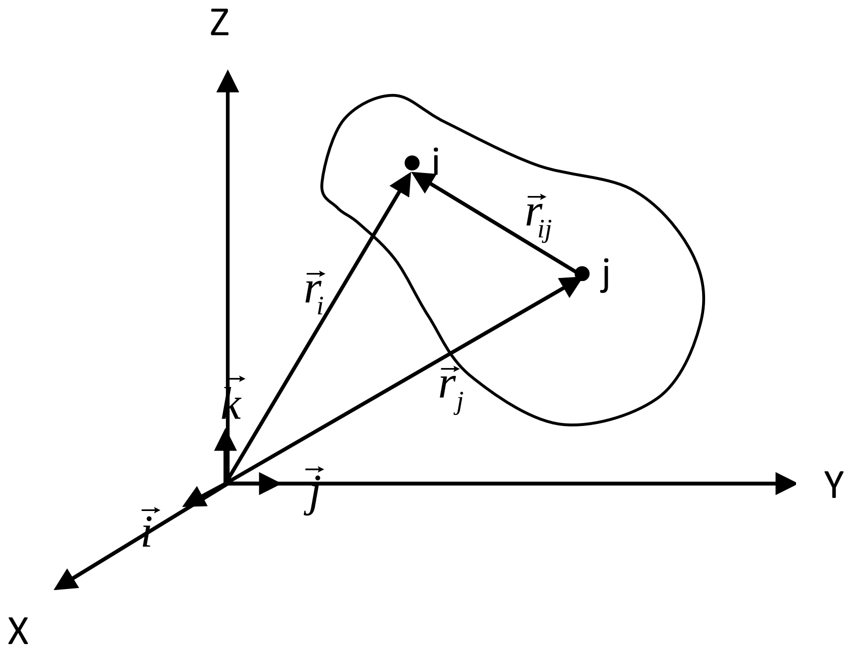
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Cinemática del sólido rígido I

- Sólido rígido. Condición de rigidez
- Notación
- Teorema de la proyección de las velocidades
- Movimientos del sólido rígido
  - Traslación
  - Rotación
  - Movimiento helicoidal
  - Varias traslaciones
  - Varias rotaciones
  - Dos rotaciones
  - Traslaciones y rotaciones
- Invariantes cinemáticos
- Clasificación del movimiento
- Reducción en un punto del movimiento del sólido
- Eje instantáneo de rotación y deslizamiento

Sólido rígido

Un sólido rígido es cualquier sistema de puntos materiales en el que la distancia que une dos puntos cualesquiera del mismo permanece invariable en el transcurso del tiempo



$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = C$$

$$\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)^2 = C$$

Sólido rígido. Condición de rigidez

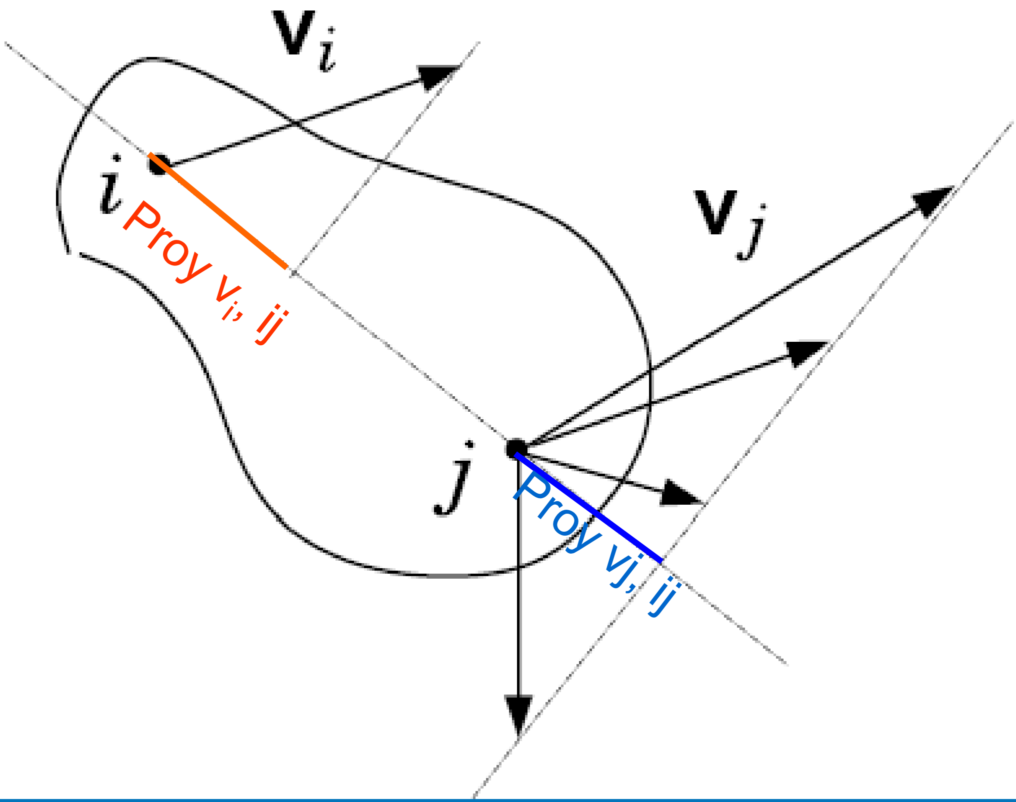
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)^2 = 2\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_j}{dt}\right) = 0$$

$$2\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = 0$$

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} = 0$$

Teorema de la proyección de las velocidades

Dados dos puntos i, j de un sistema indeformable, la proyección de los vectores velocidad de dichos puntos sobre la recta que los une, permanece constante



Proy v_i, ij = Proy vj, ij

Movimientos del sólido rígido

Traslación

Rotación

Helicoidal

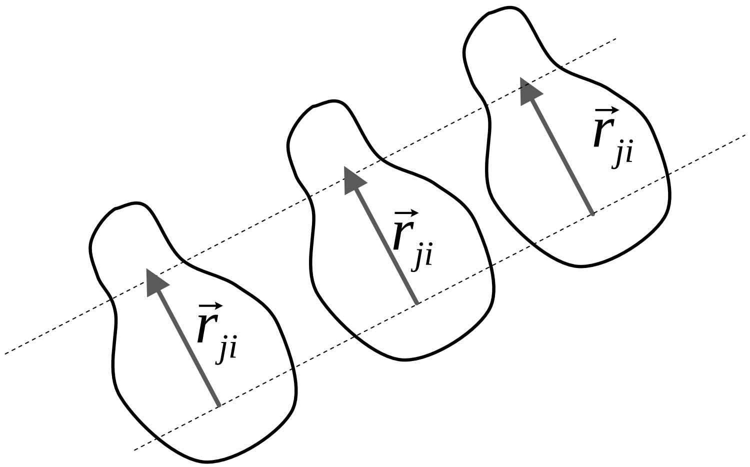
m Traslaciones

n Rotaciones

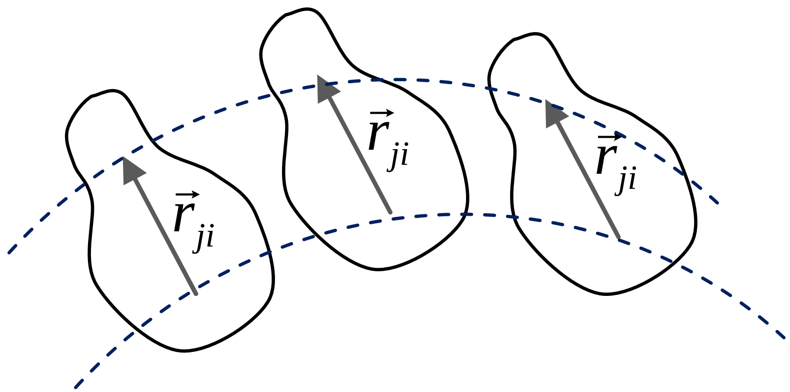
m Traslaciones + n Rotaciones

Movimientos del sólido rígido: Traslación

Un sólido rígido realiza un movimiento de traslación, cuando el segmento que une dos puntos cualesquiera del sólido permanece durante el movimiento paralelo a si mismo



Trayectoria rectilínea



Trayectoria curvilínea

Movimientos del sólido rígido: Traslación

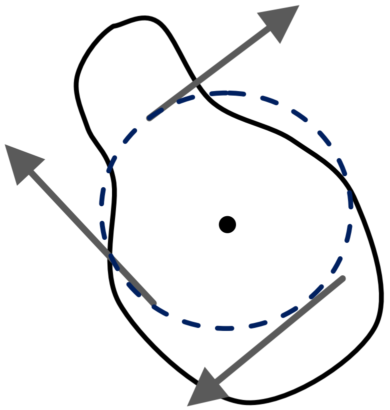
Durante el movimiento de traslación, todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad, y en consecuencia la misma aceleración

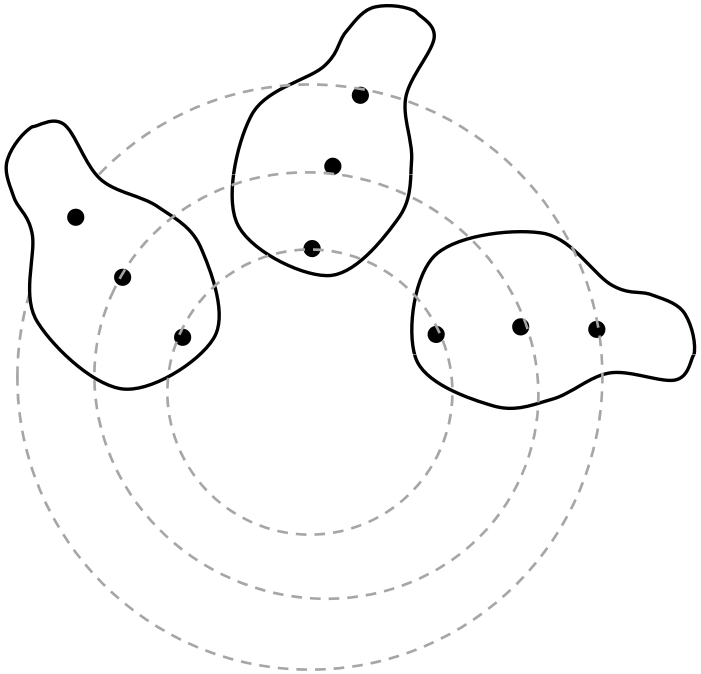
$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = C \Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j = \vec{v}_t$$

Movimientos del sólido rígido: Rotación

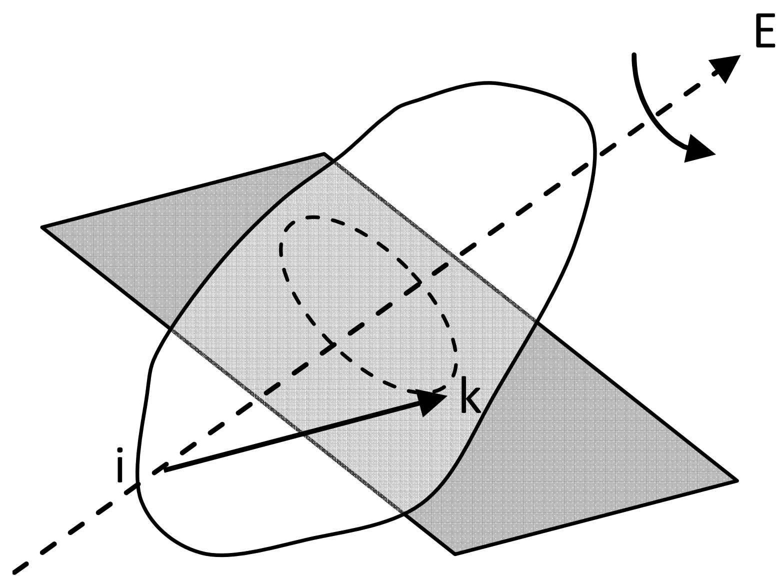
Un sólido rígido realiza una rotación en torno a un eje cuando todos sus puntos describen trayectorias circulares centradas en dicho eje y contenidas en planos perpendiculares a éste





El eje de rotación puede atravesar al sólido o ser exterior a él

Durante el movimiento de rotación, todos los puntos rotan con la misma velocidad angular ω, y todos los puntos describen trayectorias en planos perpendiculares al eje de rotación

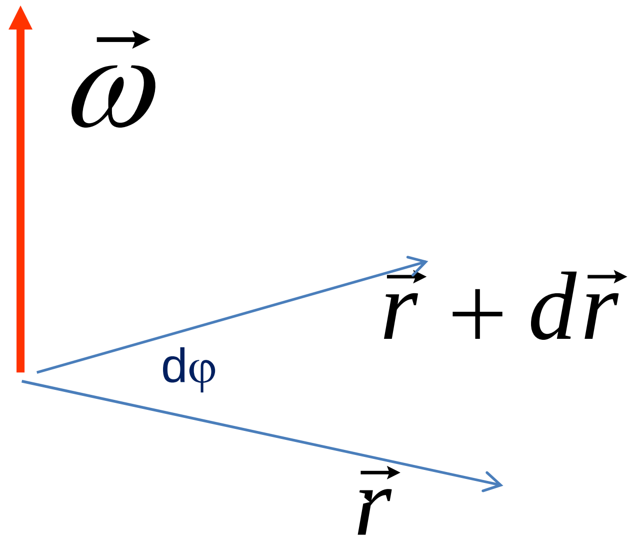


Movimientos del sólido rígido: rotación

Un movimiento de rotación queda determinado completamente por el vector velocidad angular

Basta con conocer el vector ω y su recta de aplicación para determinar completamente el movimiento de todos los puntos del sólido rígido en una rotación

Movimientos del sólido rígido: vector velocidad angular



Es un vector deslizante cuya línea de acción es el eje de rotación, caracterizado por su módulo $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, dirección (la del eje de rotación) y sentido (regla del sacacorchos)

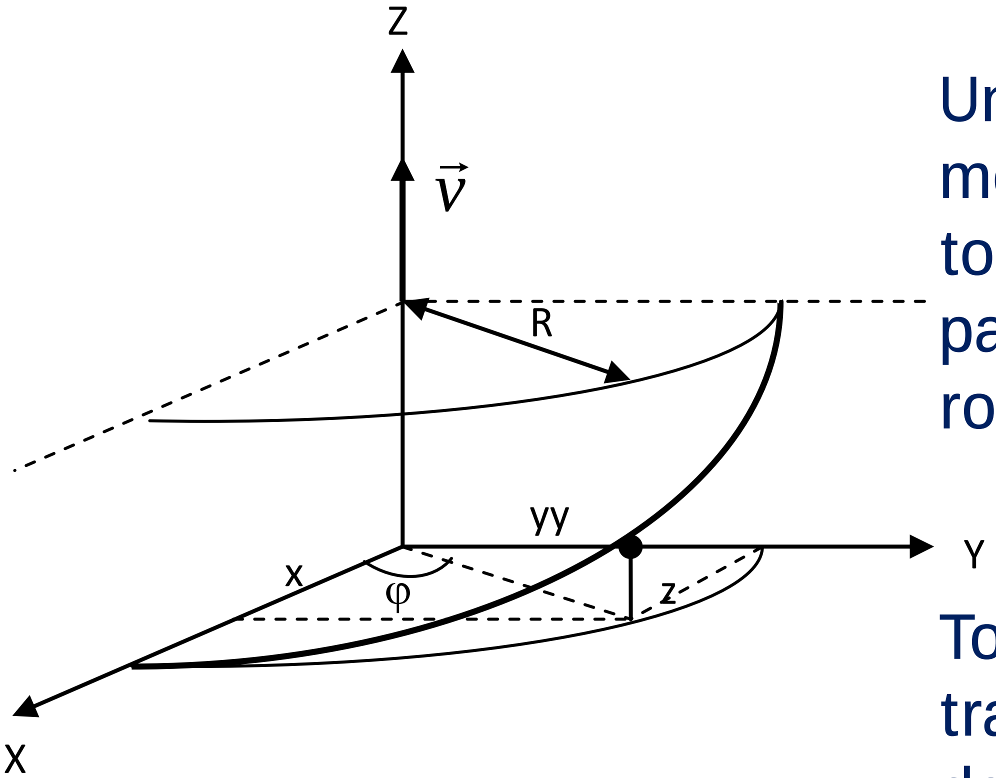
Movimientos del sólido rígido: vector velocidad angular

Es la derivada respecto al tiempo del vector velocidad angular

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Es un vector deslizante cuya línea de acción es el eje de rotación, caracterizado por su módulo $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, dirección (la del eje de rotación) y sentido (regla del sacacorchos)

Movimientos del sólido rígido: helicoidal



Un sólido rígido realiza un movimiento helicoidal si gira en torno a un eje y se traslada paralelamente al eje de rotación.

Todas las partículas describen trayectorias helicoidales, el eje de las hélices es el *eje instantáneo de rotación y deslizamiento*

Movimientos del sólido rígido: Varias traslaciones

Si el sólido está sometido a varias traslaciones, la velocidad del sólido es la suma de todas las velocidades de traslación

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P(t_1) + \vec{v}_P(t_2) + ...\vec{v}_P(t_m) = \sum_{i=1}^{m} \vec{v}_P(t_i)$$

Movimientos del sólido rígido: varias rotaciones

Si un sólido está sometido a varias rotaciones, la velocidad del sólido es la suma de las velocidades debidas a cada una de las rotaciones

Como la velocidad de un punto es el momento respecto a dicho punto del vector deslizante $\vec{\omega}$, la velocidad debida a todas las rotaciones $\vec{\omega}_1, ...\vec{\omega}_n$ es la suma de los momentos respecto a dicho punto de cada una de las rotaciones

$$\vec{v}_P = \vec{M}_P(\omega_1) + \vec{M}_P(\omega_2) + ... + \vec{M}_P(\omega_n) = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_P(\omega_j)$$

Movimientos del sólido rígido: 2 rotaciones

Si el sólido está sometido a 2 rotaciones, y éstas forman un par, la velocidad de cualquier punto del sólido es el momento del par; por tanto equivale a una traslación perpendicular al plano que determinan los vectores del par

Si un sólido está sometido a un movimiento de traslación, el movimiento equivale a un par de rotaciones en el plano perpendicular al vector traslación

La velocidad debida a la traslación es la suma de las m velocidades de traslación. Todos los puntos tienen la misma velocidad de traslación.

Cada traslación se puede sustituir por un par de rotaciones en el plano perpendicular $\rightarrow$ tenemos 2m + n rotaciones

Movimientos del sólido rígido: traslaciones y rotaciones

$$(\vec{v}_{t1} + \vec{v}_{t2} + \ldots \vec{v}_{tm}) + (\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \ldots\ldots \vec{\omega}_n)$$

$$\vec{v}_A = (\vec{v}_{t1} + \vec{v}_{t2} + \ldots \vec{v}_{tm}) + \vec{M}_A(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_A(\vec{\omega}_2) + \ldots + \vec{M}_A(\vec{\omega}_n)$$

$$\vec{v}_B = (\vec{v}_{t1} + \vec{v}_{t2} + \ldots \vec{v}_{tm}) + \vec{M}_B(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_B(\vec{\omega}_2) + \ldots + \vec{M}_B(\vec{\omega}_n)$$

$$\vec{v}_C = (\vec{v}_{t1} + \vec{v}_{t2} + \ldots \vec{v}_{tm}) + \vec{M}_C(\vec{\omega}_1) + \vec{M}_C(\vec{\omega}_2) + \ldots + \vec{M}_C(\vec{\omega}_n)$$

Movimientos del sólido rígido: traslaciones y rotaciones

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{\omega}$$

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{\omega}$$

Estas fórmulas demuestran que el movimiento de todos los puntos del sólido rígido se puede obtener mediante la suma de una traslación, definida por v_A, y una rotación definida por ω

Invariantes cinemáticos

Son magnitudes independientes del punto del sólido considerado

1. Rotación resultante

2. Producto escalar de la rotación resultante por la velocidad de un punto cualquiera del sólido

3. Velocidad de mínimo deslizamiento

Invariantes cinemáticos

1. La velocidad angular no depende del punto O del sólido indeformable que se considere $\vec{\omega}$

2. El producto escalar de los vectores velocidad y velocidad angular de rotación es un invariante en cualquier punto del sistema indeformable y en cualquier instante $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O$

3. La proyección del vector velocidad sobre la dirección de la rotación es un invariante, denominada velocidad de mínimo deslizamiento

$$v_d = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|}$$

Invariantes cinemáticos. Segundo y tercer invariante

Segundo invariante

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}_B = \vec{\omega}\cdot\left(\vec{v}_A + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{\omega}\right) = \vec{\omega}\cdot\vec{v}_A$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}_C = \vec{\omega}\cdot\left(\vec{v}_A + \overrightarrow{CA}\wedge\vec{\omega}\right) = \vec{\omega}\cdot\vec{v}_A$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{v}_C = \vec{\omega}\cdot\vec{v}_A = \vec{\omega}\cdot\vec{v}_B$$

Tercer invariante

$$\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{v}_C}{\left|\vec{\omega}\right|} = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{v}_A}{\left|\vec{\omega}\right|} = \frac{\vec{\omega}\cdot\vec{v}_B}{\left|\vec{\omega}\right|} = \left|\vec{v}_{\min}\right|$$

Clasificación del movimiento

$\vec{\omega} \neq \vec{0}$

$\vec{v}_O = \vec{0}$

El sistema lleva movimiento de rotación instantánea

$\vec{\omega} = \vec{0}$

$\vec{v}_O \neq \vec{0}$

El sistema lleva movimiento de traslación instantánea con la velocidad v_O

$\vec{\omega} = \vec{0}$

$\vec{v}_O = \vec{0}$

El sistema está en reposo

$\vec{\omega} \neq \vec{0}$

$\vec{v}_O \neq \vec{0}$

El sistema tiene movimiento helicoidal; en los puntos del eje instantáneo, el vector velocidad angular y el vector velocidad son colineales

Reducción a un punto del movimiento del sólido

Sea un sistema indeformable sometido a un conjunto de n rotaciones

$$\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \ldots.\vec{\omega}_n$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \ldots + .\vec{\omega}_n$$

La velocidad de un punto cualquiera del sistema material se puede expresar por

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{O_2P} + \ldots.. + \vec{\omega}_n \wedge \overrightarrow{O_nP} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{O_iP}$$

Si existiese alguna traslación, ésta se puede considerar como un par de rotaciones.

Por tanto, un punto P del sólido indeformable queda reducido por los términos del grupo cinemático

* Una traslación $\vec{v}_P$,velocidad que es propia de cada punto del sistema considerado

* Una rotación resultante $\vec{\omega}$,que es invariante para todos los puntos del sistema

Eje instantáneo de rotación y deslizamiento

Es el lugar geométrico de los puntos del sistema para los cuales la velocidad de un punto cualquiera y el vector rotación son colineales

Los puntos del eje instantáneo de rotación y deslizamiento tienen velocidad de mínimo deslizamiento

El eje instantáneo de rotación y deslizamiento va variando con el tiempo, y en su movimiento va generando una superficie denominada axoide