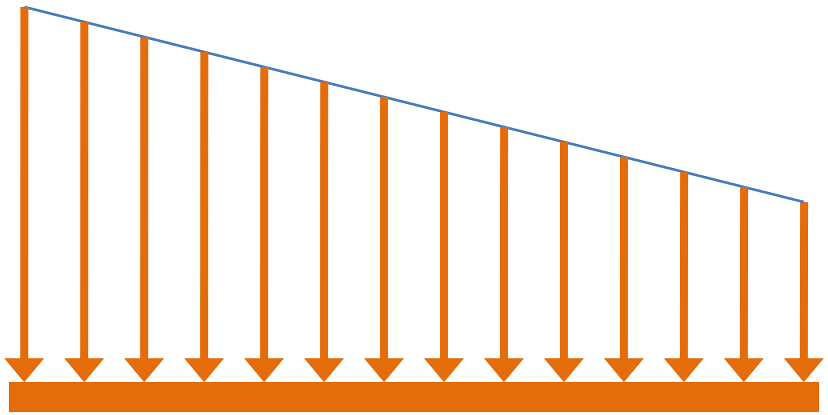
POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Fuerzas distribuidas

1. Centro de gravedad, centro de masas
2. Momento de inercia



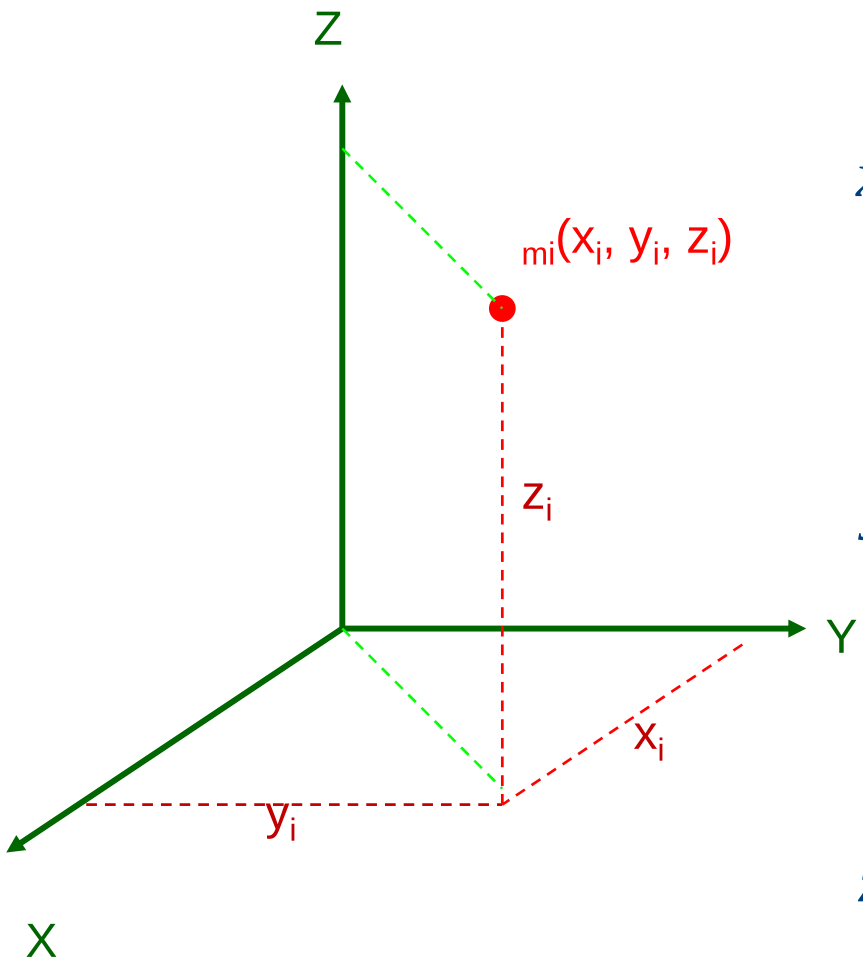
En el tratamiento de las fuerzas distribuidas no es muy difícil encontrar la resultante de estas fuerzas distribuidas.

Para que la resultante tenga el mismo efecto que las fuerzas distribuidas, ésta debe actuar en un punto denominado centroide del sistema

El centroide de un sistema es un punto en el que puede considerarse que está concentrado un sistema de fuerzas distribuidas, con el mismo efecto exactamente.

Este concepto se encuentra en el análisis de esfuerzos y deformaciones de vigas y árboles, y es conocido comúnmente con el nombre de primer momento.

Centroide de un sistema material discreto

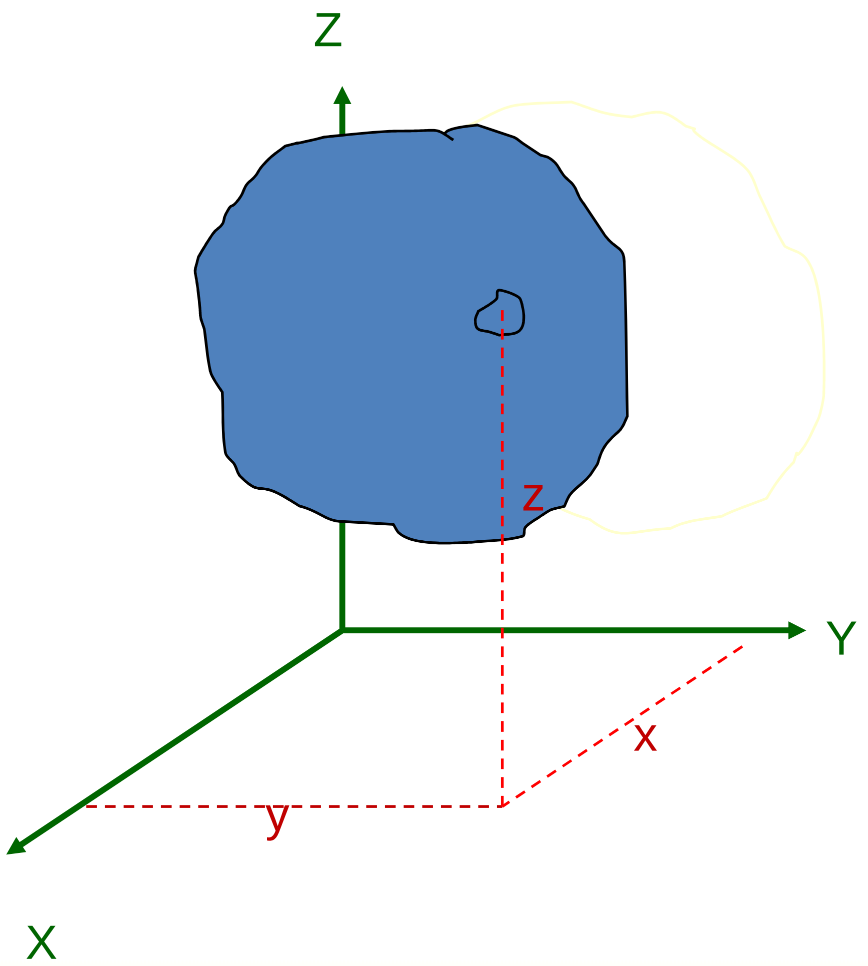


$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}$$

$$z_C = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}$$

Centroide de un sistema material continuo

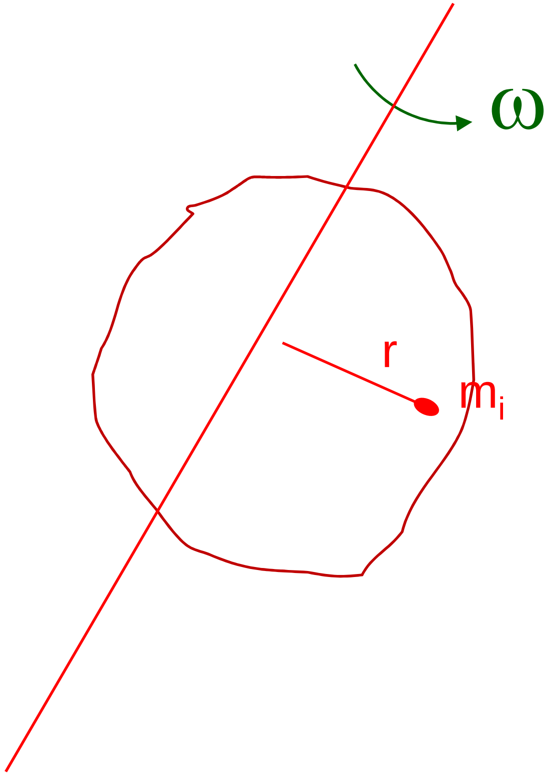


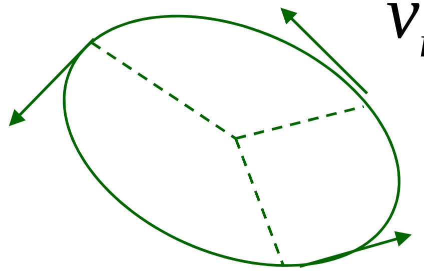
$$x_C = \frac{\iiint_V x\,dm}{M}$$

$$y_C = \frac{\iiint_V y\,dm}{M}$$

$$z_C = \frac{\iiint_V z\,dm}{M}$$

Momento de inercia respecto a un eje





$$v_i = r_i\omega$$

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} I_{eje}\omega^2$$

$$I_{eje} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

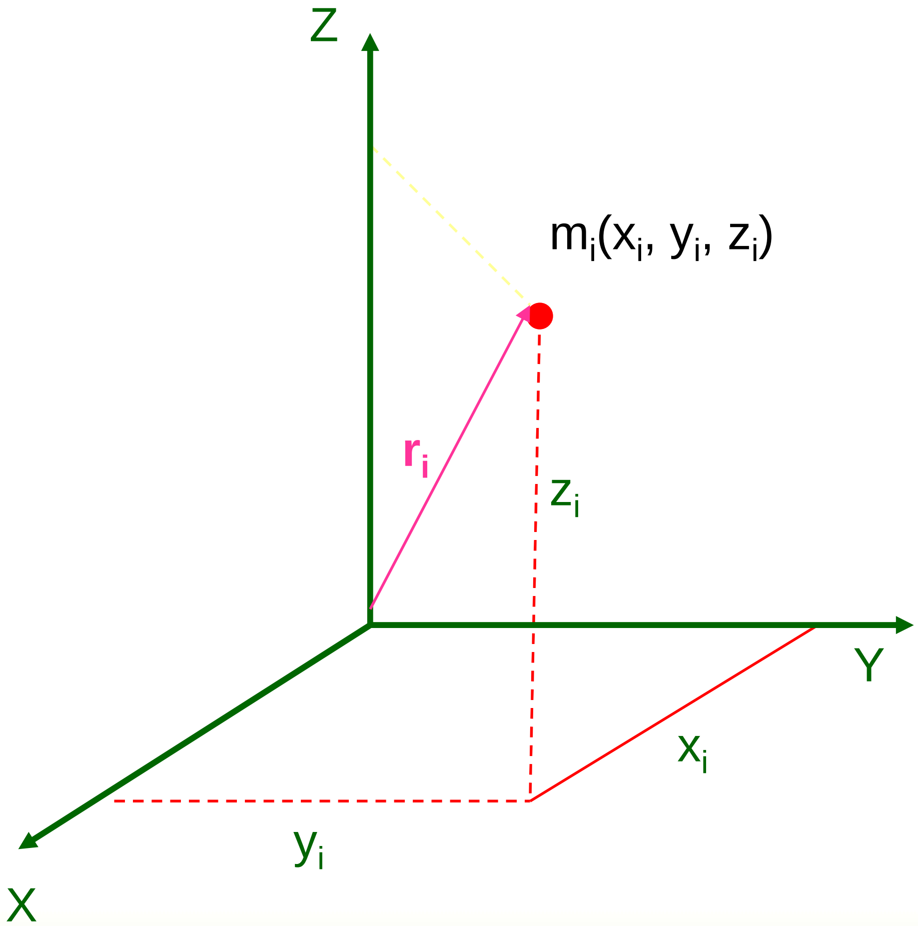
Momentos de inercia respecto puntos, ejes y planos

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{YOX} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

$$I_{YOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

$$I_{XOZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$$



Momentos de inercia respecto puntos, ejes y planos

$$I_{OX} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) = I_{XOY} + I_{XOZ}$$

$$I_{OY} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2) = I_{XOY} + I_{YOZ}$$

$$I_{OZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

$$I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ}) = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto

$$I_O = I_{XOY} + I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un punto es la semisuma de los momentos de inercia respecto a tres ejes perpendiculares entre sí que se corten en dicho punto

$$I_O = \frac{1}{2}(I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ})$$

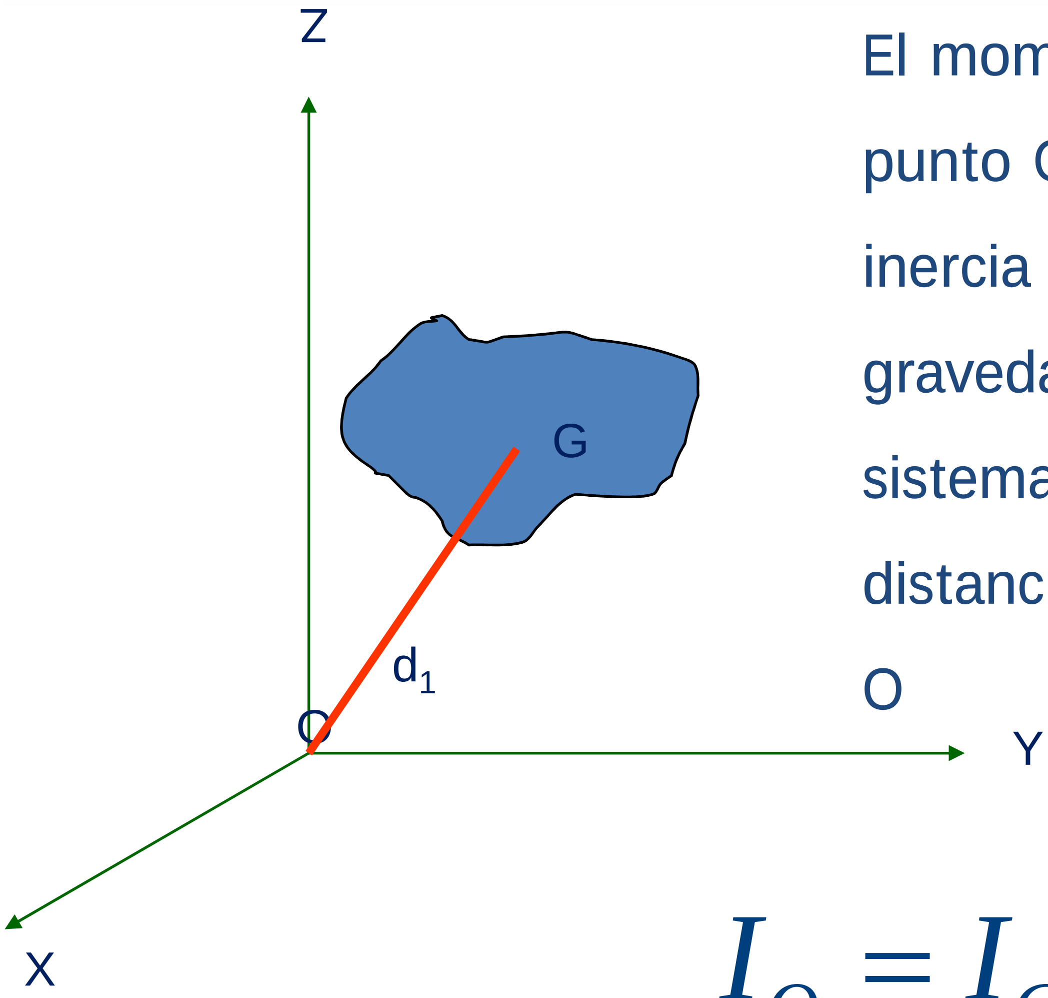
El momento de inercia respecto a un punto es la suma del momento de inercia respecto a un eje y el momento de inercia respecto a un plan perpendicular a él que se corten en dicho punto

$$I_O = I_{OZ} + I_{XOY} = I_{OY} + I_{XOZ} = I_{OX} + I_{YOZ}$$

El momento de inercia respecto a un eje es la suma de los momentos de inercia respecto a los dos planos perpendiculares entre sí que se corten en dicho eje

$$I_{OX} = I_{XOY} + I_{XOZ} \quad I_{OY} = I_{XOY} + I_{YOZ} \quad I_{OZ} = I_{XOZ} + I_{YOZ}$$

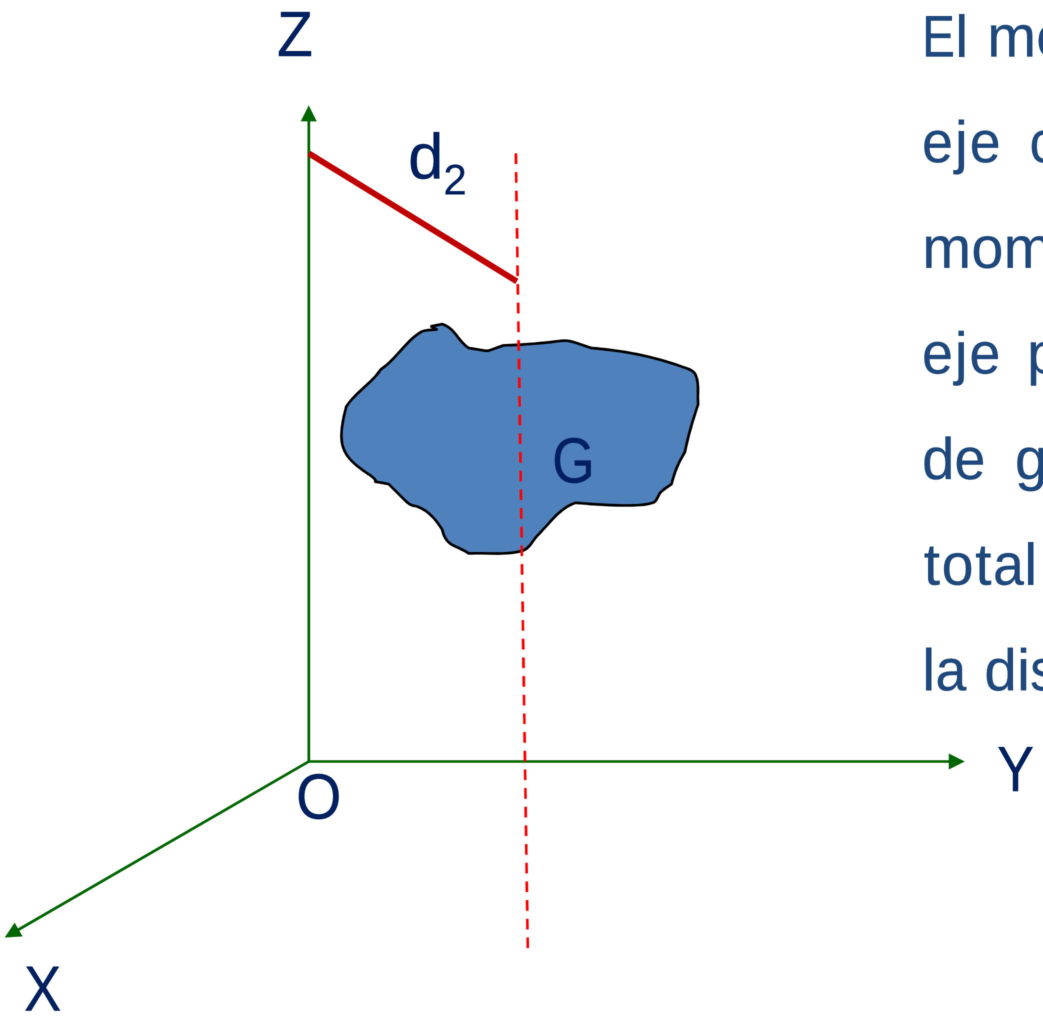
Teorema de Steiner



El momento de inercia respecto a un punto O es la suma del momento de inercia respecto al centro de gravedad G y de la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los puntos G y O

$$I_O = I_G + Md_1^2$$

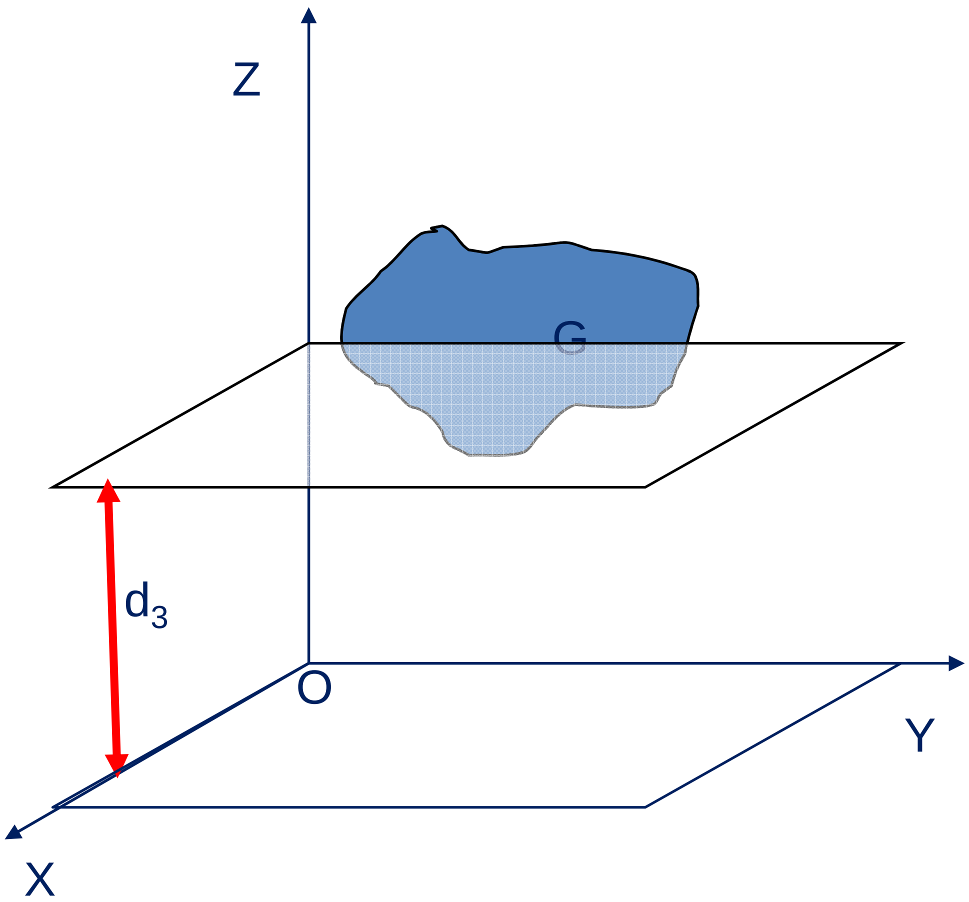
Teorema de Steiner



El momento de inercia respecto a un eje cualquiera (OZ) es la suma del momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de gravedad G (Eje CZ) y la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los dos ejes

$$I_{OZ} = I_{GZ} + Md_2^2$$

Teorema de Steiner



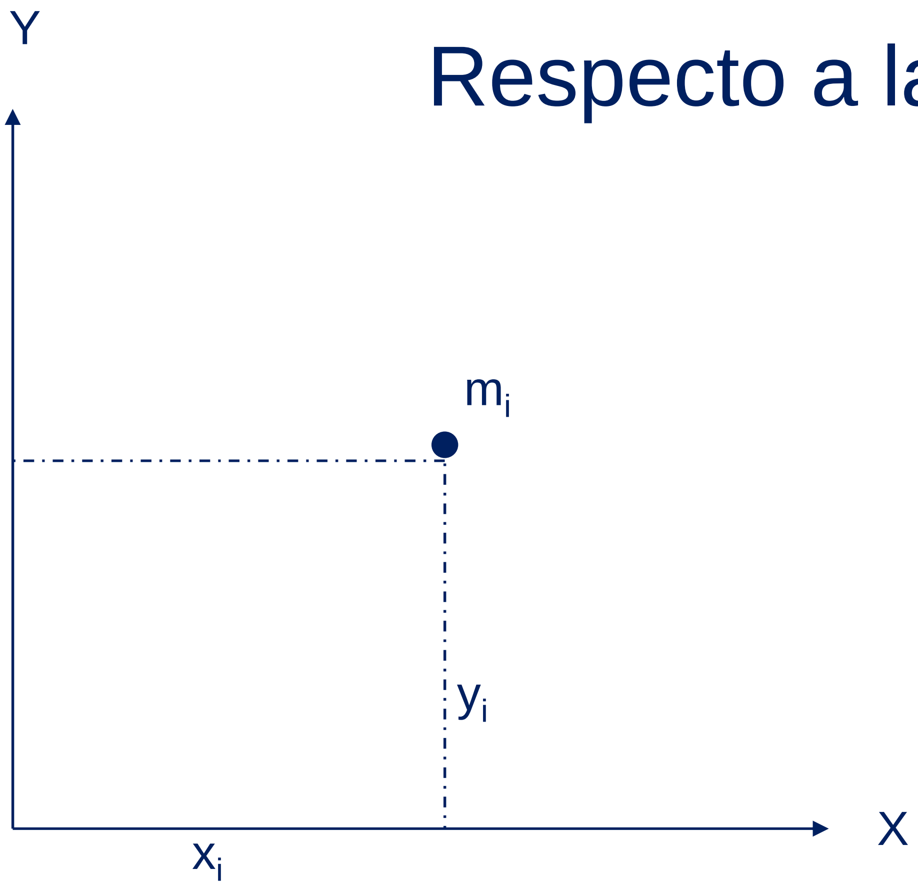
El momento de inercia respecto a un plano cualquiera (XOY) es la suma del momento de inercia respecto a un plano paralelo que pase por el centro de gravedad G (Plano XGY) y la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa los dos planos

$$I_{XOY} = I_{XGY} + Md_3^2$$

Teorema de Steiner

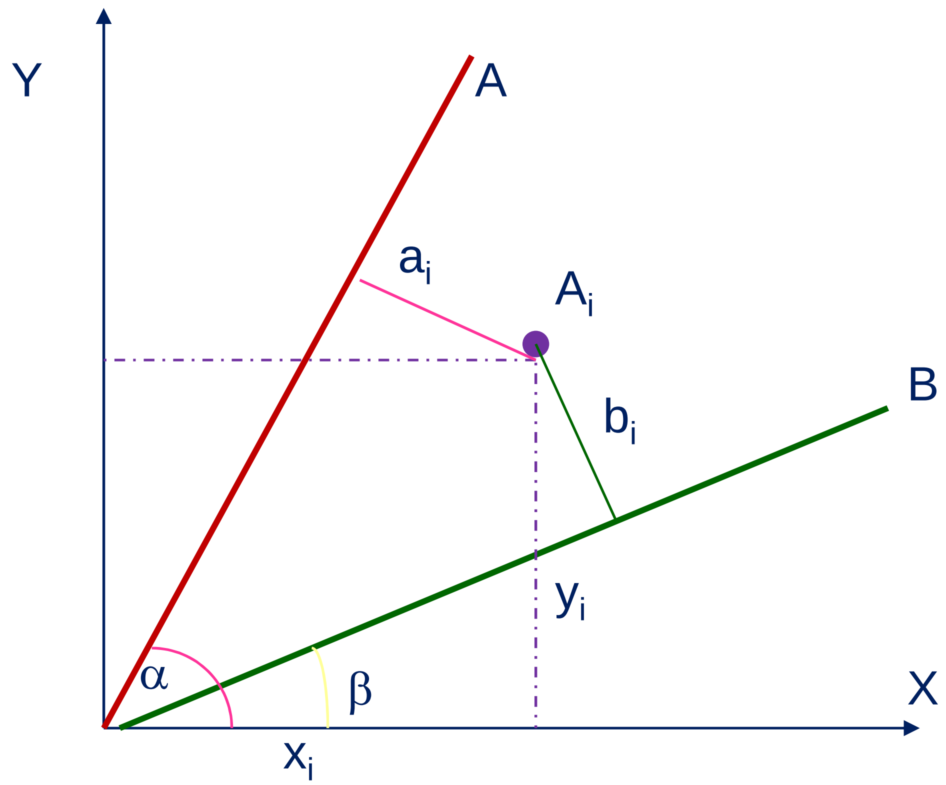
El momento de inercia respecto a un punto, eje o plano es igual al momento de inercia respecto a un punto, eje o plano paralelo al anterior y que pase por el centro de gravedad, mas la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia que separa ambos puntos, ejes o planos

Respecto a las rectas OX, OY



$$P_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Producto de inercia respecto a dos rectas A y B



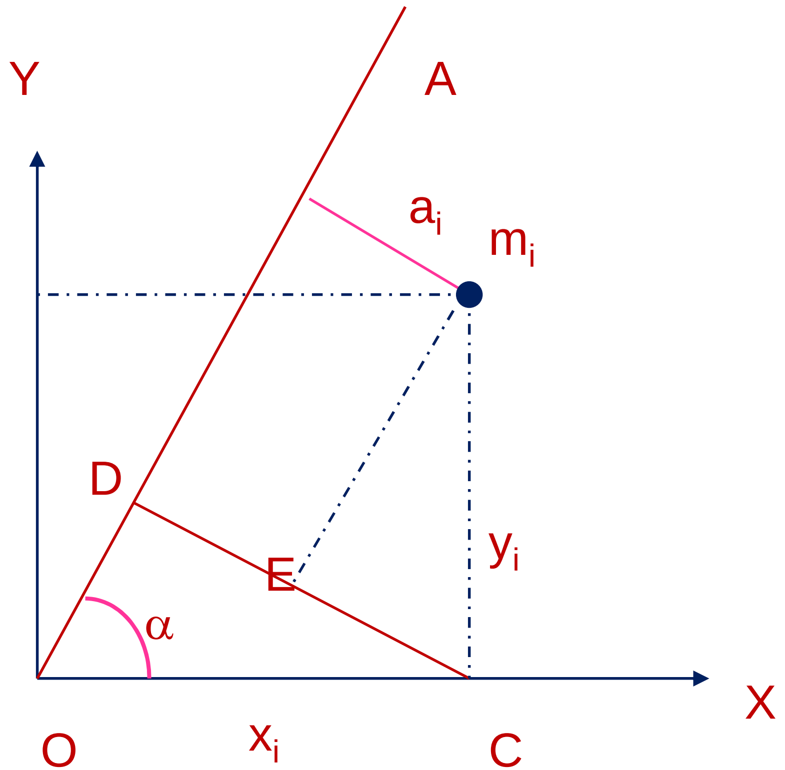
Respecto a las rectas OX, OY

$$P_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Respecto a las rectas A, B

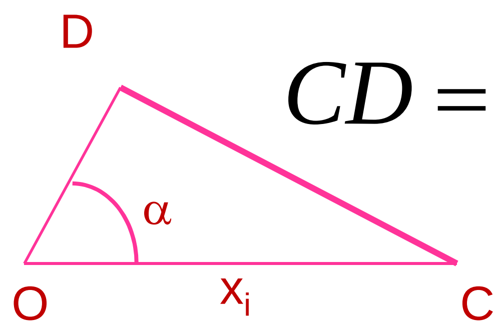
$$P_{AB} = \sum_{i=1}^{n} A_i a_i b_i$$

Producto de inercia respecto a dos rectas A y B

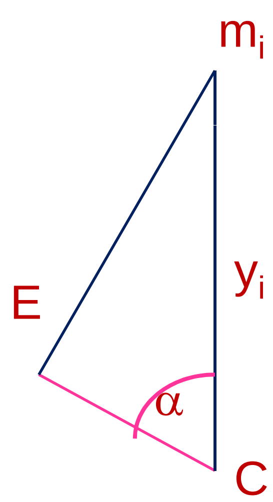


$$a_i = CD - CE$$

$$a_i = x_i sen\alpha - y_i \cos\alpha$$

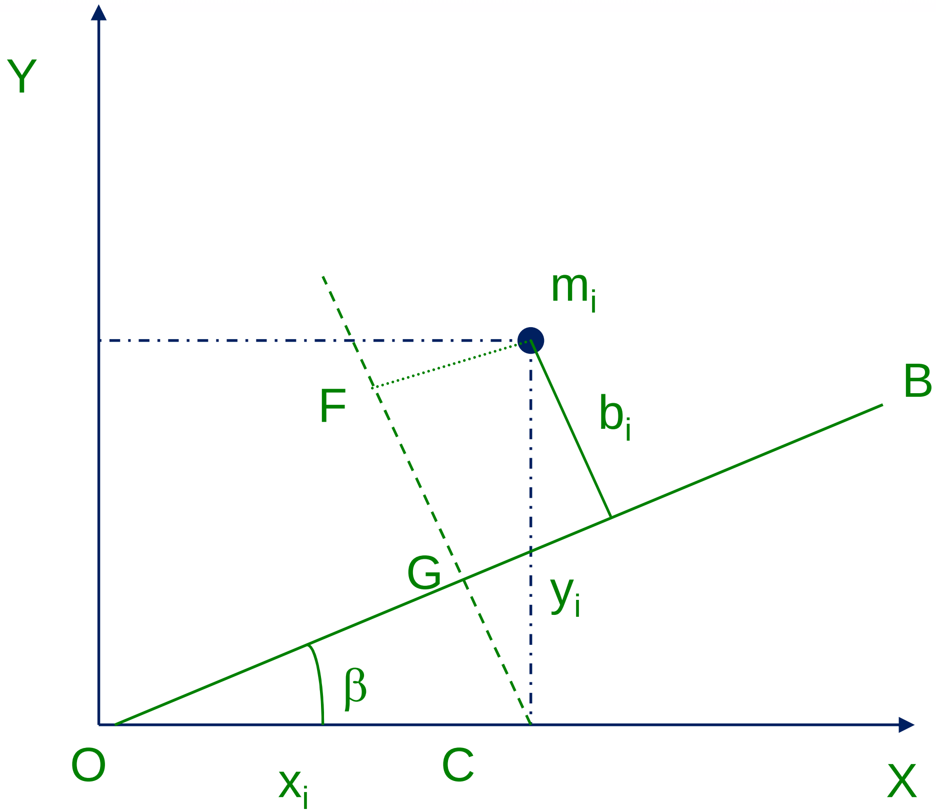


$$CD = x_i sen\alpha$$



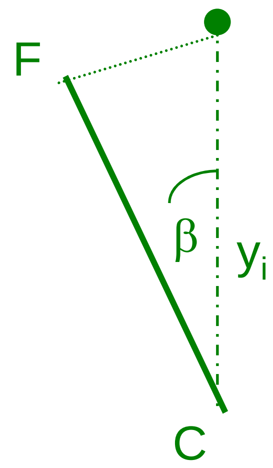
$$CE = y_i \cos\alpha$$

Producto de inercia respecto a dos rectas A y B

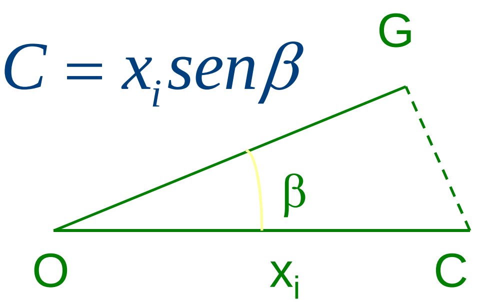


$$b_i = FC - CG$$

$$FC = y_i \cos\beta$$



$$GC = x_i sen\beta$$



$$b_i = y_i \cos\beta - x_i sen\beta$$

Producto de inercia respecto a dos rectas A y B

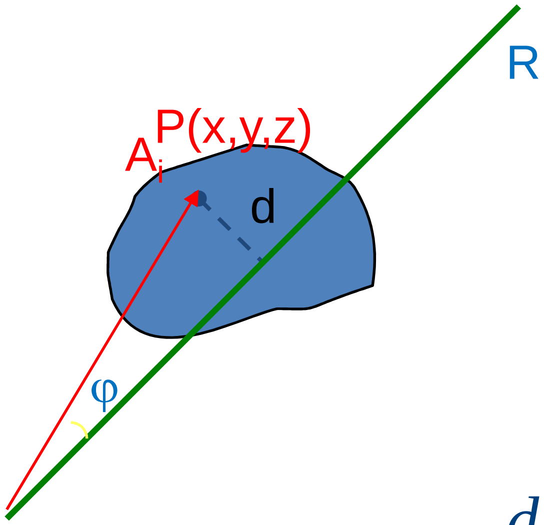
$$P_{AB} = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i sen\alpha - y_i \cos\alpha)(y_i \cos\beta - x_i sen\beta) =$$

$$\boxed{P_{AB} = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) P_{XY} - \cos\alpha \cos\beta I_{OX} - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta I_{OY}}$$

Teorema de Steiner para productos de inercia

El producto de inercia respecto a dos rectas cualesquiera es igual a la suma al producto de inercia respecto a dos rectas paralelas a las anteriores que pasen por el centroide y el producto del área de la figura por las distancias entre las rectas

Momento de inercia respecto a una recta R



$$I_R = \sum_{i=1}^{n} A_i d^2$$

$$d = \left|\overrightarrow{OP}\right| sen\varphi = \left|\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}_R\right|$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{u}_R = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

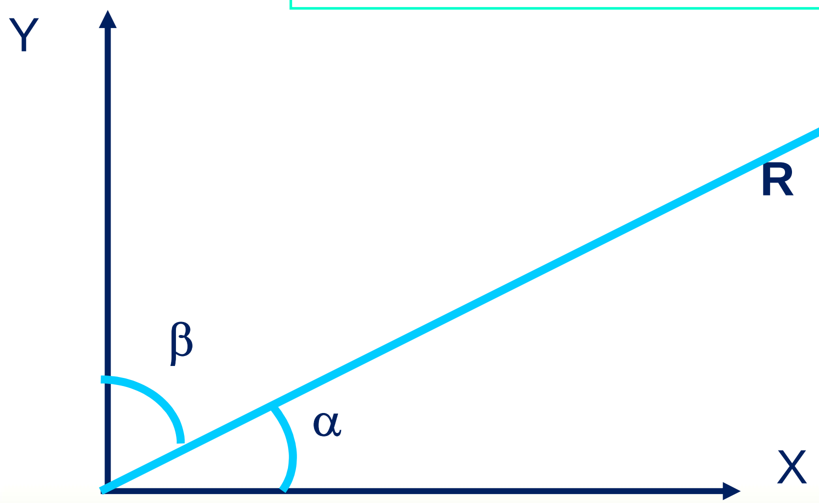
$$d^2 = \cos^2\alpha(y^2+z^2)+\cos^2\beta(x^2+z^2)+\cos^2\gamma(x^2+y^2)-$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma$$

$$I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\cos^2\beta + I_{OZ}\cos^2\gamma -$$
$$-2P_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2P_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma - 2P_{YZ}\cos\beta\cos\gamma$$

$$I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\cos^2\beta + I_{OZ}\cos^2\gamma -$$
$$-2P_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2P_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma - 2P_{YZ}\cos\beta\cos\gamma$$

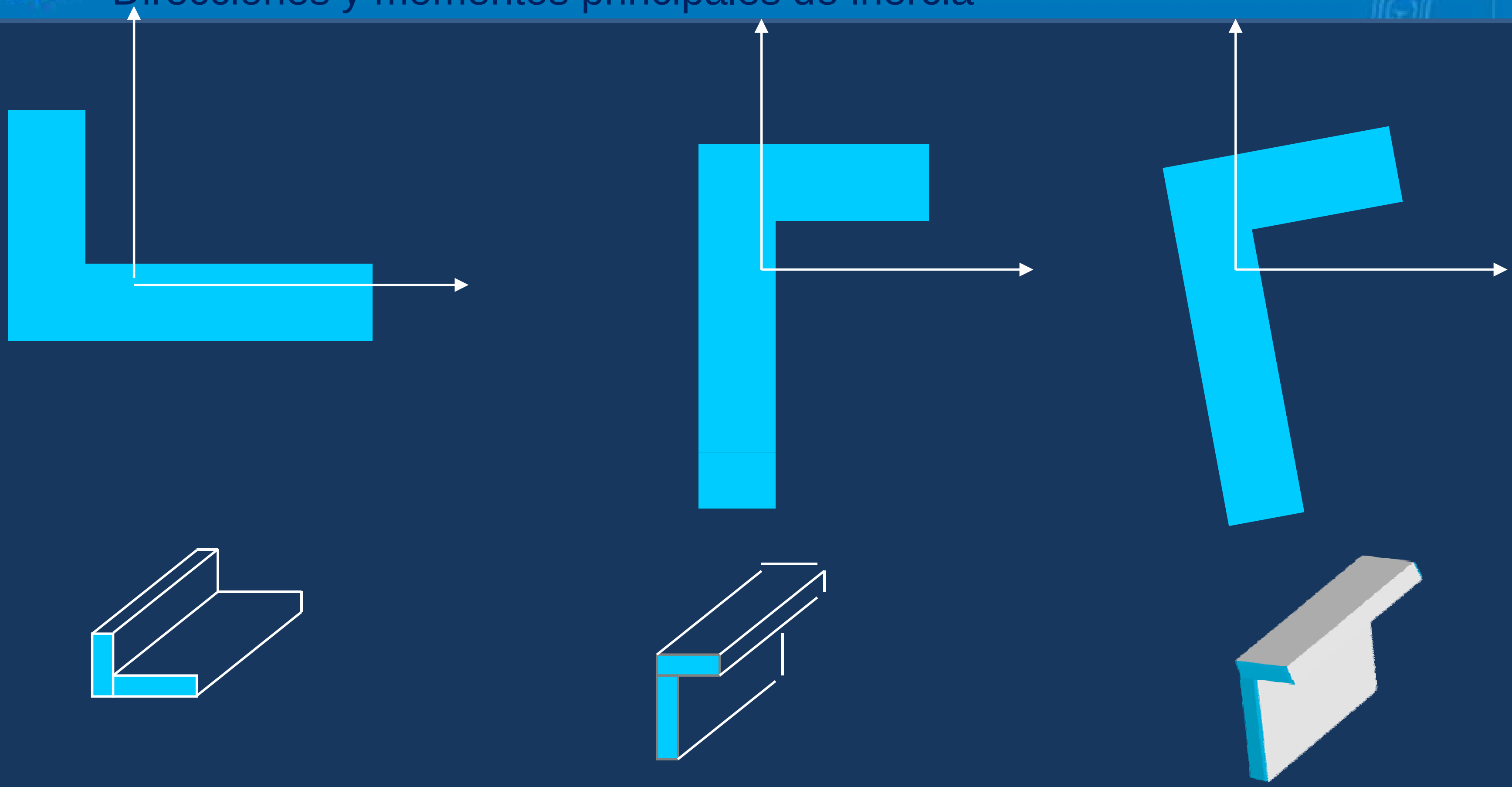
En el plano

$$\boxed{I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\cos^2\beta - 2P_{XY}\cos\alpha\cos\beta}$$



$$\boxed{I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\,\mathrm{sen}^2\alpha - P_{XY}\,\mathrm{sen}\,2\alpha}$$

Direcciones y momentos principales de inercia



De todas las posibles orientaciones hay algunas que proporcionan valores máximo y mínimo del momento de inercia

Método de los multiplicadores de Lagrange

Espacio tridimensional

Espacio bidimensional

Método del círculo de Mohr (gráfico).

Bidimensional

Método de los multiplicadores de Lagrange. Tridimensional

$$I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\cos^2\beta + I_{OZ}\cos^2\gamma -$$
$$-2P_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2P_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma - 2P_{YZ}\cos\beta\cos\gamma$$

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = 0 \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = 0$$

$$dI_R = \frac{\partial I_R}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial I_R}{\partial\beta}d\beta + \frac{\partial I_R}{\partial\gamma}d\gamma = 0$$ (1) Máximo o mínimo

$$df = \frac{\partial f}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial f}{\partial\beta}d\beta + \frac{\partial f}{\partial\gamma}d\gamma = 0$$ (2)

(1)-λ(2)=0 Método de los multiplicadores de Lagrange

$$\left(I_{OX}-\lambda\right)\cos\alpha - P_{XY}\cos\beta - P_{XZ}\cos\gamma = 0$$

$$-P_{XY}\cos\alpha + \left(I_{OY}-\lambda\right)\cos\beta - P_{YZ}\cos\gamma = 0$$

$$-P_{XZ}\cos\alpha - P_{YZ}\cos\beta + \left(I_{OZ}-\lambda\right)\cos\gamma = 0$$

$$\begin{vmatrix} I_{OX}-\lambda & -P_{XY} & -P_{XZ} \\ -P_{XY} & I_{OY}-\lambda & -P_{YZ} \\ -P_{XZ} & -P_{YZ} & I_{OZ}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

$$\left(I_{OX} - \lambda\right)\cos\alpha - P_{XY}\cos\beta - P_{XZ}\cos\gamma = 0$$

$$-P_{XY}\cos\alpha + \left(I_{OY} - \lambda\right)\cos\beta - P_{YZ}\cos\gamma = 0$$

$$-P_{XZ}\cos\alpha - P_{YZ}\cos\beta + \left(I_{OZ} - \lambda\right)\cos\gamma = 0$$

$$\lambda_1 \rightarrow \alpha_1, \beta_1, \lambda_1 \rightarrow recta \quad R_1$$

$$\lambda_2 \rightarrow \alpha_2, \beta_2, \lambda_2 \rightarrow recta \quad R_2$$

$$\lambda_3 \rightarrow \alpha_3, \beta_3, \lambda_3 \rightarrow recta \quad R_3$$

Método de los multiplicadores de Lagrange. Bidimensional

$$I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\cos^2\beta - 2P_{XY}\cos\alpha\cos\beta$$

$$f(\alpha,\beta) = 0 \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0$$

$$dI_R = \frac{\partial I_R}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial I_R}{\partial \beta} d\beta = 0$$

(1) Máximo o mínimo

$$df = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0$$

(2)

(1)-λ(2)=0 Método de los multiplicadores de Lagrange

$$\left(I_{OX}-\lambda\right)\cos\alpha-P_{XY}\cos\beta=0$$

$$-P_{XY}\cos\alpha+\left(I_{OY}-\lambda\right)\cos\beta=0$$

$$\begin{vmatrix} I_{OX}-\lambda & -P_{XY} \\ -P_{XY} & I_{OY}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2+\lambda(-I_{OX}-I_{OY})+\left(I_{OX}I_{OY}-P_{XY}^2\right)=0$$

$$\lambda^2 + \lambda(-I_{OX} - I_{OY}) + \left(I_{OX} I_{OY} - P_{XY}^2\right) = 0$$

$$\lambda = \frac{I_{OX} + I_{OY} \pm \sqrt{\left(I_{OX} + I_{OY}\right)^2 - 4\left(I_{OX} I_{OY} - P_{XY}^2\right)}}{2}$$

$$\left(I_{OX} - \lambda\right)\cos\alpha - P_{XY}\cos\beta = 0$$

$$-P_{XY}\cos\alpha + \left(I_{OY} - \lambda\right)\cos\beta = 0$$

$$\lambda_1 \rightarrow \alpha_1, \beta_1 \rightarrow recta \quad R_1$$

$$\lambda_2 \rightarrow \alpha_2, \beta_2 \rightarrow recta \quad R_2$$

$$\lambda = \frac{I_{OX} + I_{OY} \pm \sqrt{(I_{OX} + I_{OY})^2 - 4\left(I_{OX} I_{OY} - P_{XY}^2\right)}}{2} == \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{OX} + I_{OY})^2}{4} - \left(I_{OX} I_{OY} - P_{XY}^2\right)} =$$

$$= \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{OX} + I_{OY}}{2}\right)^2 - \left(I_{OX} I_{OY} - P_{XY}^2\right)} = \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\frac{I_{OX}^2 + I_{OX}^2 + 2 I_{OX} I_{OY} - 4 I_{OX} I_{OY} + 4 P_{XY}^2}{4}} =$$

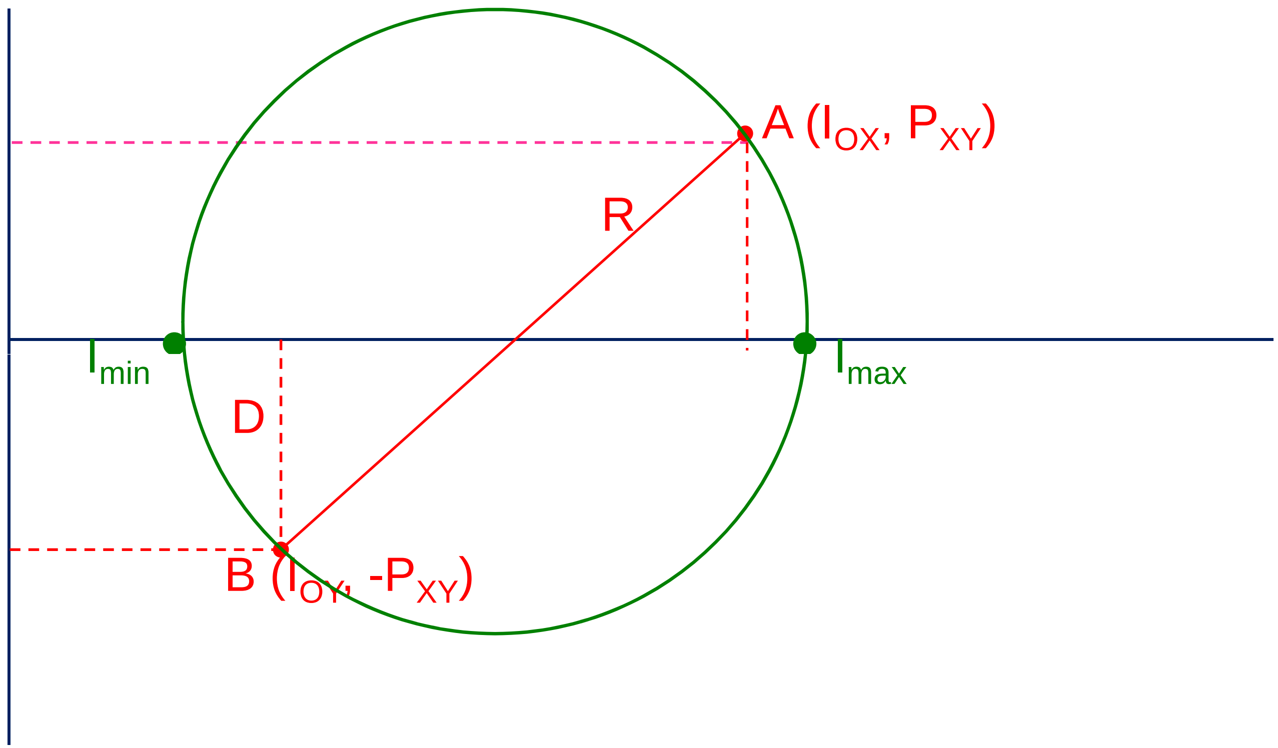
$$= \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\frac{I_{OX}^2 + I_{OX}^2 - 2 I_{OX} I_{OY}}{4} + P_{XY}^2} = \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2}\right)^2 + P_{XY}^2}$$

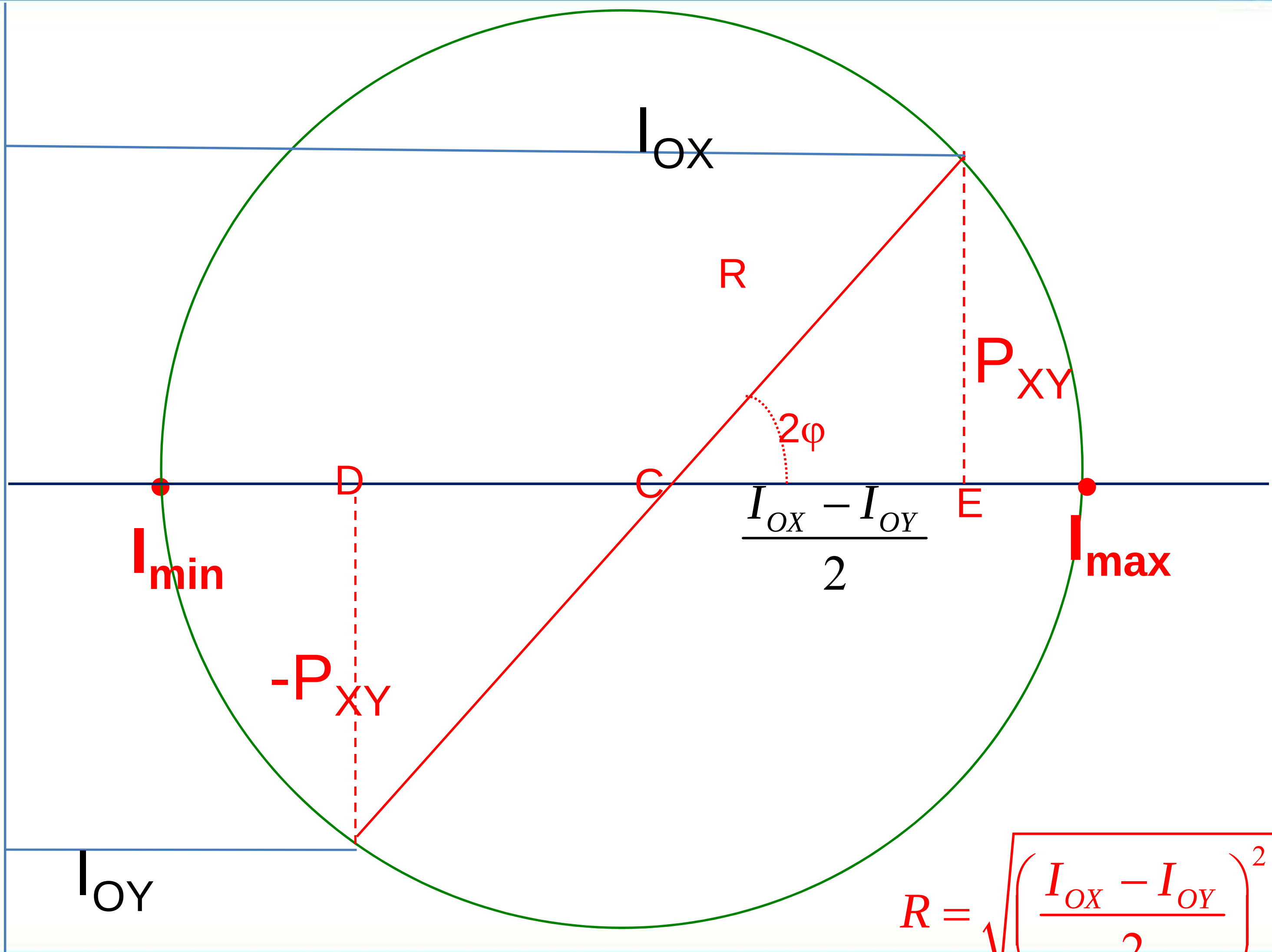
$$\lambda = \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2}\right)^2 + P_{XY}^2}$$

Círculo de Mohr

$I_{OX} > I_{OY}$

$P_{XY} > 0$





$$R = \sqrt{\left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2}\right)^2 + P_{XY}^2}$$

$$I_{\min} = I_{ox} - CE - R = I_{ox} - \left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right) - R = \left(\frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \right) - R$$

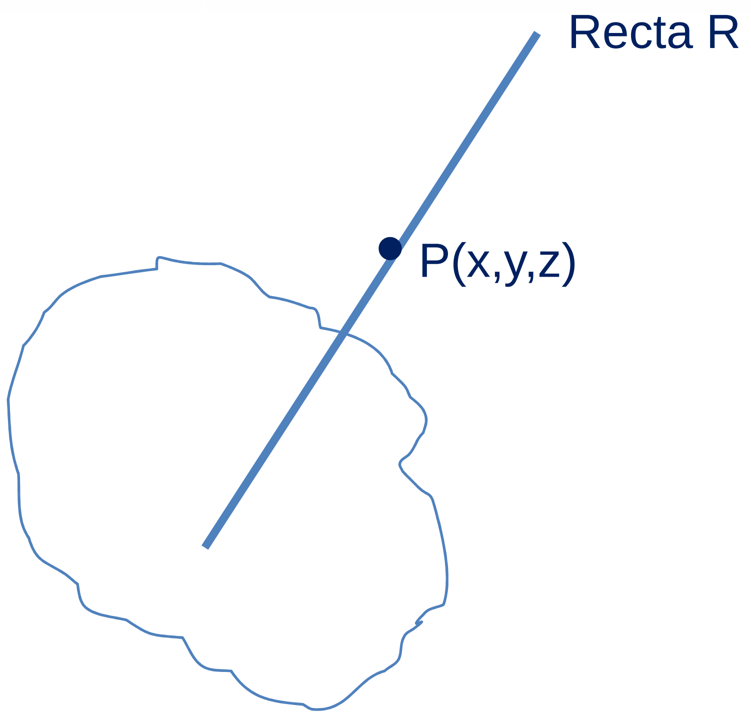
$$I_{\max} = I_{\min} + 2R = \left(\frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \right) - R + 2R = \left(\frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \right) + R$$

$$I_{\max,\min} = \left(\frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \right) \pm R = \frac{I_{OX} + I_{OY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{OX} - I_{OY}}{2} \right)^2 + P_{XY}^2} = \lambda$$

Cuádrica: Es una superficie en el espacio n-dimensional representada por una ecuación de segundo grado en sus variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + G = 1$$

Cuádrica de inercia



Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que cumplen que el módulo del vector que une el origen de coordenadas y un punto P de una recta R, es la inversa de la raíz cuadrada del momento de inercia respecto a dicha recta

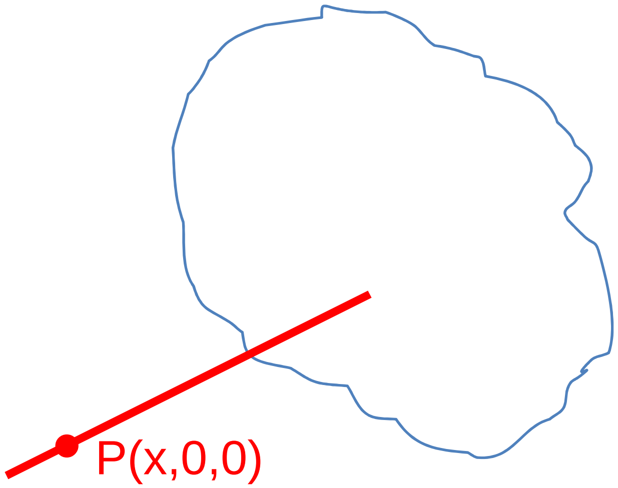
$$I_R = I_{OX}\cos^2\alpha + I_{OY}\cos^2\beta + I_{OZ}\cos^2\gamma -$$
$$-2P_{XY}\cos\alpha\cos\beta - 2P_{XZ}\cos\alpha\cos\gamma - 2P_{YZ}\cos\beta\cos\gamma$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left|\overrightarrow{OP}\right|(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k})$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = x\sqrt{I_R} \qquad \cos\beta = \frac{y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = y\sqrt{I_R} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = z\sqrt{I_R}$$

$$1 = I_{OX}x^2 + I_{OY}y^2 + I_{OZ}z^2 - 2P_{XY}xy - 2P_{XZ}xz - 2P_{YZ}yz$$

$$1 = I_{OX}\,x^2 + I_{OY}\,y^2 + I_{OZ}\,z^2 - 2P_{XY}\,xy - 2P_{XZ}\,xz - 2P_{YZ}\,yz$$



$$I_R = I_{OX}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = x\sqrt{I_{OX}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = y\sqrt{I_{OY}} = 0$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\left|\overrightarrow{OP}\right|} = z\sqrt{I_{OX}} = 0$$

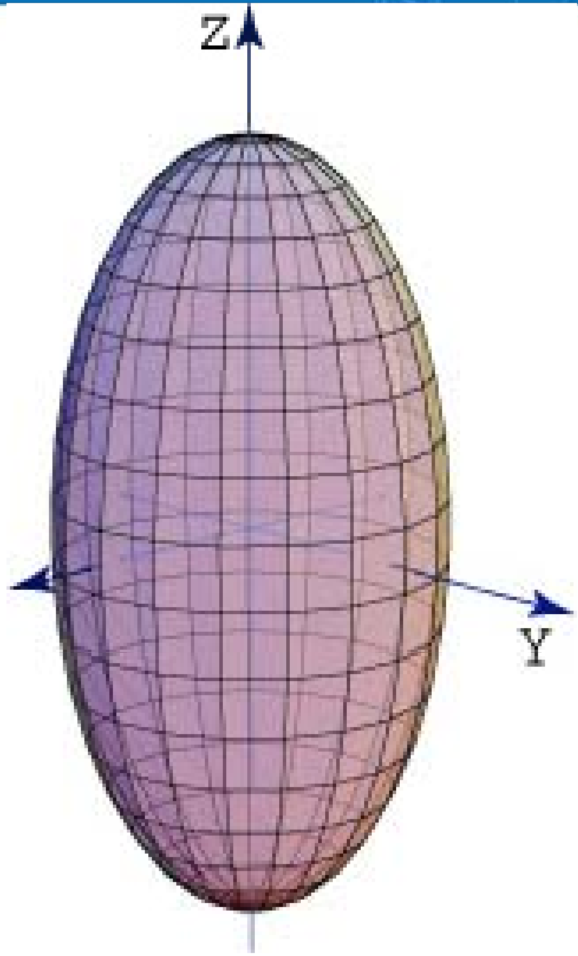
Si las direcciones son principales los productos de inercia son nulos

$$1 = I_{OX}\, x^2 + I_{OY}\, y^2 + I_{OZ}\, z^2$$

Ecuación de un elipsoide de semiejes a, b, c

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{OX}}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{I_{OY}}} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{I_{OZ}}}$$

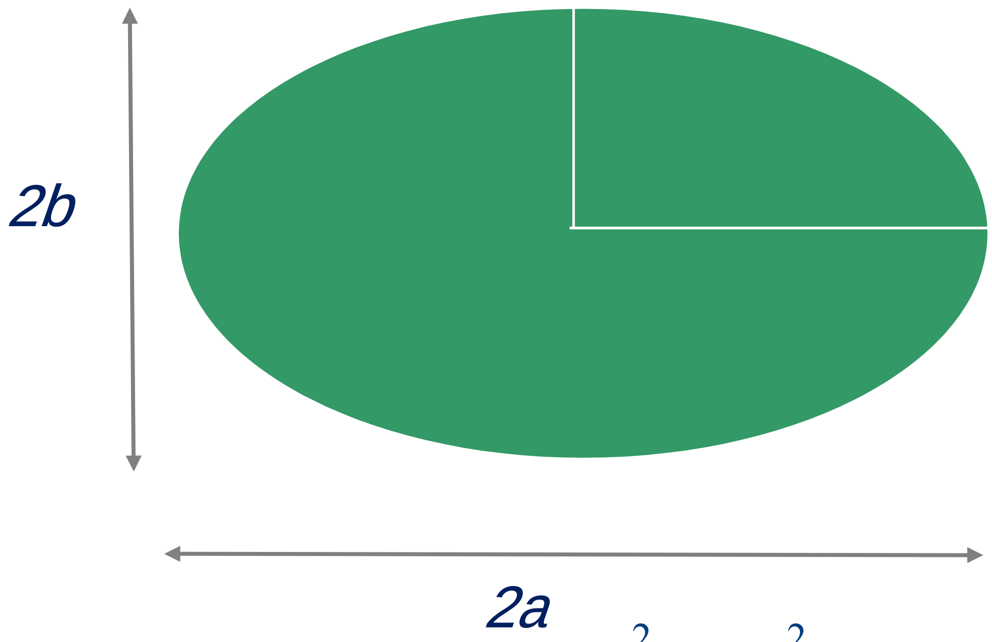


Elipsoide de inercia

En el plano, la ecuación corresponde a una elipse

Si las direcciones son principales los productos de inercia son nulos

$$1 = I_{OX} x^2 + I_{OY} y^2$$



Ecuación de una elipse de semiejes a, b

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{OX}}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{I_{OY}}}$$