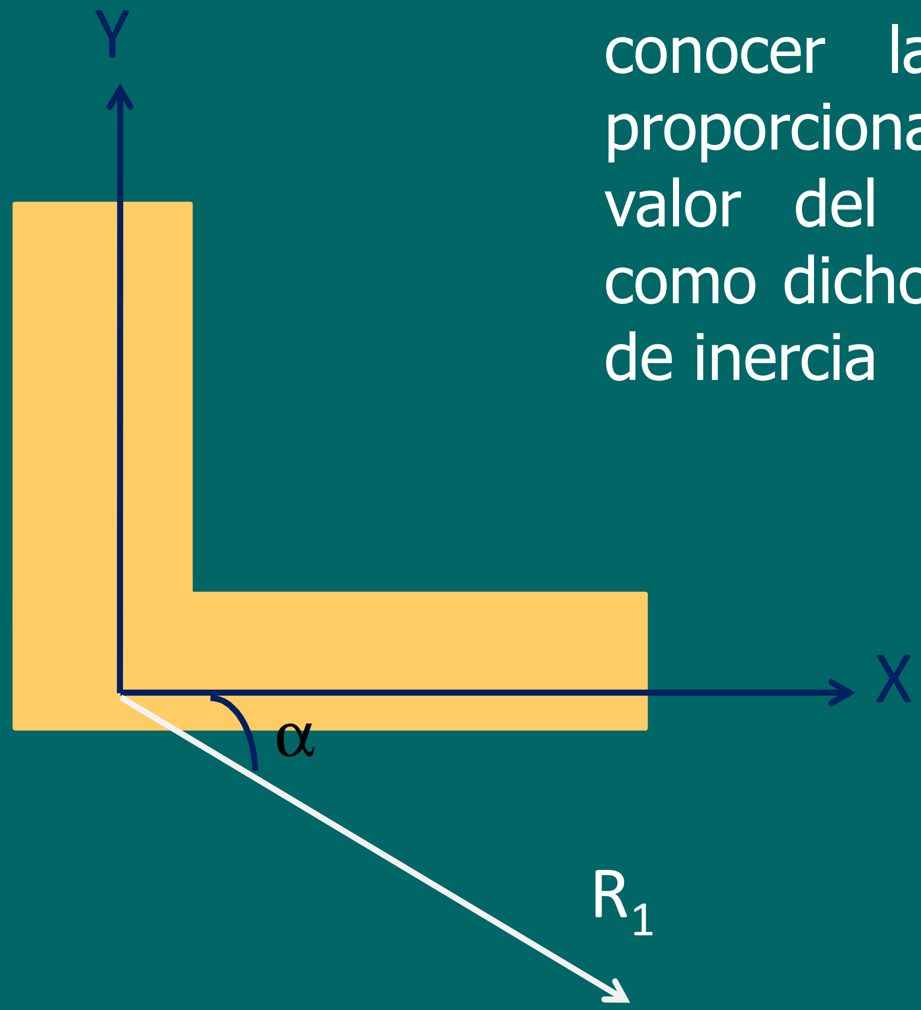
POLITÉCNICA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Círculo de Mohr

Elvira Martínez Ramírez

Justificación matemática

Dada una figura, de área A, se quiere conocer las rectas R_1 y R_2 que proporcionan el máximo y mínimo valor del momento de inercia, así como dichos valores de los momentos de inercia



Una recta R que proporcione un máximo (o mínimo) del momento de inercia forma con el eje OX un ángulo α

$$I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\,sen^2\alpha - 2P_{XY}\,sen\alpha\cos\alpha$$

$$sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$

$$sen^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$I_R = \frac{I_{OX}+I_{OY}}{2} + \frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}\cos 2\alpha - P_{XY}\,sen2\alpha$$

$$P_{R_1R_2} = P_{XY}\,sen(\alpha+\beta) - I_{OX}\cos\alpha\cos\beta - I_{OY}\,sen\alpha\,sen\beta$$

Si R_1 es perpendicular a R_2 $\quad \beta = \alpha + \pi/2$

$$sen\beta = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = -sen\alpha$$

$$sen(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha$$

$$P_{R_1R_2} = P_{XY}\cos 2\alpha + sen 2\alpha\left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2}\right)$$

Si el producto de inercia respecto a dos rectas R_1 y R_2 es nulo, se verifica

$$P_{XY}\cos 2\alpha + sen 2\alpha\left(\frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}\right)=0$$

Una de las rectas formará con la horizontal un ángulo α de forma que se cumple

$$tg 2\alpha = \frac{2P_{XY}}{I_{OY}-I_{OX}}$$

El momento de inercia respecto a dicha recta será máximo o mínimo

Reordenando las ecuaciones anteriores

$$I_R - \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} = \frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \cos 2\alpha - P_{XY} sen 2\alpha$$

$$P_{R_1 R_2} = \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right) sen 2\alpha + P_{XY} \cos 2\alpha$$

Elevando al cuadrado cada ecuación

$$\left[I_R - \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \right]^2 = \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right)^2 \cos^2 2\alpha - 2 \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right) P_{XY} sen 2\alpha \cos 2\alpha + P_{XY}^2 sen^2 2\alpha$$

$$P_{R_1 R_2}^2 = \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right)^2 sen^2 2\alpha + 2 P_{XY} \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right) sen 2\alpha \cos 2\alpha + P_{XY}^2 \cos^2 2\alpha$$

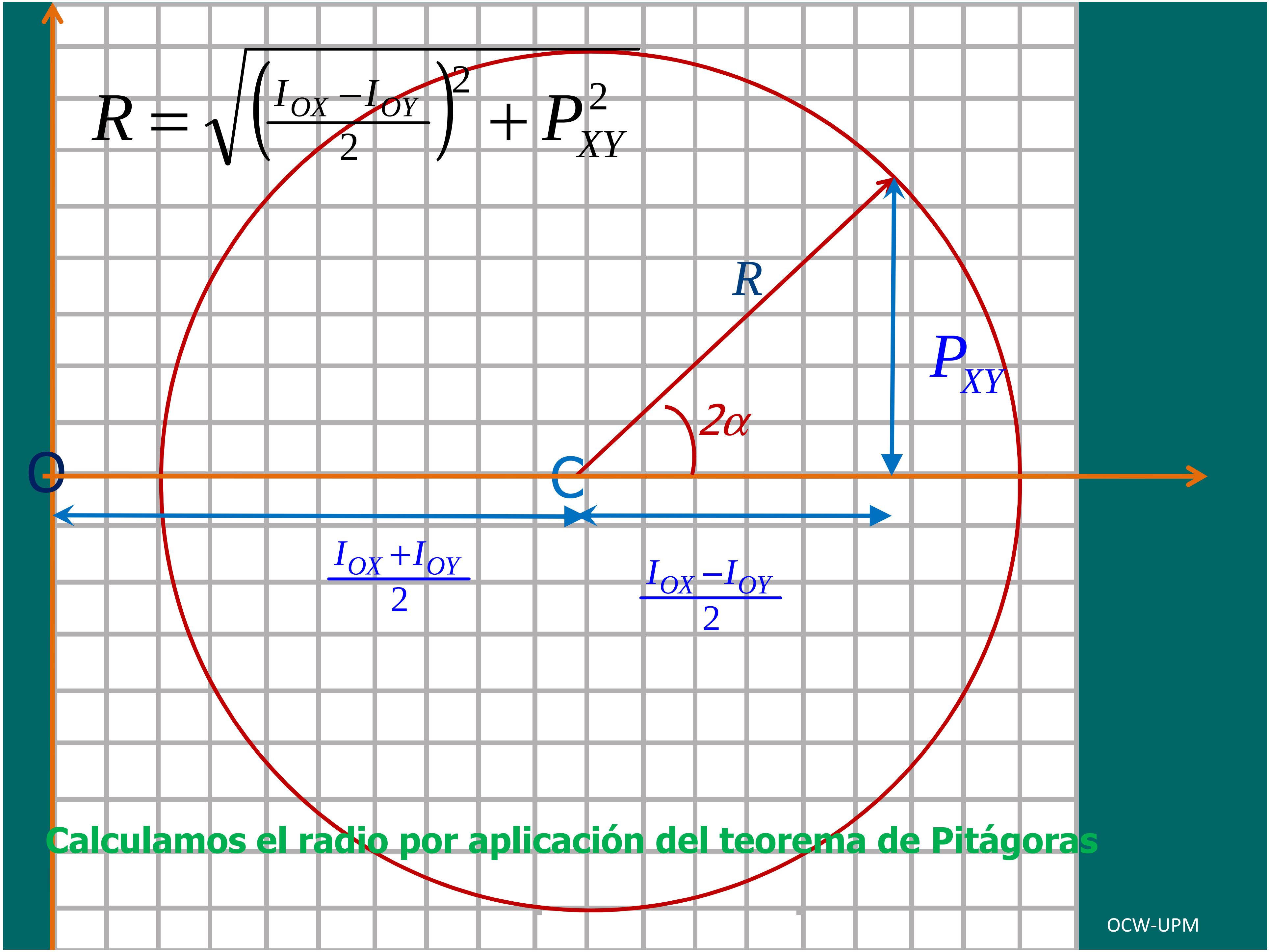
Sumando las dos ecuaciones

$$\left[I_R - \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2}\right]^2 + P_{R_1R_2}^2 = \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2}\right)^2 + P_{XY}^2$$

Ecuación análoga a la de una circunferencia de radio R y centro C(a,b)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

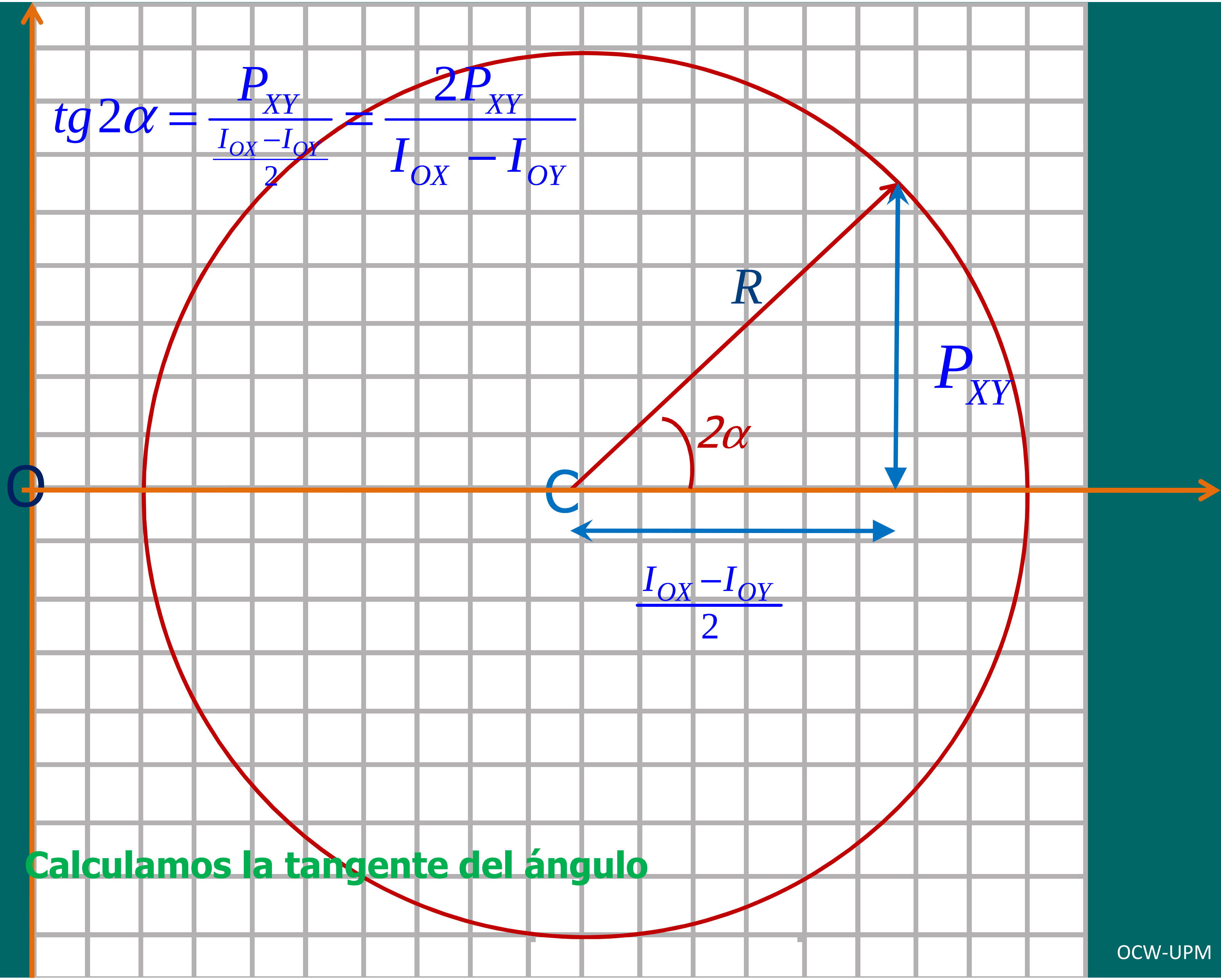
Donde $C\left(\frac{I_{OX}+I_{OY}}{2}, 0\right)$ y $R = \sqrt{\left(\frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}\right)^2 + P_{XY}^2}$



$$R=\sqrt{\left(\frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}\right)^2+P_{XY}^2}$$

Calculamos el radio por aplicación del teorema de Pitágoras

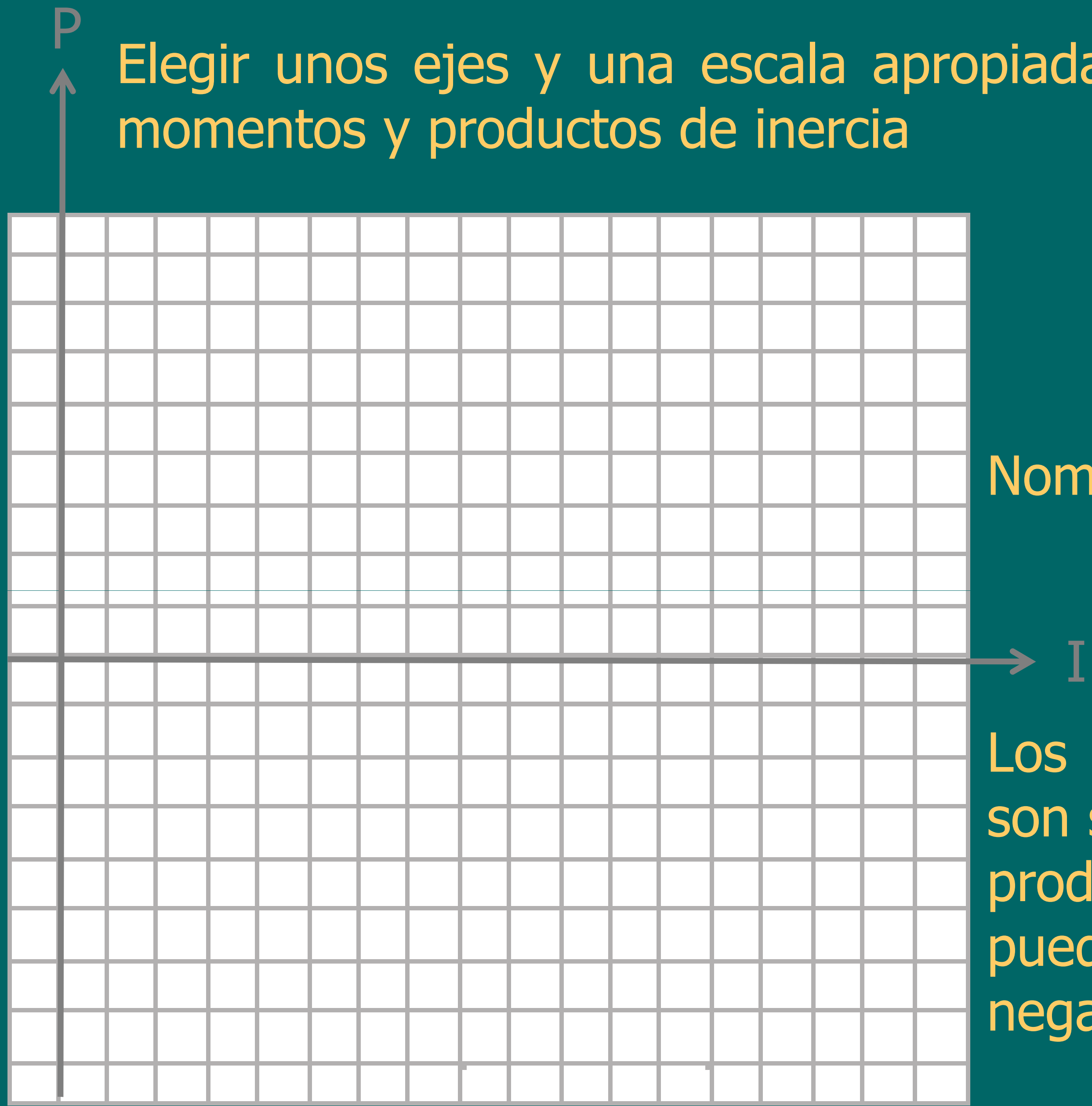
$$tg\,2\alpha = \frac{P_{XY}}{\frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}} = \frac{2P_{XY}}{I_{OX}-I_{OY}}$$



Calculamos la tangente del ángulo

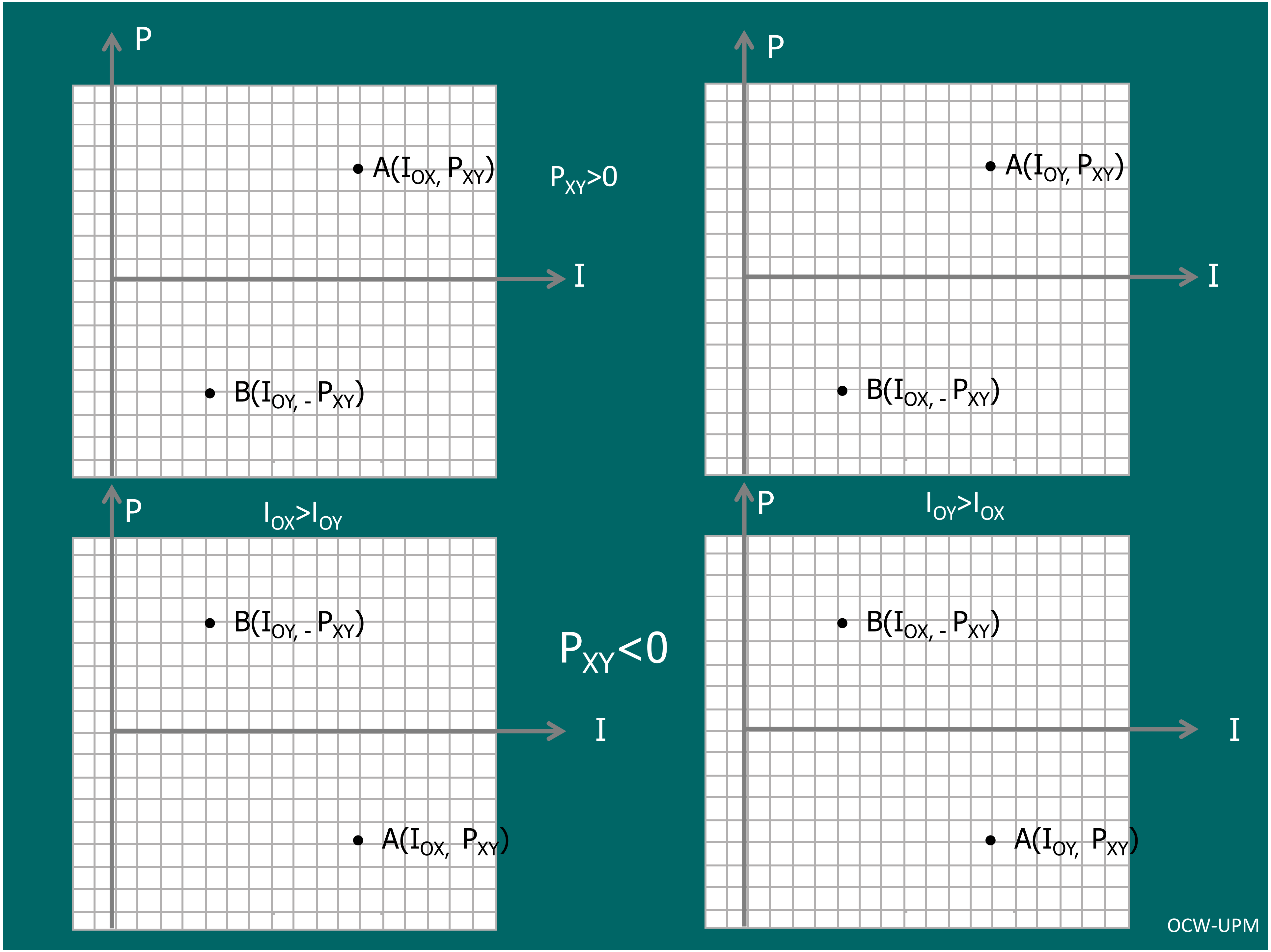
Construcción geométrica

Elegir unos ejes y una escala apropiada para dibujar los momentos y productos de inercia

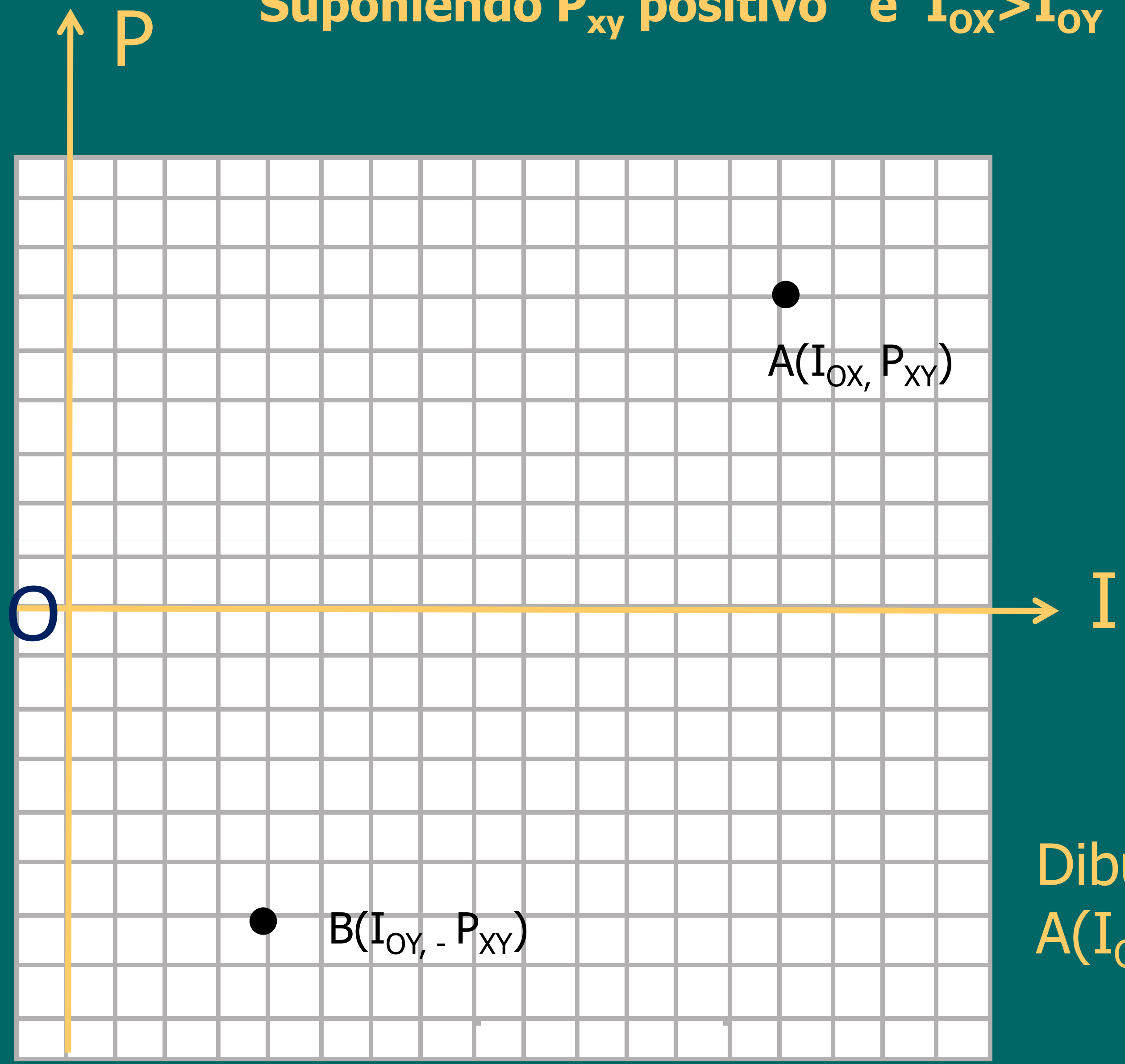


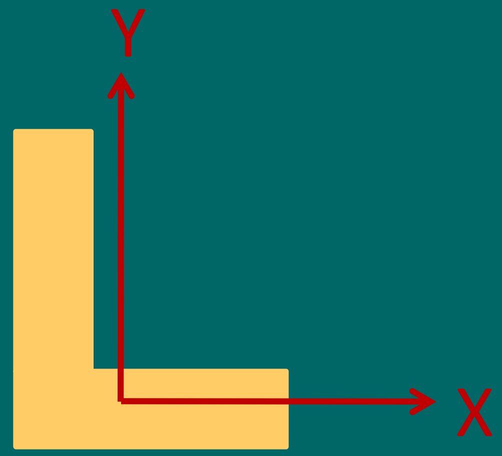
Nombrar los ejes

Los momentos de inercia son siempre positivos, los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o nulos .

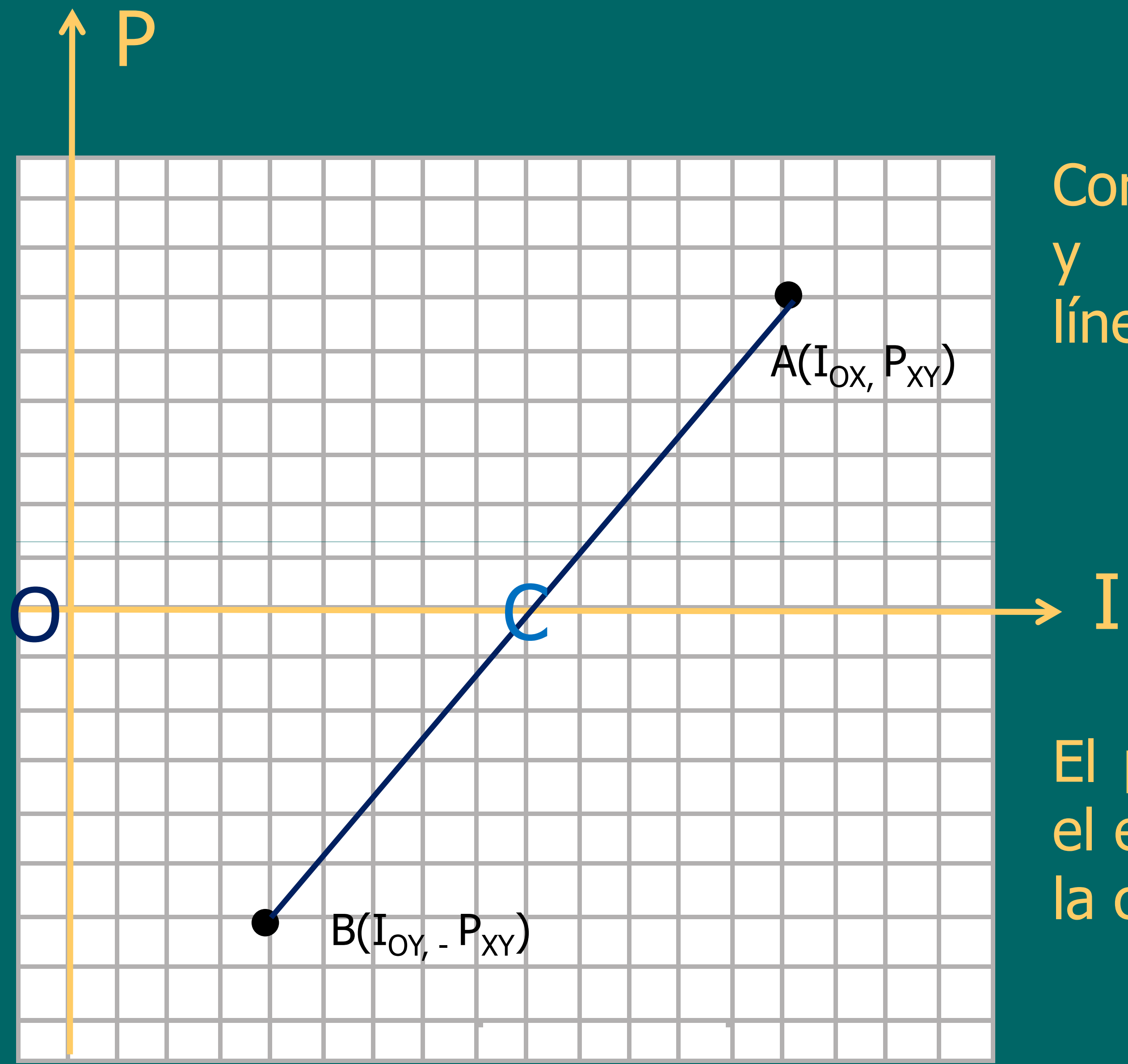

P
A(I_{OX}, P_{XY})
B(I_{OY}, - P_{XY})
I
$P_{XY}>0$
P
A(I_{OY}, P_{XY})
B(I_{OX}, - P_{XY})
I
P
$I_{OX}>I_{OY}$
B(I_{OY}, - P_{XY})
A(I_{OX}, P_{XY})
I
$P_{XY}<0$
P
$I_{OY}>I_{OX}$
B(I_{OX}, - P_{XY})
A(I_{OY}, P_{XY})
I
OCW-UPM

Suponiendo P_{xy} positivo e $I_{OX} > I_{OY}$



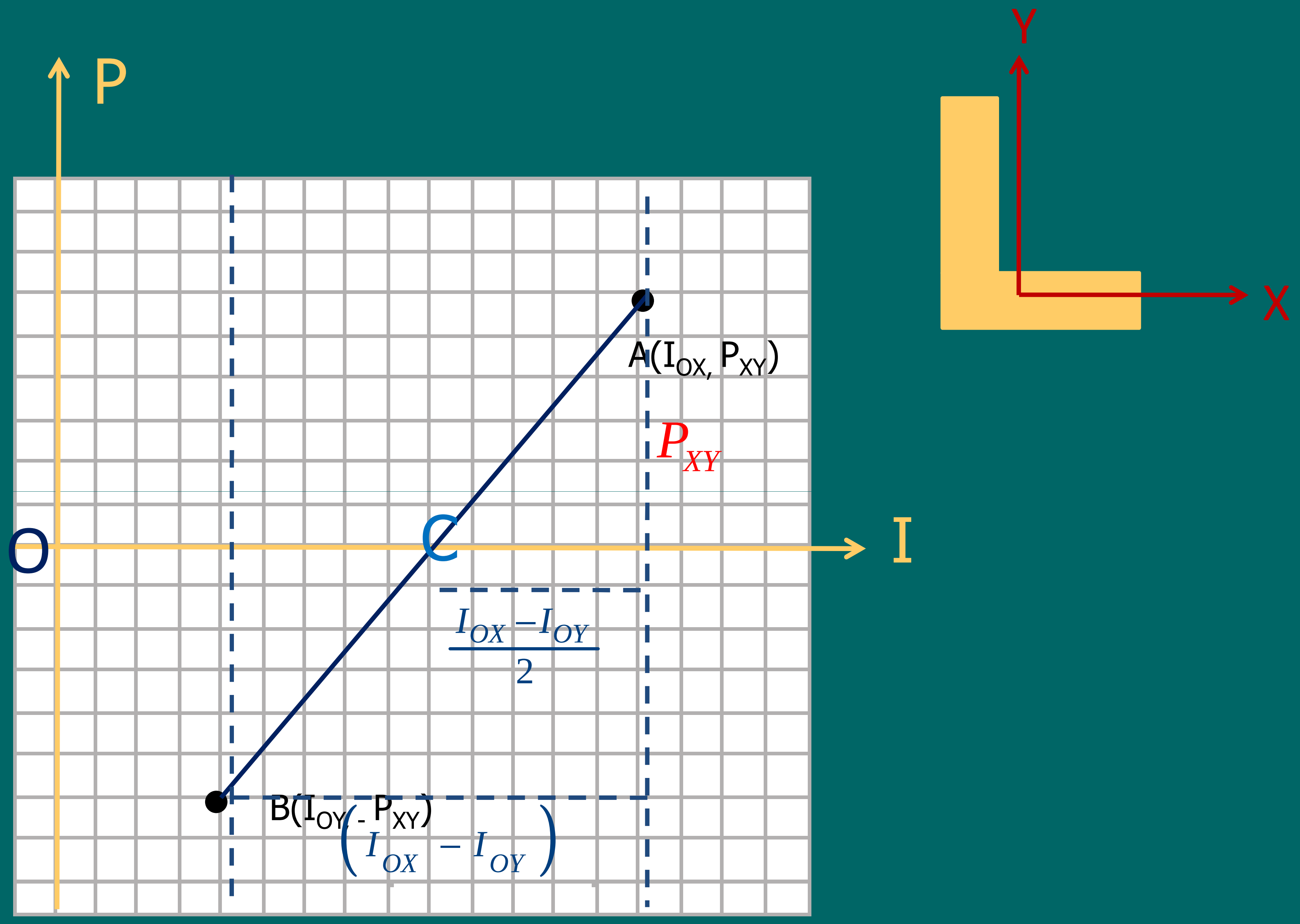


Dibujar los puntos $A(I_{OX}, P_{XY})$ y $B\ (I_{Oy}, P_{XY})$.



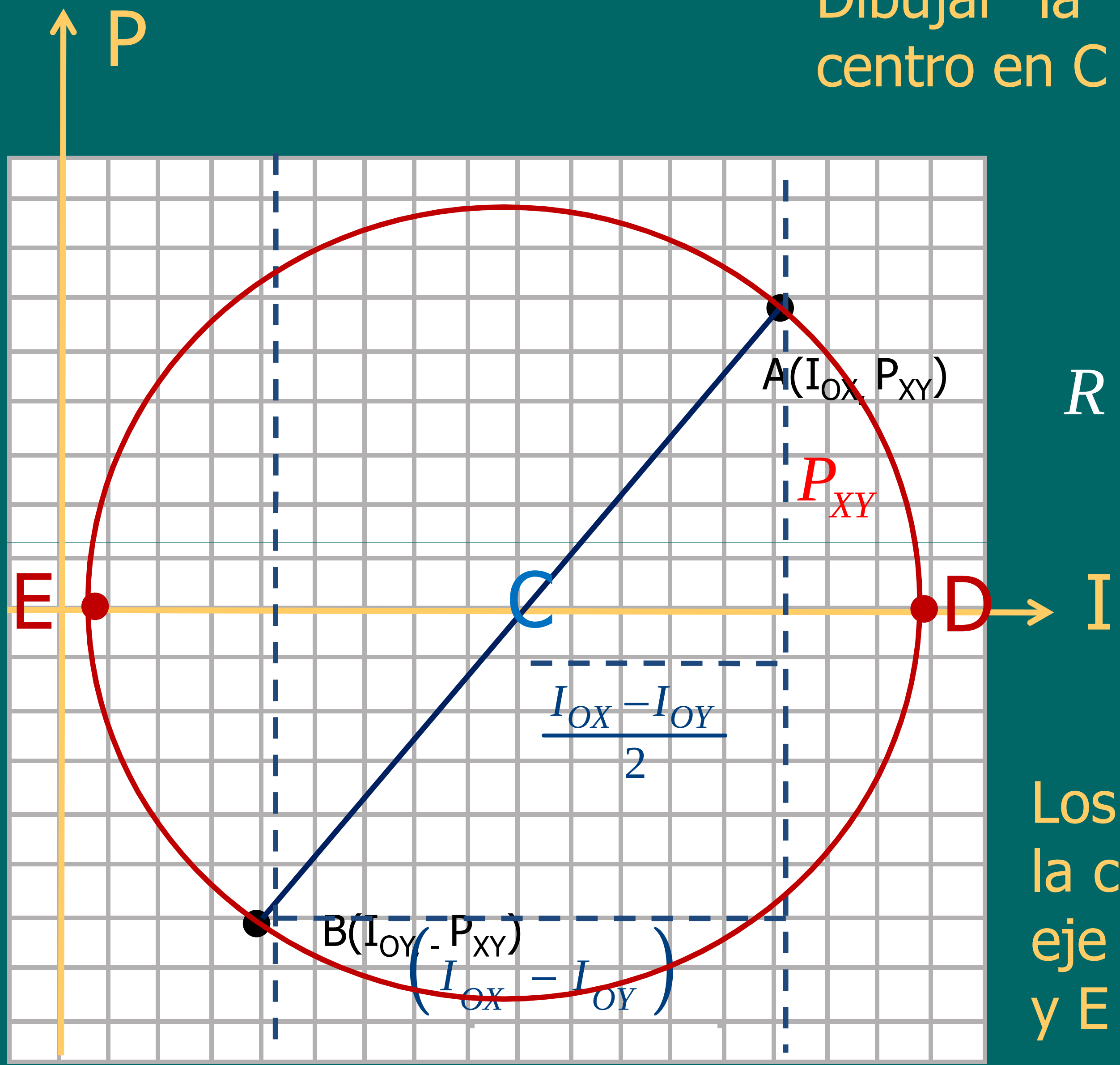
Conectar los puntos A y B, mediante una línea recta.

El punto de corte con el eje I es el centro de la circunferencia, C.



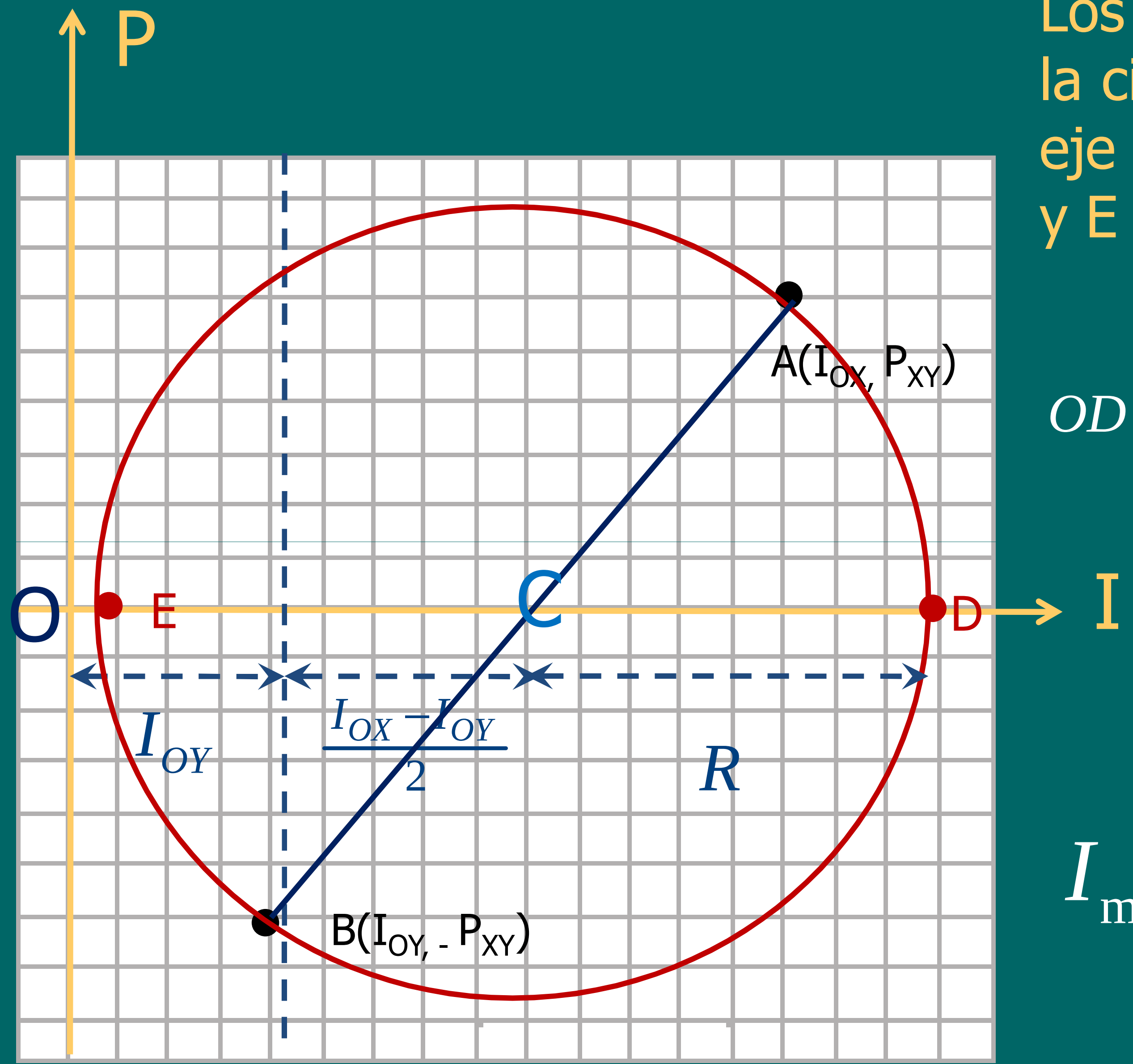
OCW-UPM

Dibujar la circunferencia con centro en C y radio R=CA=CB



$$R=\sqrt{\left(\frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}\right)^2+P_{XY}{}^2}$$

Los puntos de corte de la circunferencia con el eje I, son los puntos D y E

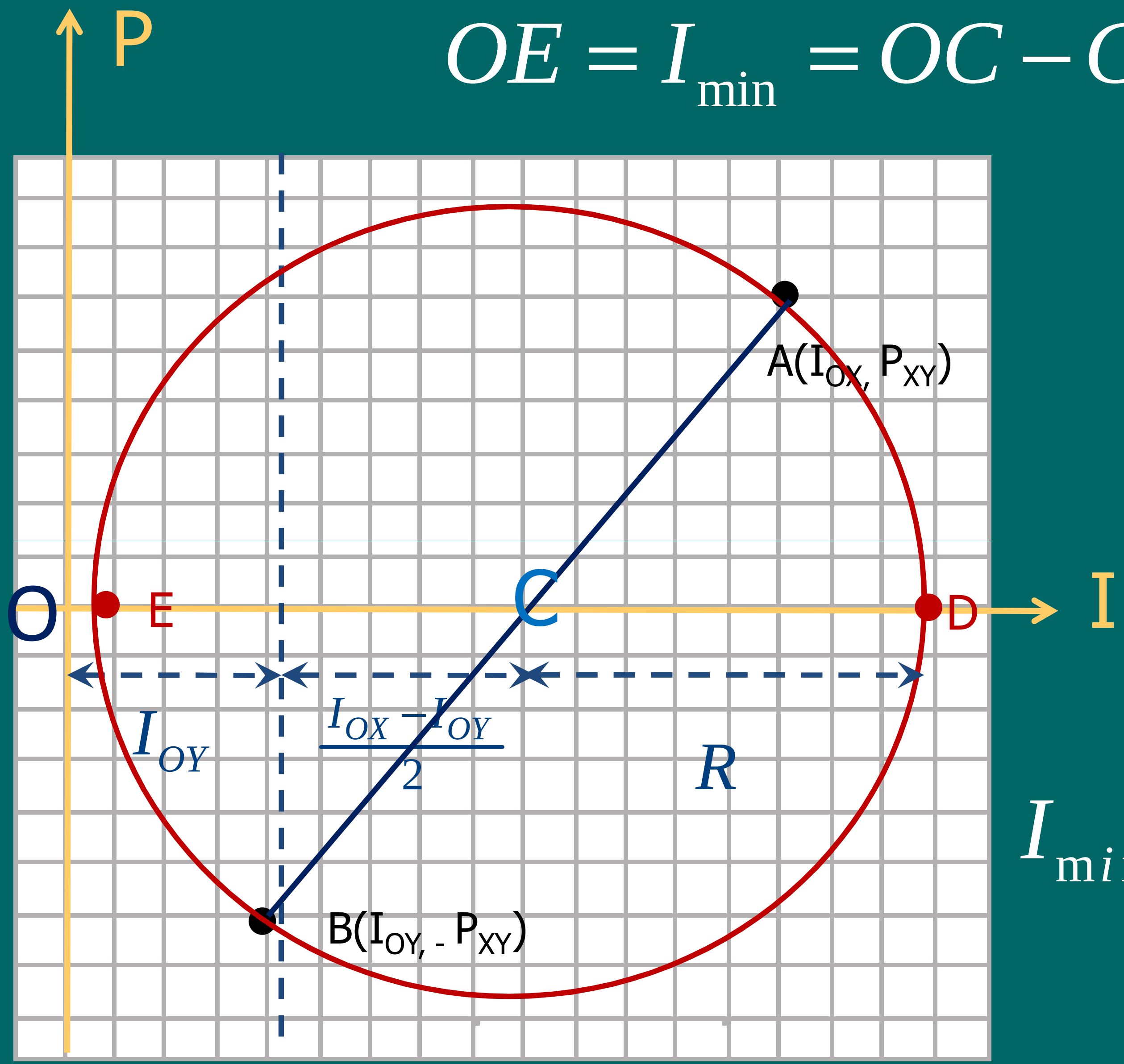


Los puntos de corte de la circunferencia con el eje I, son los puntos D y E (D>E)

$$OD = I_{\max} = I_{OY} + \frac{I_{OX}-I_{OY}}{2} + R$$

$$I_{\max} = \frac{I_{OX}+I_{OY}}{2} + R$$

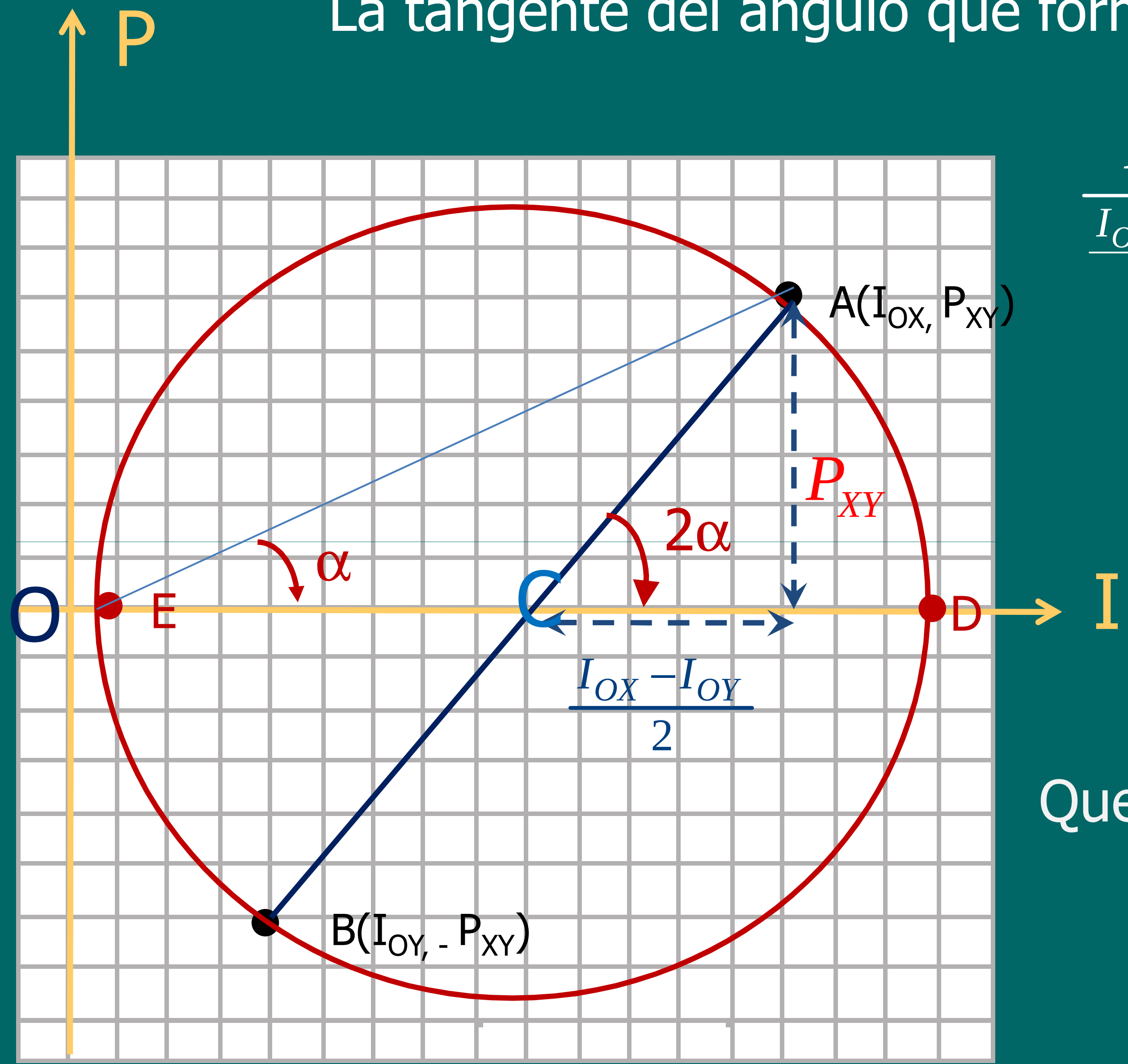
$$OE = I_{\min} = OC - CE = OC - R$$



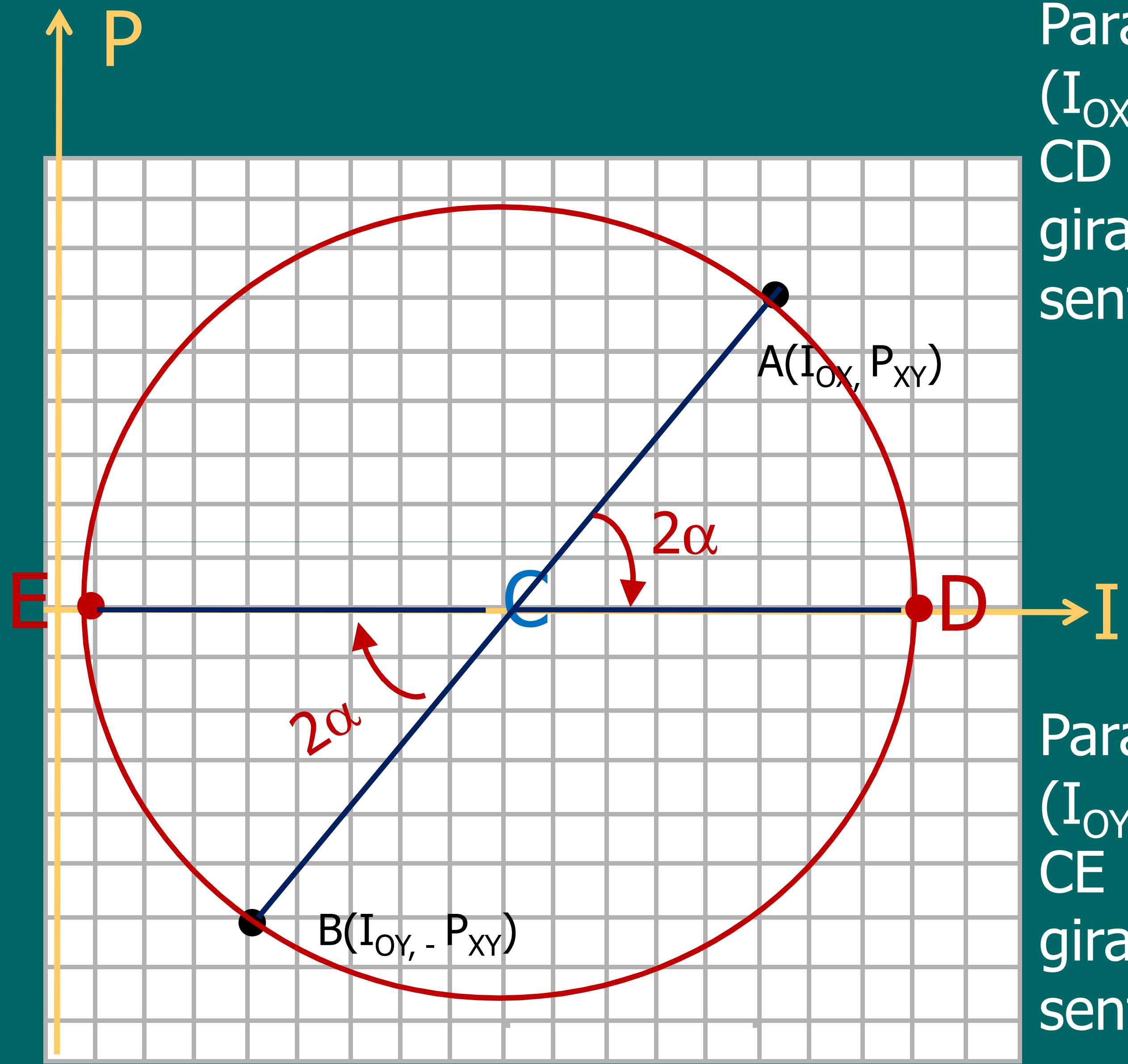
$$I_{mix} = \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} - R$$

La tangente del ángulo que forma CA con CD es

$$\frac{P_{XY}}{\frac{I_{OX}-I_{OY}}{2}} = \frac{2P_{XY}}{I_{OX}-I_{OY}}$$



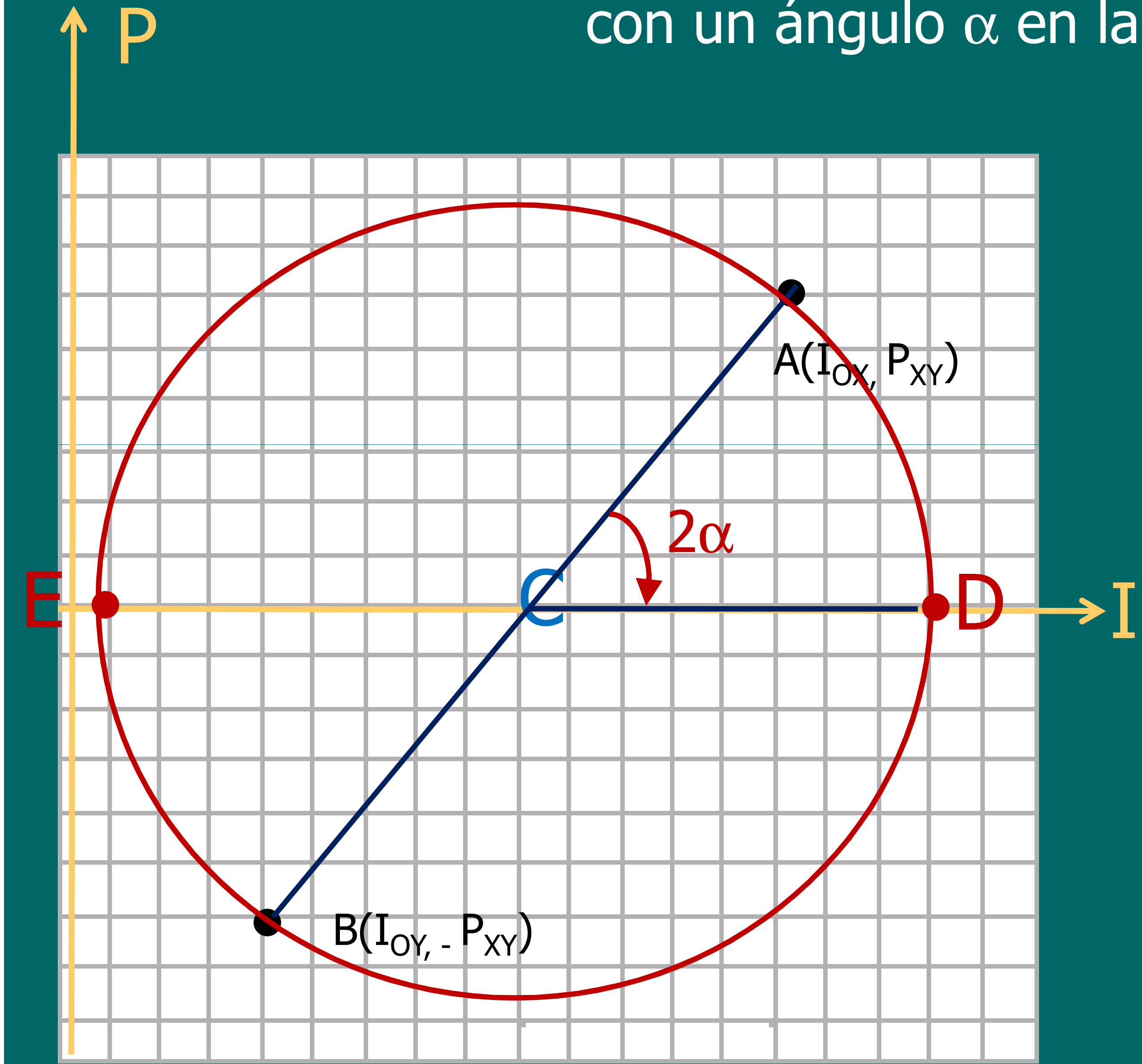
Que coincide con 2α



Para que la recta CA (I_{OX}) llegue a la recta CD (I_{max}) tiene que girar un ángulo 2α en sentido horario

Para que la recta CB (I_{OY}) llegue a la recta CE (I_{min}) tiene que girar un ángulo 2α en sentido horario

Un ángulo 2α en el círculo de Mohr en sentido horario, se corresponde con un ángulo α en la figura real



El eje OX tiene que girar un ángulo α en sentido antihorario para obtener la recta R_1 que proporciona el máximo valor del momento de inercia.

El eje OY tiene que girar un ángulo α en sentido antihorario para obtener la recta R_2 que proporciona el mínimo valor del momento de inercia.