UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Mecánica analítica

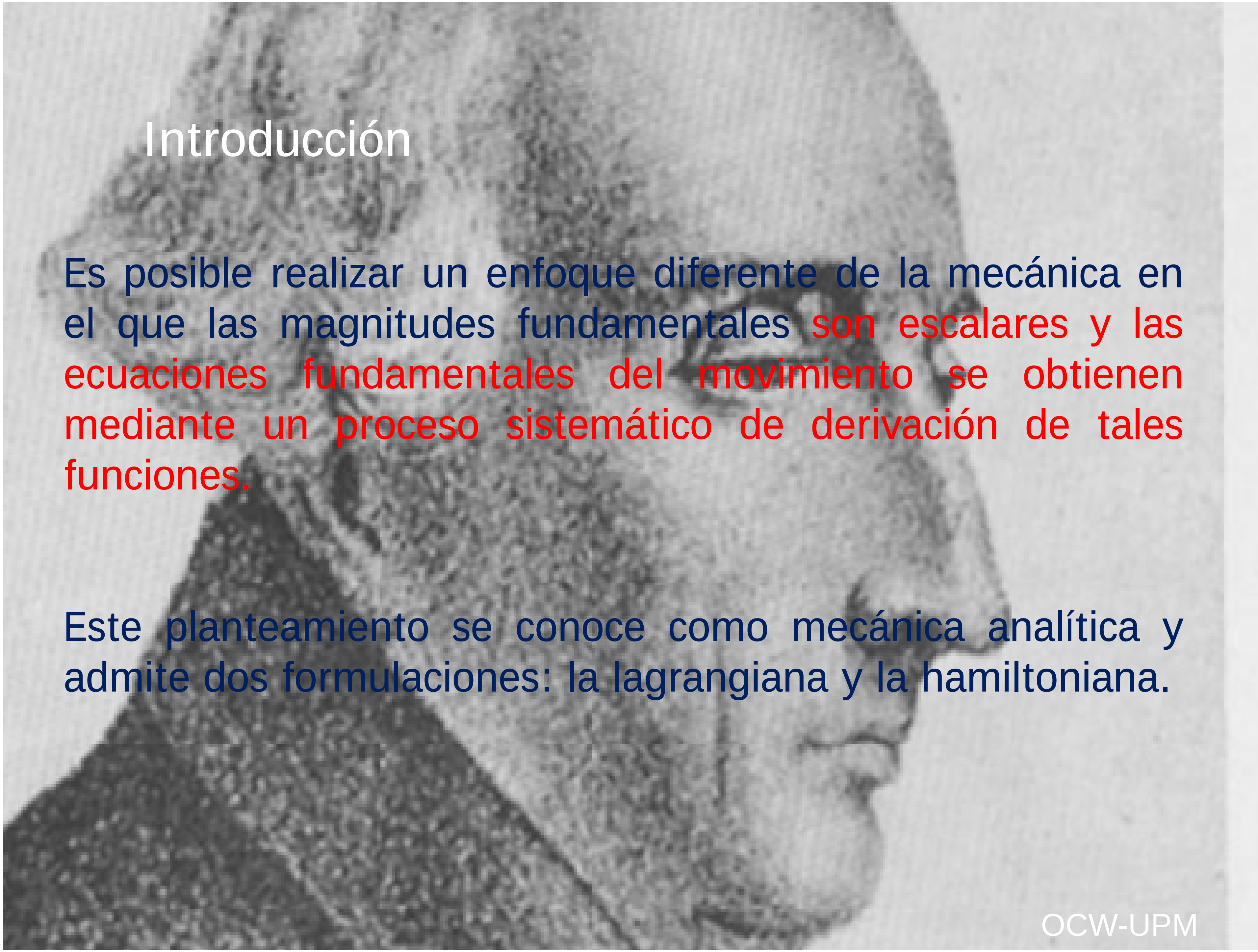
- Introducción
- Notación
- Desplazamiento y fuerza virtual
- Fuerza de ligadura
- Trabajo virtual
- Energía cinética. Ecuaciones de Lagrange
- Principio de los trabajos virtuales
- Principio de D´Alembert
- Ecuaciones generales de Lagrange
- Momento generalizado
- Integrales primeras. Coordenadas cíclicas

- Coordenadas generalizadas
- Espacio de configuración
- Velocidades generalizadas
- Ligaduras o enlaces
- Clasificación de los sistemas
- Grados de libertad

Introducción

En la formulación newtoniana de la mecánica, dado un sistema, las ecuaciones que describen su movimiento se obtienen a partir de la segunda ecuación de Newton, que es una ecuación vectorial.

Para ello se escogen coordenadas y se expresan las velocidades y aceleraciones (magnitudes vectoriales) de todas las partículas integrantes del sistema en función de las coordenadas elegidas y sus derivadas primeras y segundas respecto al tiempo.



Introducción

Es posible realizar un enfoque diferente de la mecánica en el que las magnitudes fundamentales son escalares y las ecuaciones fundamentales del movimiento se obtienen mediante un proceso sistemático de derivación de tales funciones.

Este planteamiento se conoce como mecánica analítica y admite dos formulaciones: la lagrangiana y la hamiltoniana.

Notación. Coordenadas generalizadas. Espacio de configuración

Cada una de las N partículas de un sistema tiene, en un sistema de referencia 3D, 3 coordenadas (x,y,z)

Por lo que tenemos 3N coordenadas independientes que se denotan por q_j $j=1,\ldots..3N$

x_1, y_1, z_1,.....x_N, y_N, z_N son las variables independientes q_j también denominadas **coordenadas generalizadas**, que sirven para determinar en forma completa el estado de un sistema formado por las i partículas.

Notación. Coordenadas generalizadas. Espacio de configuración

Un sistema de coordenadas generalizadas es cualquier conjunto de variables que permiten definir sin ambigüedad la posición del sistema dinámico en consideración

N partículas $i=1,........N$

Variables independientes, en ausencia de ligaduras, $j=1,....3N$

Tales coordenadas pueden ser cartesianas, cilíndricas o de cualquier otro sistema de coordenadas

Notación. Velocidad generalizada

El espacio que determinan se denomina **espacio de configuración** q_j.

Al evolucionar el sistema en el tiempo, las coordenadas generalizadas cambian con el tiempo y podemos definir las ***velocidades generalizadas*** $\dot{q}_j$.

Notación. Ligaduras o enlaces

Una **ligadura** de un sistema representa una limitación al movimiento del mismo.

Cuando la ligadura establece una relación entre las coordenadas del sistema velocidad y tiempo, de la forma se denomina **ligadura cinemática**.

Notación. Ligaduras o enlaces

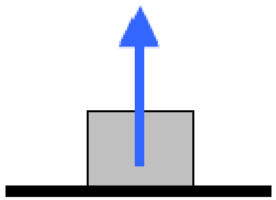
Cuando la ligadura es independiente de las velocidades se denomina **ligadura geométrica o finita**.

Siempre es posible pasar de una ligadura geométrica a una cinemática por simple derivación. Sin embargo no siempre es posible pasar de una ligadura cinemática a una geométrica por integración de la ligadura cinemática ya que ésta no siempre es integrable.

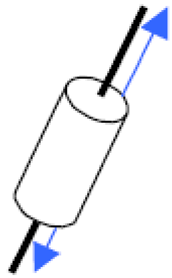
Si en la ligadura, geométrica o cinemática, no aparece explícitamente el tiempo se dice que es **estacionaria**.

Notación. Tipos de ligaduras

Tipos de ligaduras o enlaces. Los enlaces pueden ser unilaterales o bilaterales



Unilaterales: cuando el punto puede abandona la superficie por alguna de sus partes.
Si lo abandona por arriba y si lo abandona por abajo



Bilaterales: cuando el punto no puede abandonar la superficie por ninguna de sus partes.

Notación. Clasificación de los sistemas

Se denominan sistemas **holónomos**, aquellos que tienen todas sus ligaduras geométricas, no dependen de la velocidad

No dependen de la velocidad (geométrica)
Si depende de la velocidad (cinemática) pero es integrable
No depende del tiempo (estacionaria)

No holónomo Depende de la velocidad (cinemática) y no es integrable

Notación. Grados de libertad

Si el sistema tiene ligaduras, no es libre, el número de grados de libertad viene definido por la diferencia entre el número total de dimensiones (3N) y el número de ligaduras (k)

$$\mathbf{n=3N-k}$$

Notación. Grados de libertad

Se puede elegir un sistema de n coordenadas independientes, designado como

$$q \equiv q_1,\ q_2,\ q_3, \dots\dots\dots q_n$$

que especifican perfectamente la configuración del sistema y que se denominan **coordenadas generalizadas propias** y el espacio n dimensional correspondiente se denomina **espacio de configuración propio**.

Velocidad en coordenadas generalizadas y cartesianas

La posición de una partícula depende de sus coordenadas y t

La velocidad, en coordenadas generalizadas (para la partícula 1)

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \ldots, + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots, + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t}$$

Y en cartesianas

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t}$$

Velocidad en coordenadas generalizadas y cartesianas

La velocidad se expresa por

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \ldots, + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots, + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial \overleftarrow{v}_j}{\partial q_i}$$

Desplazamiento virtual

El **desplazamiento virtual se expresa por** $\delta\vec{r}$, es un operador diferencial por lo que actúa de forma similar a $d\vec{r}$ y se caracteriza por ser un desplazamiento infinitesimal de la posición de una partícula, realizado instantáneamente

Este desplazamiento aparte de instantáneo es arbitrario, no relacionado con el movimiento real de la partícula en el instante considerado.

Es hipotético e imaginario, y compatible con las ligaduras

Desplazamiento virtual

Los desplazamientos virtuales más útiles son los que respetan los vínculos, y por tanto no violan las condiciones de ligadura del sistema y se denominan desplazamiento compatibles con los vínculos.

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\delta q_n$$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Fuerzas de vínculo

La introducción de ligaduras en un sistema mecánico lleva al concepto de fuerza de vínculo que es la que se ejerce sobre la partícula para forzar al cumplimiento de la ligadura.

Esta fuerza de vínculo se diferencia de la fuerza aplicada, que es aquella determinada independientemente de cualquier otra fuerza, dando sólo las posiciones de las partículas.

Fuerzas de vínculo

Las fuerzas de vínculo se caracterizan porque pueden ser tan grandes en magnitud como sean necesarias para imponer la ligadura, lo cual es una idealización de los vínculos reales.

Las fuerzas que actúan sobre una partícula del sistema es

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,a} + \vec{F}_i^{\,l}$$

Si el sistema está en equilibrio la fuerza de ligadura se anula

Energía cinética. Ecuaciones de Lagrange

La energía cinética de un sistema de partículas se puede expresar en función las coordenadas y velocidades generalizadas.

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right]^2$$

Energía cinética. Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial v_i}\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i 2v_i\right)\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)+m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\mathrm{m_i}\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}+\mathrm{m_i}\vec{v}_i\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{m_i}\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}+\sum_{i=1}^{N}\mathrm{m_i}\vec{v}_i\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{m_i}\frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}+\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i}^{N}\frac{1}{2}\mathrm{m_i}v_i^2\right)$$

Energía cinética. Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Trabajo virtual

El Trabajo virtual de una fuerza es el trabajo que realiza esta fuerza durante un desplazamiento virtual .

$$dW = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$dW = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i=1}^{N} Q_j \cdot \delta q_j$$

Trabajo virtual

$$dW = \sum_{i=1}^{N} Q_j \cdot \delta q_j$$

Al término

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

se denomina fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_j por jugar un papel equivalente en la expresión del trabajo virtual análogo al que juega la fuerza cuando se expresa en el espacio tridimensional.

Principio de los trabajos virtuales

El Principio de los trabajos virtuales postula que, en un sistema en equilibrio, la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas de vínculo de un sistema es nula para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales, compatibles con los vínculos, de las partículas del sistema

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,l} \delta \vec{r}_i = 0$$

Principio de los trabajos virtuales

Si el sistema está en equilibrio, la fuerza actuante sobre cada partícula ha de ser cero

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,a} + \vec{F}_i^{\,l} = \vec{0}$$

En un desplazamiento virtual

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\,a} + \vec{F}_i^{\,l} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Y como por hipótesis $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,l} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,a} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Principio de los trabajos virtuales de D´Alambert

D´Alembert generalizó el Principio de los trabajos virtuales a sistemas en movimiento fuera de las condiciones de equilibrio.

La fuerza de inercia que actúa sobre una partícula es la suma de la fuerza aplicada y la fuerza de ligadura; esta fuerza, por otro lado es igual a la variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo, por lo que

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,a} + \vec{F}_i^{\,l} = m_i \vec{a}_i = \dot{\vec{p}}_i$$

Principio de los trabajos virtuales de D´Alambert

Suponiendo un desplazamiento virtual se tiene

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,a}+\vec{F}_i^{\,l}-\dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

Y como

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,l}\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

Se tiene

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,a}-\dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{\,a}-m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

Fuerzas conservativas

Cuando las partículas del sistema están sometidas exclusivamente a fuerzas conservativas, es decir a fuerzas que derivan de un potencial U_j, se tiene

$$\vec{F}_i^{ac} = -\vec{\nabla} U_i \qquad\qquad U = \sum_{i=1}^{N} U_i$$

La fuerza generalizada, se expresa por

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{a} c \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\vec{\nabla} U_i\right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Fuerzas conservativas

Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange anteriores se tiene

$$Q_j^c = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0$$

Denominando L=T-V

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Fuerzas conservativas y no conservativas

Cuando el sistema está sometido a fuerzas tanto conservativas como no conservativas, se tiene para la fuerza generalizada

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i^{\,a-c} + \vec{F}_i^{\,a-nc}) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \left(-\vec{\nabla} U_i \right) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,a-nc} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U_i}{\partial q_j} + Q^{nc}{}_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + Q^{nc}{}_j$$

Fuerzas conservativas y no conservativas

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} + Q^{nc}{}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q^{nc}{}_j$$

Momento generalizado

Se define el momento generalizado conjugado de la coordenadas q_j a

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Como q_j puede ser una coordenada lineal o angular, el momento generalizado tiene dimensiones de momento lineal o momento angular respectivamente.

Coordenadas cíclicas

Partiendo de las ecuaciones de Lagrange expresadas de la forma

$$\dot{p}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Si la función lagrangiana L no depende explícitamente de la coordenada q_j, o expresado de otra forma, si

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

el momento generalizado correspondiente se conserva $p_j = cte$

Coordenadas cíclicas

Si el momento generalizado correspondiente se conserva

$$p_j = cte$$

La coordenada q_j es una coordenada cíclica o ignorable.

Las expresiones $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ son integrales primeras del movimiento