UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos

Dpto. Física y Mecánica

Cálculo tensorial

Elvira Martínez Ramírez

Notación

Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos

Tipos de tensores

Direcciones principales de un tensor de segundo orden

Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos

Invariantes tensoriales

Momento tensorial respecto a una recta R

Tensor de inercia

Cuádrica de inercia

Notación

Un tensor es un ente matemático que generaliza los conceptos de escalar, vector y operador lineal de una manera que sea independiente de cualquier marco de referencia elegido. Los tensores son de importancia en física e ingeniería. Está constituido por N componentes, que son función de las coordenadas, y que se transforman por medio de ecuaciones de lineales y homogéneas

Convenio de Einstein

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

$$a_1b_jc_1 + a_2b_jc_2 + a_3b_jc_3 + ... + a_nb_jc_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_jc_i$$

en estas expresiones la suma se verifica respecto de dos subíndices repetidos de su término general.

"Cuando en una *expresión monomia figuren dos subíndices repetidos, se entenderá que se trata de una suma en la que los subíndices repetidos van sumados de 1 a n".*

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i = a_ib_i$$

Notación

T: Tensor de componentes T_{ij}

N: Número de componentes = n^m

n: Orden del tensor

m: espacio (uni, bi, tridimensional)

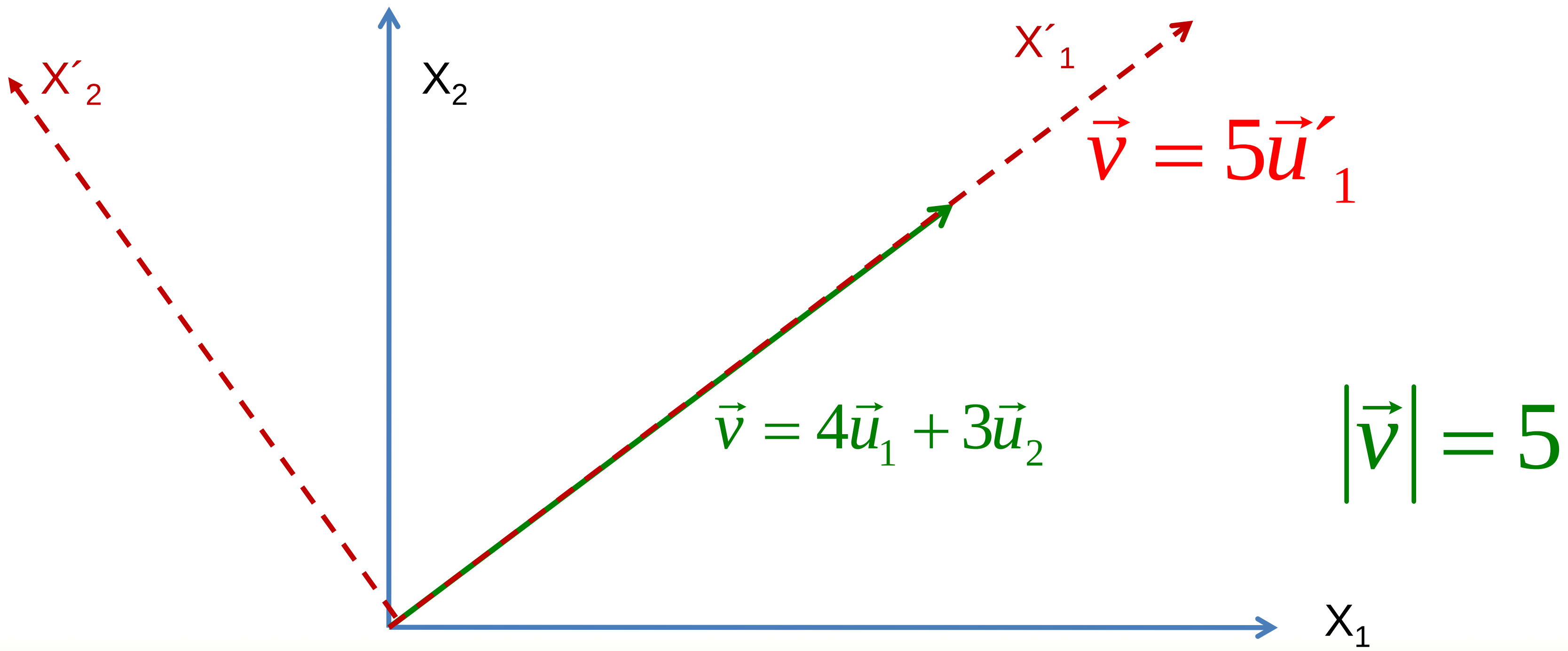
Notación

Número de componentes $N = m^n$

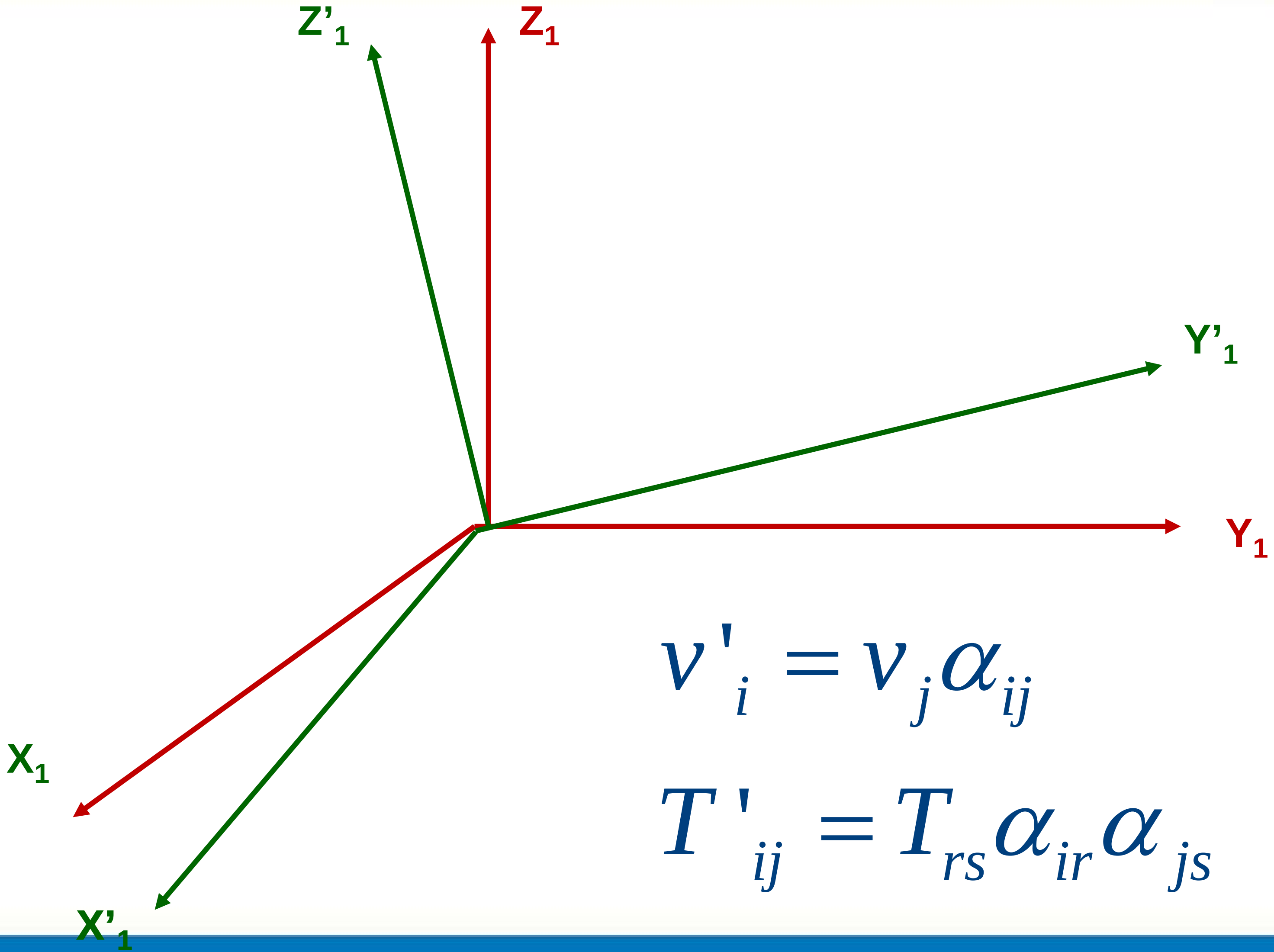
Espacio	m=0 (escalar)	m=1 (vector)	m=2 (diádica)
n=1	$1^0=1$	$1^1=1$ (v_x)	$1^2=1$
n=2	$2^0=1$	$2^1=2$ (v_x,v_y)	$2^2=4$ $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$
n=3	$3^0=1$	$3^1=3$ $v_x,v_y,v_z)$	$3^2=9$ $\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$

Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos

El tensor es independiente del sistema de referencia que se utilice, lo único que cambia al pasar de un sistema de referencia a otro son sus componentes pero no la magnitud física.



Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos



$$v'_i = v_j \alpha_{ij}$$

$$T'_{ij} = T_{rs} \alpha_{ir} \alpha_{js}$$

Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos

Para un vector y un tensor, en el espacio n dimensional las componentes en los nuevos ejes son

$$w_i = v_j \alpha_{ij} \qquad\qquad T'_{ij} = T_{rs} \alpha_{ir} \alpha_{js}$$

en donde α_{ij} representan los cosenos de los ángulos que forman los ejes nuevos con los antiguos.

Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos

Ejes $X_1X_2X_3$ → Ejes $X'_1X'_2X'_3$

$$v_1 \quad w_1$$

$$v_2 \rightarrow w_2$$

$$v_3 \quad w_3$$

$$v_j \quad w_i$$

Transformaciones de coordenadas. Giros de ejes cartesianos

Ejes $X_1X_2X_3$

Ejes $X'_1X'_2X'_3$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix}$$

$$T_{rs}$$

$$T'_{ij}$$

Las componentes de un vector son

$$v'_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \alpha_{13} v_3$$

$$v'_2 = \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \alpha_{23} v_3$$

$$v'_3 = \alpha_{31} v_1 + \alpha_{32} v_2 + \alpha_{33} v_3$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Para un tensor de segundo orden, cada nuevo término se calcula mediante la expresión

$$T'_{ij} = \alpha_{ir} \alpha_{js} T_{rs}$$

$$T'_{11} = T_{11}\alpha_{11}\alpha_{11} + T_{12}\alpha_{11}\alpha_{12} + T_{13}\alpha_{11}\alpha_{13} + T_{21}\alpha_{12}\alpha_{11} + T_{22}\alpha_{12}\alpha_{12} + T_{23}\alpha_{12}\alpha_{13} + T_{31}\alpha_{13}\alpha_{11} + T_{32}\alpha_{13}\alpha_{12} + T_{33}\alpha_{13}\alpha_{13}$$

Tipos de tensores

Dado el tensor

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Tensor transpuesto: se obtiene intercambiando filas y columnas

$$\overline{T}_{ij} = T_{ji} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Tipos de tensores

Dado el tensor
$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Tensor adjunto: sus componentes son los adjuntos respectivos en el determinante del tensor, siendo estos

$$T_{ij}^{adj} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \quad , A_{12} = \begin{vmatrix} T_{23} & T_{21} \\ T_{33} & T_{31} \end{vmatrix}$$

Tipos de tensores

Dado el tensor
$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Tensor inverso T^{-1}: es el que actuando como operador, realiza la transformación inversa a la que realiza T

Si el tensor T permite transformar el vector v_i en el vector ω_j $\omega_j = T_{ij}\, v_i$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

El tensor T^{-1} permite transformar el vector ω_j en el vector v_i

Tipos de tensores

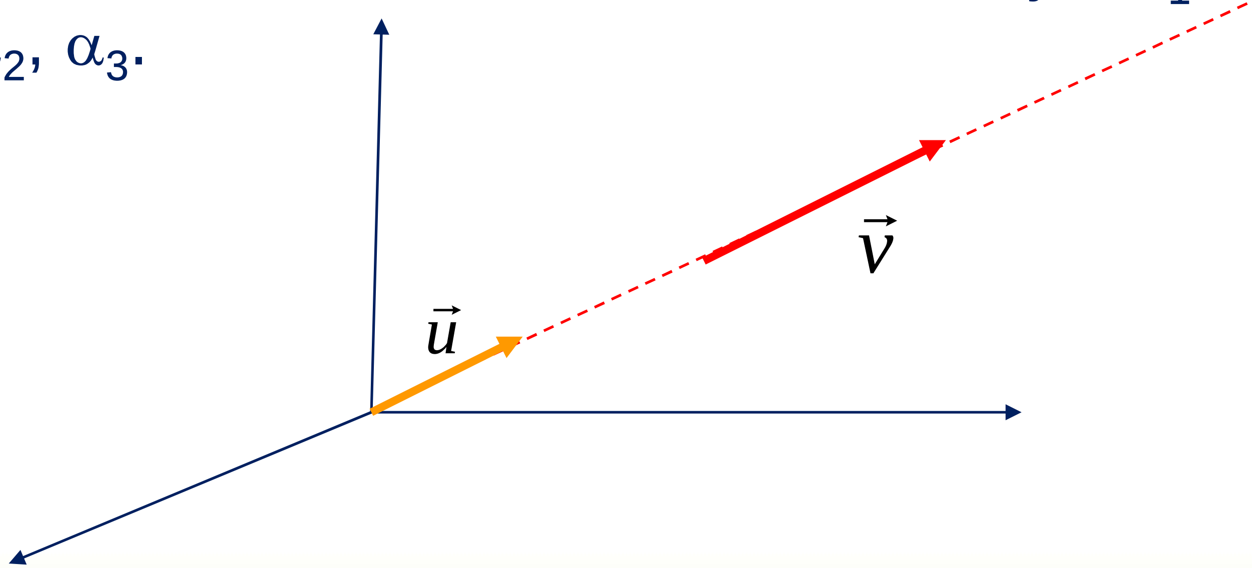
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1 & T_{12} & T_{13} \\ \omega_2 & T_{22} & T_{23} \\ \omega_3 & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\omega_1 A_{11} + \omega_2 A_{21} + \omega_3 A_{31}}{|T|}$$

$$v_i = \frac{A_{ji}\omega_j}{|T|} \qquad T_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|T_{ij}|}$$

Direcciones principales de un tensor de segundo orden

Cuando se aplica el tensor T a un vector v , se obtiene mediante la ecuación de transformación las componentes del vector en los nueves ejes ω:

La recta que contiene al vector v, forma con los ejes X_1, X_2, X_3, ángulos α_1, α_2, α_3.



Direcciones principales de un tensor de segundo orden

Las direcciones principales de un vector son las direcciones tales que al aplicar el tensor, las nuevas componentes son proporcionales a las primeras (el vector nuevo y el antiguo son paralelos) $\omega=\lambda v \quad =Tv \qquad (T-\lambda)v=0$

Da igual trabajar con el vector que que con su unitario $\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2+u_e\vec{e}_3$

$$\begin{pmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=0$$

Direcciones principales de un tensor de segundo orden

$$(T_{11}-\lambda)u_1+T_{12}u_2+T_{13}u_3=0$$

$$T_{21}u_1+(T_{22}-\lambda)u_2+T_{23}u_3=0$$

$$T_{31}u_1+T_{32}u_2+(T_{33}-\lambda)u_3=0$$

Para que el sistema sea compatible, ,se tiene que anular el determinante de los coeficientes de la matriz

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Direcciones principales de un tensor de segundo orden

Se obtiene una ecuación de tercer grado en λ

$$\lambda^3 - L\lambda^2 + K\lambda - \Delta = 0$$

es la ecuación característica o ecuación secular cuyas raíces λ_1, λ_2, λ_3 son los valores propios del tensor.

* Cada valor propio corresponde a una dirección principal.

* Si el sistema tiene tres soluciones reales, tiene tres direcciones principales, y si tiene una solución real tiene una dirección principal.

Invariantes tensoriales

Los valores de L, K y Δ son los invariantes (traza, invariante cuadrático e invariante cúbico respectivamente)

$$L = T_{11} + T_{22} + T_{33} = traza$$

$$k = T_{11}T_{22} + T_{11}T_{33} + T_{22}T_{33} - (T_{12}T_{21} + T_{13}T_{31} + T_{23}T_{32}) = I.Cuadratico$$

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

Momento tensorial respecto a una recta R

Dado un tensor, el momento tensorial respecto a una recta o ejes es la primera componente del tensor que se obtiene al tomar dicha recta como eje X_1

$$T_R = T'_{11} = T_{11}\alpha_{11}\alpha_{11} + T_{12}\alpha_{11}\alpha_{12} + T_{13}\alpha_{11}\alpha_{13} + T_{21}\alpha_{12}\alpha_{11} + T_{22}\alpha_{12}\alpha_{12} +$$

$$+ T_{23}\alpha_{12}\alpha_{13} + T_{31}\alpha_{13}\alpha_{11} + T_{32}\alpha_{13}\alpha_{12} + T_{33}\alpha_{13}\alpha_{13}$$

Momento tensorial respecto a una recta R

Dada una recta r, que pasa por el origen de coordenadas y cambiando las coordenadas de forma que la recta r sea el nuevo eje X'_1 la componente T'_{11} es por definición el momento tensorial respecto a r

Aplicando la ecuación de transformación de coordenadas se obtiene

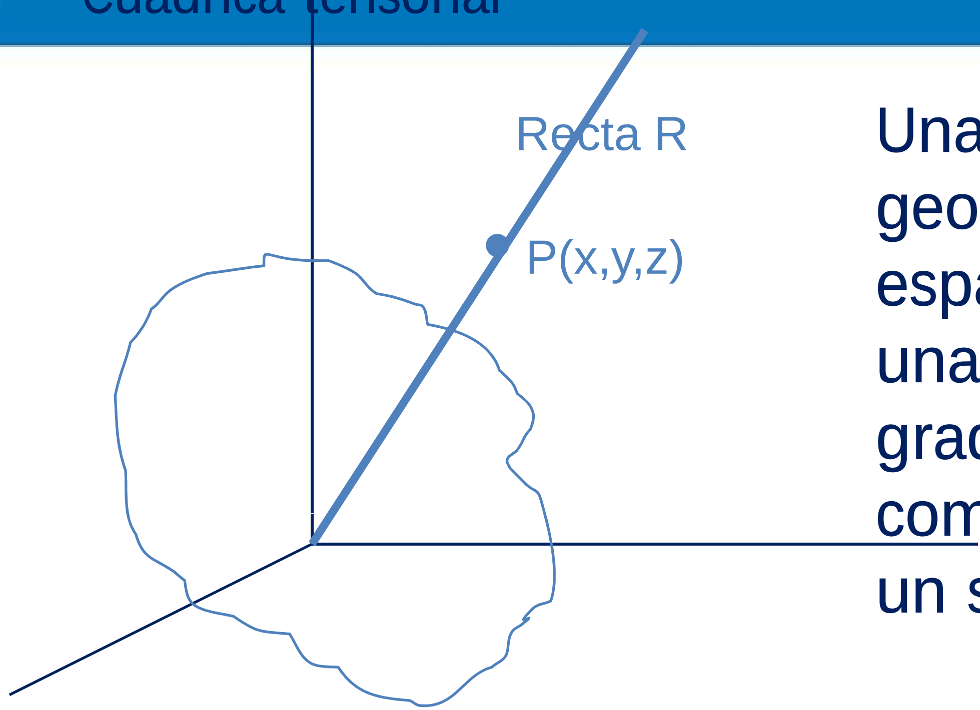
$$T_r = T'_{11} = \alpha_{1i}\alpha_{1j}T_{ij}$$

Tensor de inercia

El tensor de inercia es un tensor de segundo orden, simétrico, cuyos elementos de la diagonal principal son los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados, y los elementos no diagonales son los productos de inercia cambiados de signo

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & -P_{12} & -P_{13} \\ -P_{12} & I_{22} & -P_{23} \\ -P_{13} & -P_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Cuádrica tensorial



Una cuádrica es el lugar geométrico de los puntos del espacio (*x,y,z*) que verifican una ecuación de segundo grado, de forma parecida a como un vector representa un segmento orientado.

La cuádrica tensorial es el lugar geométrico de los puntos del espacio que cumplen que el módulo del vector que une el origen de coordenadas y un punto P de una recta R, es la inversa de la raíz cuadrada del momento tensorial respecto a dicha recta

Cuádrica tensorial

Igual que un vector está representado por un segmento orientado, un tensor simétrico está representado por una cuádrica.

Una cuádrica asociada a un tensor simétrico es la que usando como ejes coordenados los ejes propios tiene por ecuación

$$A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 = 1$$

siendo A,B,C los valores propios.

Cuádrica tensorial

Para unos ejes cualquiera X1, X2, X3 la ecuación de la cuádrica será

$$T_{ij}\, x_i\, x_j = 1$$

$$T_{11} x_1^2 + T_{22} x_2^2 + T_{33} x_3^2 + 2T_{12} x_1 x_2 + 2T_{13} x_1 x_3 + 2T_{23} x_2 x_3 = 1$$