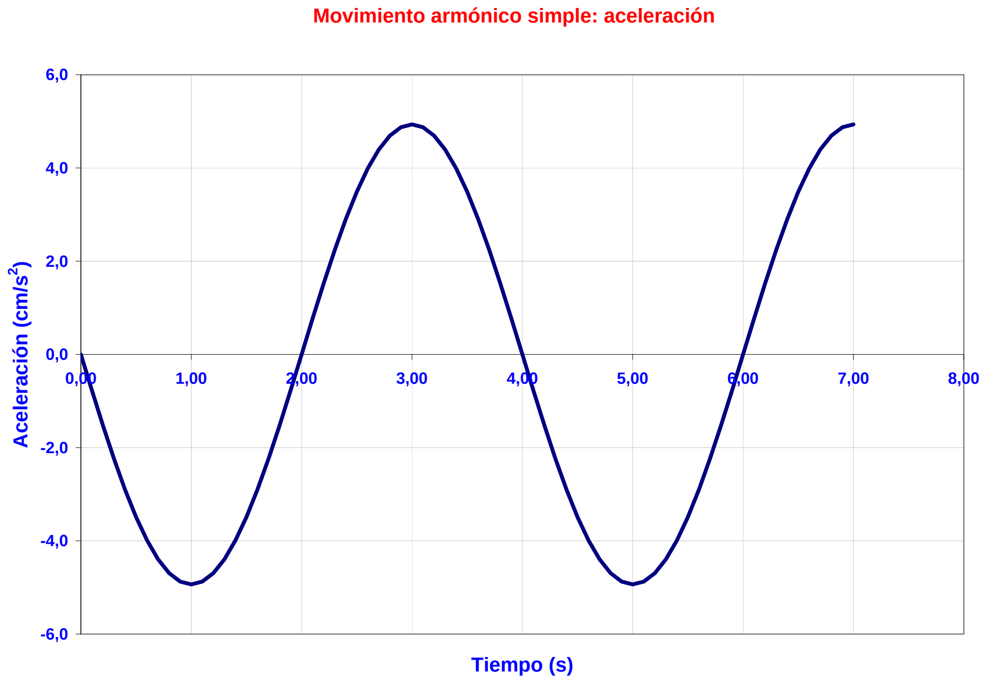


Figura 12.3: Aceleración en el movimiento armónico simple

3. $v(t)$ y $a(t)$ están DESFASADAS $\pi/2$, por el mismo motivo del punto anterior. Por tanto, si la velocidad es nula, la aceleración es máxima (o mínima) y si la velocidad es máxima (o mínima), la aceleración es nula.

4. Por su parte, $x(t)$ y $a(t)$ están desfasadas π, lo que explica el cambio de signo.

5. Si consideramos la segunda ecuación de Newton, $F = ma$, entonces, podemos ver que F debe ser proporcional a $-x(t)$, ya que la aceleración también lo es. Veremos esto cuando tratemos la dinámica del m.a.s.

12.4. Analogía entre movimiento circular y m.a.s.

Podemos representar gráficamente un m.a.s. como la proyección en un eje de un movimiento circular. Para ello tomaremos un vector de módulo A, que gire con una velocidad angular constante, ω. Al cabo de un tiempo t, el ángulo recorrido será $\omega t + \phi$, donde ϕ es el ángulo inicial. Podemos ver un esquema de esta analogía en la figura 12.5.

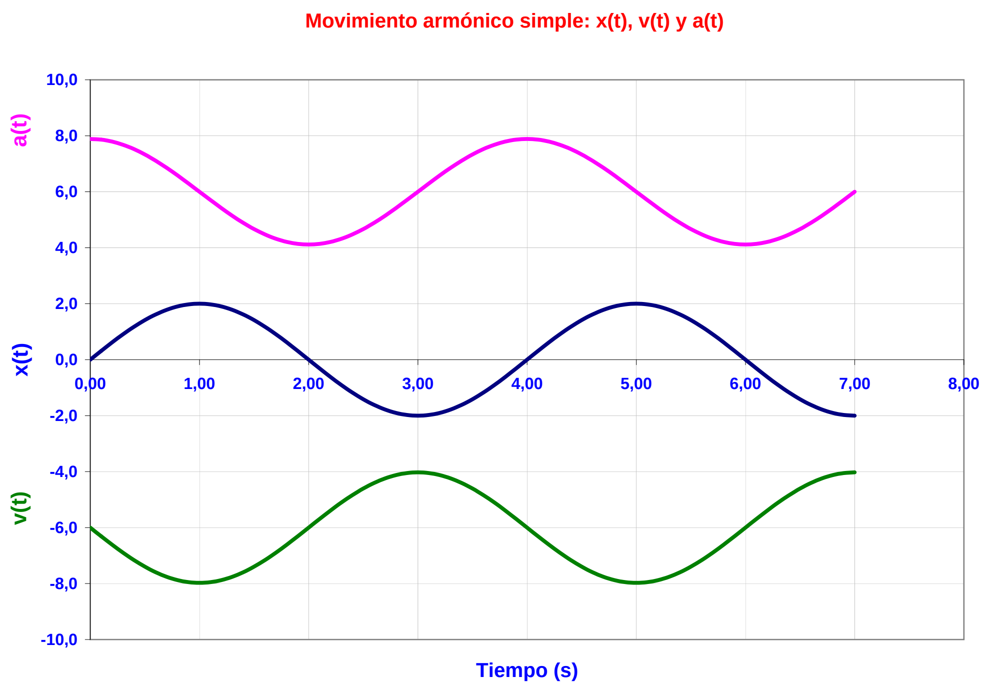


Figura 12.4: Comparación entre x(t), v(t) y a(t) en el movimiento armónico simple

Las proyecciones de este vector en el eje X y en el eje Y son:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\ \cos(\omega t + \phi) \\ y(t) &= A\ \text{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{12.8}$$

Por lo que ambos son movimientos armónicos simples.

Así, podemos representar el m.a.s. como un vector de módulo A y girando con una velocidad angular, ω, constante.

Si representamos el desplazamiento, la velocidad y la aceleración podremos comprobar que son vectores con diferentes amplitudes, A, $A\omega$ y $A\omega^2$, respectivamente. Los desfases entre los vectores son los reseñados anteriormente.

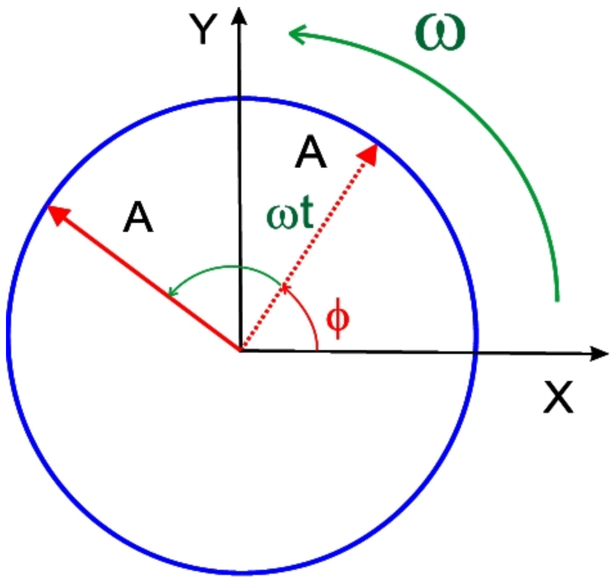


Figura 12.5: Analogía entre movimiento circular y movimiento armónico simple

12.5. Dinámica del m.a.s.

En el apartado anterior, hemos demostrado que la fuerza correspondiente a un m.a.s. es directamente proporcional al desplazamiento, cambiado de signo.

Podemos ver ahora que si tenemos una fuerza que sea directamente proporcional al desplazamiento cambiado de signo, entonces el movimiento resultante es un m.a.s.

A esta fuerza la llamaremos Fuerza elástica y sigue la llamada ley de Hooke:

$$F(t) = -K\ x(t) \tag{12.9}$$

donde K es la constante elástica, que se mide en N m^{-1}.

En la figura 12.7, se puede ver una ilustración de la ley de Hooke para dos resortes de constantes elásticas diferentes. Hay que señalar que la ley de Hooke tiene validez dentro del llamado *límite elástico*. Una vez sobrepasado dicho límite, el resorte se deforma de modo permanente o incluso se rompe.

Apliquemos ahora la segunda ecuación de Newton a la fuerza elástica,

$$F(t) = -K\ x(t) = m\ a(t) = m\ \frac{d^2x}{dt^2} \tag{12.10}$$

Despejando y dividiendo por m,

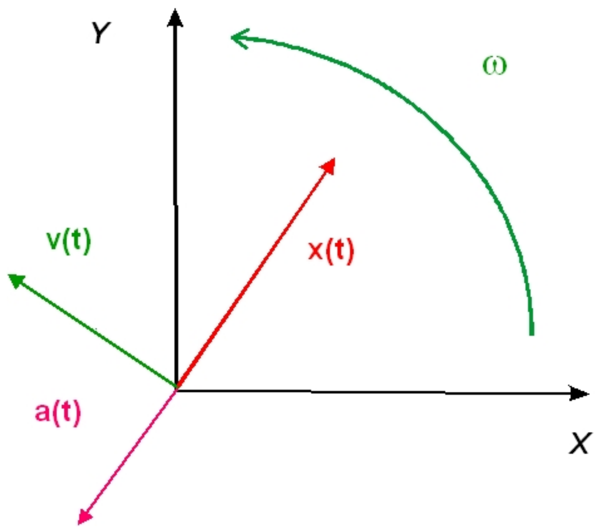


Figura 12.6: Representación de $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ con la analogía del movimiento circular

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}\,x = 0 \tag{12.11}$$

La ecuación 12.11 es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. La solución de esta ecuación es:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\,t + \phi\right) \tag{12.12}$$

donde podemos ver que se trata de un m.a.s. con una frecuencia angular,

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{12.13}$$

Por su parte, A y ϕ se pueden obtener planteando las condiciones iniciales y son la amplitud y la fase inicial, respectivamente.

Si sustituimos el valor de ω en la ecuación diferencial 12.11, obtenemos la *ecuación general del m.a.s.*,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\,x = 0 \tag{12.14}$$

Incluir ejemplo de aplicación de condiciones iniciales.

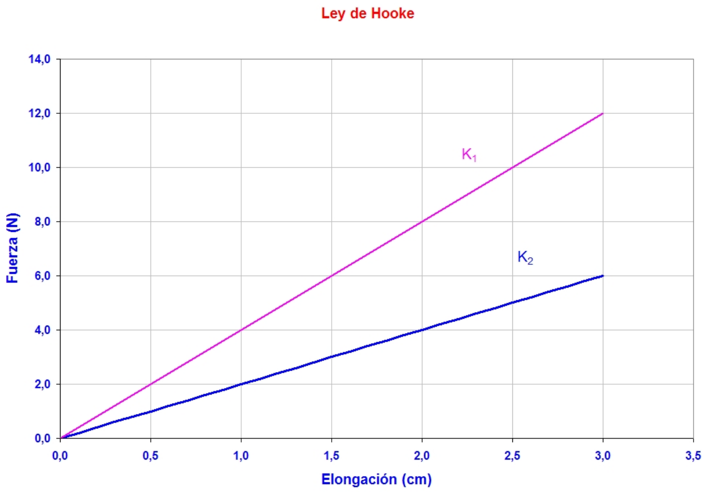


Figura 12.7: Ilustración de la ley de Hooke

12.6. Energía en el m.a.s.

Acabamos de ver que la fuerza que da lugar a un m.a.s. es una fuerza elástica del tipo $F = -Kx$, conocida como ley de Hooke. Veamos ahora si dicha fuerza es conservativa, es decir si el trabajo para que una partícula se mueva de un sitio a otro es independiente del camino recorrido.

Para ello, calcularemos el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos A y B:

$$W_A^B = \int_A^B -Kxdx = -\left[\frac{1}{2}K\, x_B^2 - \frac{1}{2}K\, x_A^2\right] = \frac{1}{2}K\, x_A^2 - \frac{1}{2}K\, x_B^2 \tag{12.15}$$

Por lo tanto, podemos ver que el trabajo realizado por la fuerza elásticas entre los puntos A y B, no depende del camino recorrido y es la diferencia de una función evaluada en ambos puntos. Por tanto, la fuerza elástica es una fuerza conservativa y la función que hemos hallado es la energía potencial.

$$E_p = \frac{1}{2}K\, x^2 \tag{12.16}$$

Así, la suma de las energías cinética y potencial nos dará lugar a la energía total, cantidad que debería conservarse y así es, como veremos a continuación:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\, v^2 + \frac{1}{2}K\, x^2 \tag{12.17}$$

Ahora bien, en un m.a.s. tenemos las siguientes expresiones para x y v:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\ \mathrm{sen}\,(\omega t + \phi) \\ v(t) &= A\,\omega\ \cos\,(\omega t + \phi) \end{aligned} \tag{12.18}$$

Por lo tanto, si sustituimos en la ecuación 12.17, obtenemos:

$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\ A^2\ \omega^2\ \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} K\ A^2\ \mathrm{sen}^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}\ K A^2 \tag{12.19}$$

ya que $m\,\omega^2 = K$

Efectivamente, podemos ver que la energía total es constante, por lo que podemos afirmar que la fuerza elástica es conservativa.

A modo de resumen, algunas conclusiones sobre la energía en el m.a.s.:

- La fuerza elástica, $F = -Kx$ es conservativa.
- La energía potencial es $E_p = 1/2\ Kx^2$.
- La energía total, $E_T = 1/2\ KA^2$ es proporcional a la amplitud al cuadrado. Veremos que esto también sucede en el caso de las ondas armónicas.
- Podemos hacernos una idea gráfica de cómo es la energía, representando la energía potencial en función del desplazamiento (ver figura 12.8). En la figura podemos ver lo que representan las energías potencial, cinética y total.
- En la figura 12.9 se representan los valores de las energía potencial y cinética en función del tiempo. Es fácil ver que están desfasadas $\pi/2$, al igual que lo están el desplazamiento y la velocidad.

  En el caso de las energías, podemos promediar en un período y obtener los conocidos como *valores eficaces*. Es fácil ver que se hacemos el promedio del desplazamiento o de la velocidad, el valor promedio es nulo, ya que la mitad del período el área es positiva y la otra mitad es positiva, como corresponde a una función seno o coseno:

  $$< x > = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0 \tag{12.20}$$

  Sin embargo, si calculamos el promedio del seno o del coseno al cuadrado, nos saldrá distinto de cero. Para ello definiremos valor eficaz de la siguiente forma:

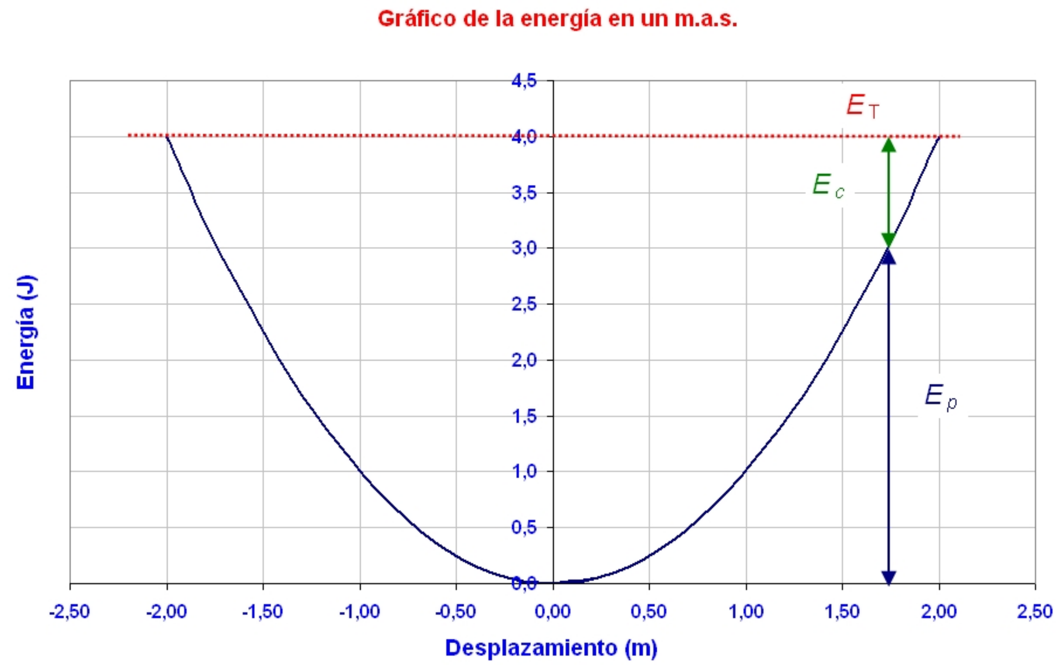


Figura 12.8: Ilustración de la energía en el m.a.s.

$$x_{ef} = \sqrt{< x^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt} = \frac{A}{\sqrt{2}} \tag{12.21}$$

Del mismo modo, podemos hallar la velocidad eficaz:

$$v_{ef} = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt} = \frac{A\,\omega}{\sqrt{2}} \tag{12.22}$$

donde recordamos que la posición y la velocidad están desfasados $\pi/2$, de forma análoga a lo que sucede en corriente alterna entre la diferencia de potencial y la intensidad de corriente.

12.7. El péndulo simple

Consideremos una masa, m, que consideramos puntual, suspendida de un hilo inextensible y con una masa mucho menor que m, que puede oscilar, tal como se indica en la figura 12.10.

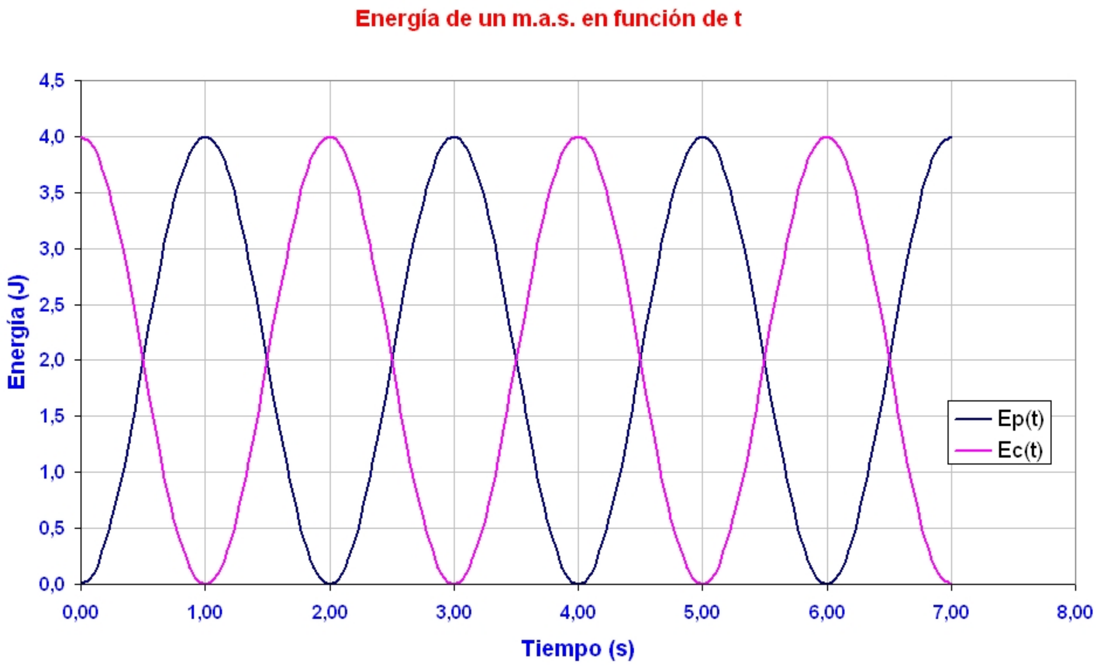


Figura 12.9: Energía cinética y potencial en función del tiempo en un m.a.s..

En el diagrama podemos ver las dos fuerzas que actúan en este caso: la tensión del hilo y el peso de la masa m. Descomponiendo el peso en sus componentes paralela y perpendicular al hilo podemos plantear la segunda ley de Newton, tomando el eje Y como el hilo y el eje X perpendicular al hilo:

$$\begin{aligned} mg\cos\theta + T &= 0 \\ -mg\,\mathrm{sen}\,\theta &= ma \end{aligned} \qquad (12.23)$$

podemos ver que la tensión se equilibra con la componente Y del peso, mientras que la componente X será igual a la masa por la aceleración. El signo menos, proviene del hecho de que cuando separamos la masa hacia la derecha, la fuerza va en sentido contrario y viceversa.

Eliminando la masa y despejando los términos al mismo lado de la ecuación, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad (12.24)$$

Esta ecuación es parecida a la ecuación de un m.a.s., pero no exactamente igual. No

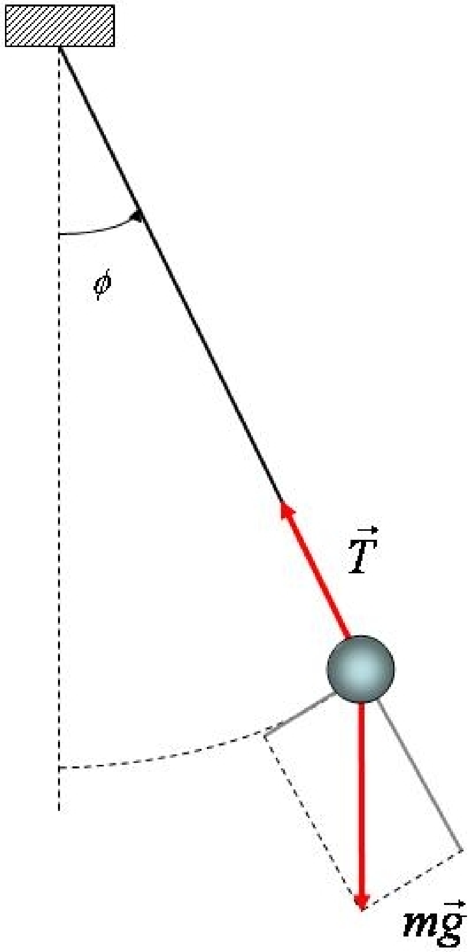


Figura 12.10: Péndulo simple

obstante, cuando las oscilaciones son pequeñas, podemos aproximar $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, por lo que nos quedaría:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \qquad (12.25)$$

que es la ecuación de un m.a.s con una frecuencia angular $\omega^2 = g/l$.

El período del péndulo simple será:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (12.26)$$

Ejemplo 12.1 Medida de g con un péndulo simple.

Si tenemos un péndulo simple de unos 60 cm de longitud y medimos su período con la ayuda de un cronómetro, podemos hallar el valor de g. Haciendo ese experimento en el Laboratorio, hemos medido varias veces y hemos obtenido la siguiente tabla de valores:

Medida	T **(s)**
1	1,56
2	1,55
3	1,57
4	1,56
5	1,56
6	1,57
7	1,55
8	1,54
9	1,58
10	1,58
11	1,57
12	1,54

Hallando el promedio de las medidas realizadas, podemos expresar el período como:

$$T = (1{,}56 \pm 0{,}01) \text{ s} \tag{12.27}$$

Por lo que g será:

$$\boxed{g = 4\,\pi^2\,\frac{l}{T^2} = (9{,}7\ \pm\ 0{,}1)\ \text{m s}^{-2}} \tag{12.28}$$

Puedes hacer esta experiencia en casa, utilizando una bola metálica, un cordel y un cronómetro. La mejor forma de medir T es medir varias oscilaciones y dividir por el número de oscilaciones. Recuerda que las oscilaciones no deben ser muy grandes. Típicamente, no deben sobrepasarse los 30º.

12.8. El péndulo compuesto

Consideremos un sólido de masa M de una forma cualquiera, que está sujeto por un punto O, de modo que puede girar libremente por un eje que pasa por dicho punto O. Supongamos que el momento de inercia del sólido respecto del eje que pasa por O es I y que la distancia del centro de masas (CM) al punto O es L.

En la figura 12.11 podemos un esquema del sólido sujeto por O, en el que se puede apreciar el peso y su descomposición en dos fuerzas, una perpendicular y otra en la dirección de O al CM.

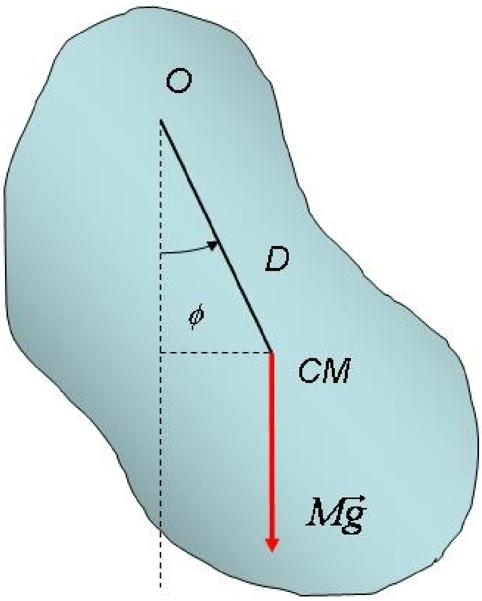


Figura 12.11: Péndulo simple

Recordemos la ecuación fundamental de la rotación,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\ \vec{\alpha} \tag{12.29}$$

donde $\vec{\tau}$ es el momento de fuerzas aplicado, I es el momento de inercia y $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular.

En nuestro caso, podemos escribir la ecuación 12.29 para los módulos, ya que sabemos que tanto el momento de fuerzas como la aceleración angular están dirigidos según el eje.

$$-MgL \operatorname{sen}\theta = I\alpha = I\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{12.30}$$

El signo negativo en la ecuación se debe a que el momento de fuerzas hace girar al sólido en sentido contrario al de desplazamiento.

Por tanto, despejando nos queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{I}\ \operatorname{sen}\theta = 0 \tag{12.31}$$

Nuevamente, para pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio, tenemos $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, por lo que nos queda finalmente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MgL}{I}\,\theta = 0 \tag{12.32}$$

De modo que la frecuencia de las oscilaciones del sólido será:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} \tag{12.33}$$

12.9. Problemas resueltos

12.9.1. Una partícula de masa m está unida a un resorte de constante elástica K. Hallar el movimiento que realizará la partícula en los siguientes casos:

a) Cuando a la partícula se le comunica en su posición de equilibrio, una velocidad v_0 hacia la derecha.

b) Cuando a la partícula se la suelta desde una distancia x_0 a la izquierda de su posición de equilibrio.

SOLUCIÓN:

a) Cuando a la partícula se le comunica en su posición de equilibrio, una velocidad v_0 hacia la derecha.

La ecuación general de un m.a.s. es:

$$x(t) = A\ \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{12.34}$$

Por lo que su velocidad será:

$$v(t) = A\,\omega\ \cos(\omega t + \phi) \tag{12.35}$$

Las condiciones iniciales de la partícula son:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ v(0) &= +v_0 \end{aligned} \tag{12.36}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en $x(t)$, obtenemos:

$$x(0) = A\ \operatorname{sen}(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \text{ ó } \pi \tag{12.37}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en $v(t)$, obtenemos:

$$v(0) = A\,\omega\cos(\phi) = +v_0 \Rightarrow \phi = 0 \; y \; A\,\omega = v_0 \tag{12.38}$$

Como la frecuencia, ω es:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{12.39}$$

Podemos hallar la amplitud, A:

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\,\sqrt{\frac{m}{K}} \tag{12.40}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión del desplazamiento, $x(t)$, tenemos el resultado final:

$$\boxed{x(t) = v_0\,\sqrt{\frac{m}{K}}\ \operatorname{sen}(\omega t)} \tag{12.41}$$

b) Cuando a la partícula se la suelta desde una distancia x_0 a la izquierda de su posición de equilibrio.

La ecuación general de un m.a.s. es:

$$x(t) = A\ \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{12.42}$$

Por lo que su velocidad será:

$$v(t) = A\,\omega\ \cos(\omega t + \phi) \tag{12.43}$$

Las condiciones iniciales de la partícula son:

$$\begin{aligned} x(0) &= -x_0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \tag{12.44}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en $v(t)$, obtenemos:

$$v(0) = A\,\omega\ \cos(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2 \text{ ó } 3\pi/2 \tag{12.45}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en $x(t)$, obtenemos:

$$x(0) = A\ \operatorname{sen}(\phi) = -x_0 \Rightarrow \phi = 3\pi/2 \; y \; A = x_0 \tag{12.46}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión del desplazamiento, $x(t)$, tenemos el resultado final:

$$\boxed{x(t) = x_0 \ \text{sen}\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)} \tag{12.47}$$

12.9.2. Una partícula de masa m describe un movimiento armónico simple de frecuencia ω a lo largo del eje X, alrededor del punto $(4a, 0, 0)$ con amplitud $2a$. ¿Qué dirección y sentido tiene la fuerza que actúa sobre ella cuando pasa por el punto $(3a, 0, 0)$? ¿Por qué?

SOLUCIÓN:

El desplazamiento de la partícula será:

$$\boxed{x(t) = 4a + 2a \ \text{sen}\,(\omega t + \phi)} \tag{12.48}$$

Como la fuerza es $F = -Kx = -m\omega^2 \ x$, podemos escribir la fuerza en $(3a, 0, 0)$ como

$$\boxed{F(3a, 0, 0) = +m \ \omega^2 \ 3a} \tag{12.49}$$

donde el signo positivo indica que la fuerza está dirigida hacia el centro del movimiento, en este caso, $x = 4a$.

12.9.3. Una partícula de masa m describe un movimiento armónico simple de ecuación A sen ωt ¿Para qué valor de x, el valor de la energía potencial es igual a la energía cinética?¿En qué instante se produce esto?

SOLUCIÓN:

La energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} \ m \ v^2 = \frac{1}{2} \ m \ A^2 \ \omega^2 \ \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \ K \ A^2 \ \cos^2(\omega t) \tag{12.50}$$

puesto que $K = m \ \omega^2$.

Por su parte, la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2} \ K \ x^2 = \frac{1}{2} \ K \ A^2 \ \text{sen}^2(\omega t) \tag{12.51}$$

Si sumamos la energía potencial y la cinética, hallamos la energía total, E_T:

$$E_T = E_p + E_c = \frac{1}{2} \ K \ A^2 \ \text{sen}^2(\omega t) + \frac{1}{2} \ K \ A^2 \ \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \ K \ A^2 \tag{12.52}$$

De manera que si queremos saber dónde será la energía cinética igual a la potencial, basta con igualar la energía potencial a la mitad de la energía total:

$$E_p = \frac{1}{2}\ K\ x^2 = \frac{1}{4}\ K\ A^2 = \frac{1}{2}\ E_T \tag{12.53}$$

Por tanto, la distancia x pedida será:

$$\boxed{x = \pm\ \frac{A}{\sqrt{2}}} \tag{12.54}$$

Para saber el instante en que esto sucederá, igualamos las energías cinética y potencial:

$$E_p = \frac{1}{2}\ K\ A^2\ \operatorname{sen}^2(\omega t) = \frac{1}{2}\ K\ A^2\ \cos^2(\omega t) = E_c \tag{12.55}$$

Por tanto, la condición es que:

$$\operatorname{sen}^2(\omega t) = \cos^2(\omega t) \Rightarrow \tan^2(\omega t) = 1 \tag{12.56}$$

Por lo que el tiempo t será:

$$\boxed{t = (2n-1)\ \frac{T}{8}\ \text{donde}\ n = 1, 2, 3, 4} \tag{12.57}$$

12.10. Problemas propuestos

12.10.1. Un muelle se alarga 2 cm cuando se tira de él con una fuerza de 6 N. Se coloca sobre una mesa horizontal sin rozamiento y se le añade una masa de 3 kg, estirándolo 2 cm y comunicándole una velocidad de 20 $\sqrt{3}$ cm s^{-1} en sentido contrario al de estiramiento. Halla:

a) La constante elástica.

b) La ecuación del movimiento.

c) La energía del sistema, considerando despreciable la masa del muelle.

Soluciones:

a) $K = 300$ N m^{-1}

b) $x(t) = 4\ \text{cm}\ \operatorname{sen}\left(\omega t + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

c) $E_T = 0{,}24$ J

12.10.2. Un bloque de masa 1 kg, está sujeto al extremo de un resorte sin masa, cuya constante elástica es $K = 100$ N m^{-1}. Si suponemos que oscila siguiendo un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm, halla:

a) El período del movimiento.

b) La velocidad máxima que adquiere el bloque.

c) Ahora se coloca un segundo bloque de masa 3 kg encima del primero en uno de los extremos del movimiento y sin comunicarle ninguna velocidad, calcula el nuevo período del conjunto de bloques.

d) calcula la nueva amplitud del conjunto.

e) calcula la nueva velocidad máxima.

Soluciones

a) $T = 0{,}2\,\pi$ s

b) $v_{max} = 1$ m s^{-1}

c) $T' = 0{,}4\,\pi$ s

d) $A' = 10$ cm

e) $v'_{max} = 0{,}5$ m s^{-1}

12.10.3. Un péndulo simple de masa 100 g y longitud de cuerda 60 cm ejecuta un movimiento armónico simple de 20° de amplitud. Tomando la gravedad del lugar donde está el péndulo como $g = 9{,}8$ m s^{-2}, calcula:

a) el período del movimiento.

b) la ecuación del movimiento, suponiendo que el péndulo ha partido del ángulo +20º en reposo.

c) Si ahora se acorta la longitud del péndulo a 40 cm, calcula el nuevo período del movimiento.

Soluciones

a) $T = 1{,}55$ s

b) $\theta = 20^\circ\ \cos(4{,}04\,t)$, donde θ está en ° y t está en s.

c) $T' = 1{,}27$ s