UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

POLITÉCNICA

Cinemática del sólido rígido II

Movimiento plano

Movimiento plano. Generalidades
Axoides
Axoides. Movimiento de Poncelet
Axoides. Ecuación analítica
Cento instantáneo de rotación

Movimiento plano del sólido rígido

Movimiento plano

Un sistema tiene movimiento plano-paralelo si existe un plano Π de puntos del sistema que se mantiene constantemente coincidente consigo mismo a lo largo de la evolución del movimiento en el tiempo.

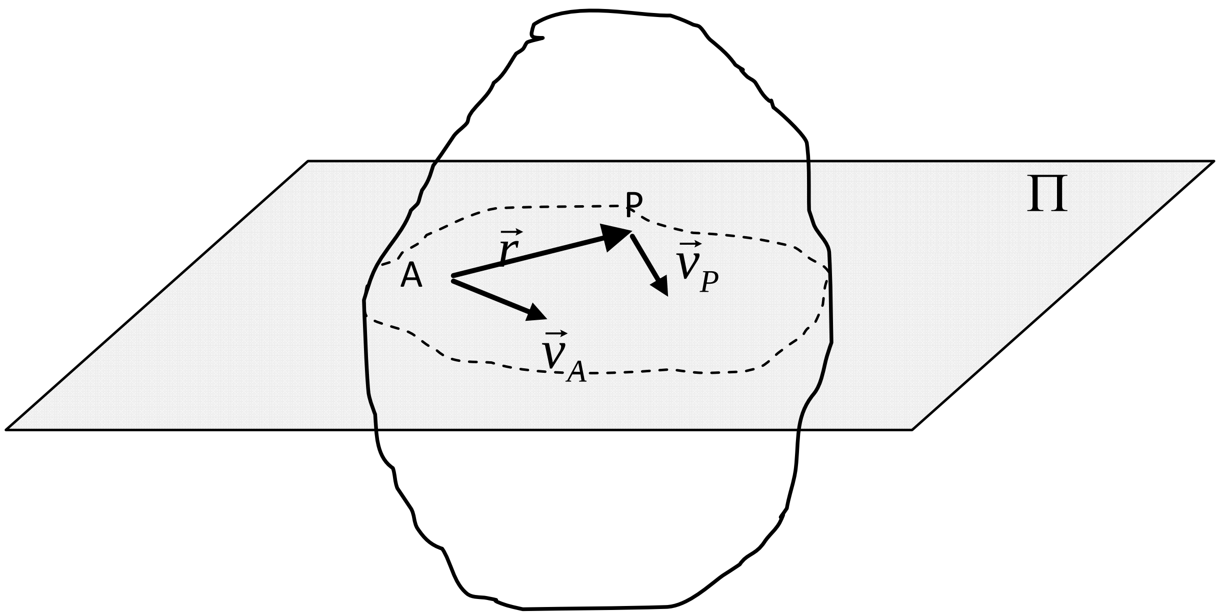
Movimiento plano

Todos los puntos del sistema que pertenecen a ese plano Π, tienen velocidades cuyos vectores están contenidos en el mismo

Si existiera un punto P de dicho plano cuya velocidad no estuviera contenida en el plano, admitiría una descomposición en una componente sobre el plano y otra en la dirección perpendicular

Movimiento plano

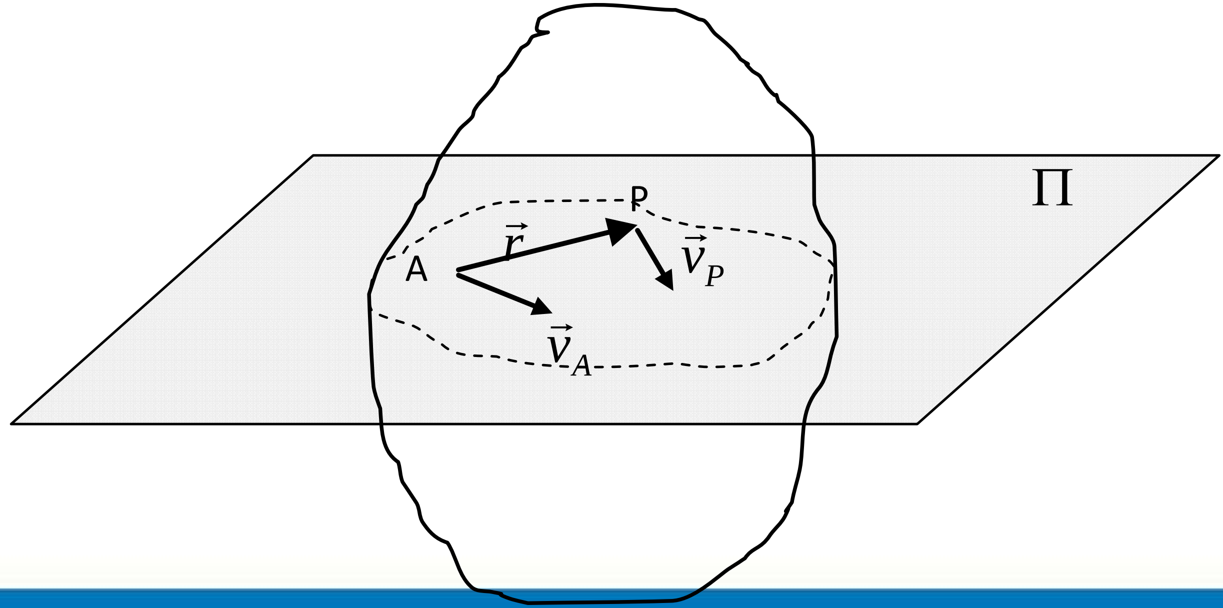
En un movimiento plano-paralelo el eje instantáneo de rotación y deslizamiento es perpendicular en todo momento al plano Π.



Movimiento plano

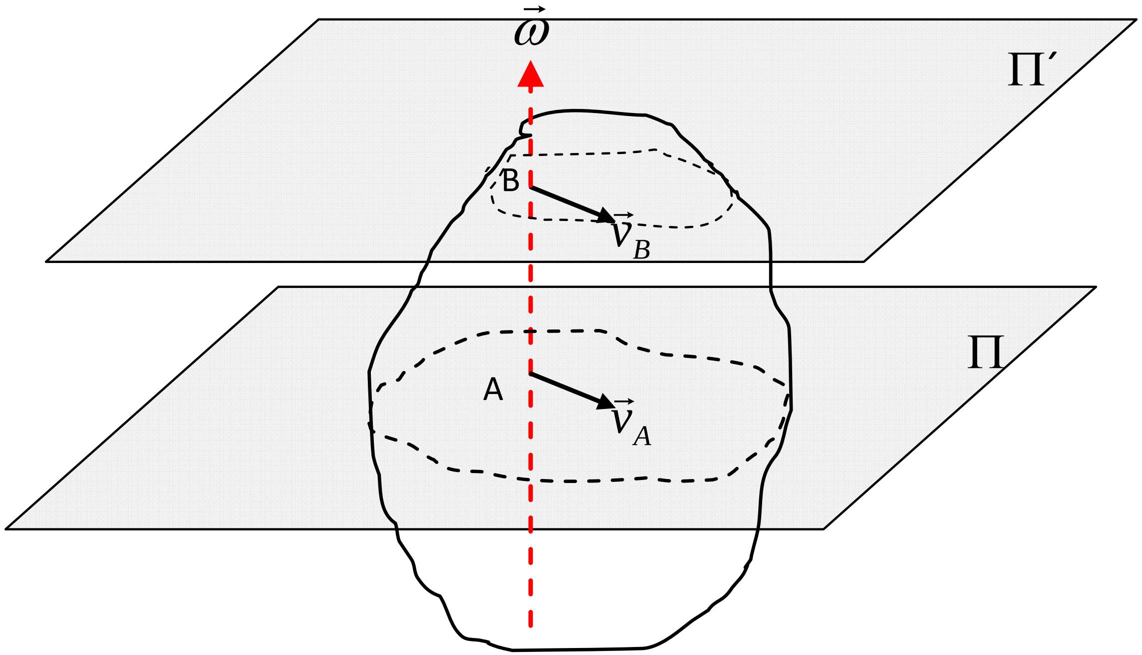
Las velocidades A y P están contenidas en el plano, así como el vector que une ambos puntos

El producto vectorial $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ también está contenido en dicho plano y $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano Π.



Movimiento plano

A y B situados en planos paralelos, Π y Π' respectivamente



Como $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$ la velocidad de ambos puntos es la misma porque los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{\omega}$ son colineales.

Axoides

Axoide es una superficie generada por el eje instantáneo de rotación y deslizamiento durante su movimiento

Si la evolución se observa desde la referencia fija el axoide generado se denomina axoide fijo; si la evolución del eje se considera desde la referencia móvil ligada al movimiento del sólido indeformable, el axoide generado es el axoide móvil.

Axoides

En un momento dado, el eje instantáneo de rotación y deslizamiento es único

En ese instante ambos axoides coinciden en una recta común que es el eje instantáneo de rotación y deslizamiento en ese instante

Axoides

En el transcurso del tiempo se puede considerar que el axoide móvil rueda sobre el axoide fijo alrededor de su recta común, con velocidad angular w y además desliza con la velocidad de mínimo deslizamiento.

El axoide móvil arrastra al sólido indeformable

Axoides: Ecuación analítica

Expresando la ecuación del eje instántaneo de rotación y deslizamiento en función del tiempo, en un sistema de referencia fijo y en uno móvil se obtienen las ecuaciones de los axoides

Axoides. Movimiento de Poncelet

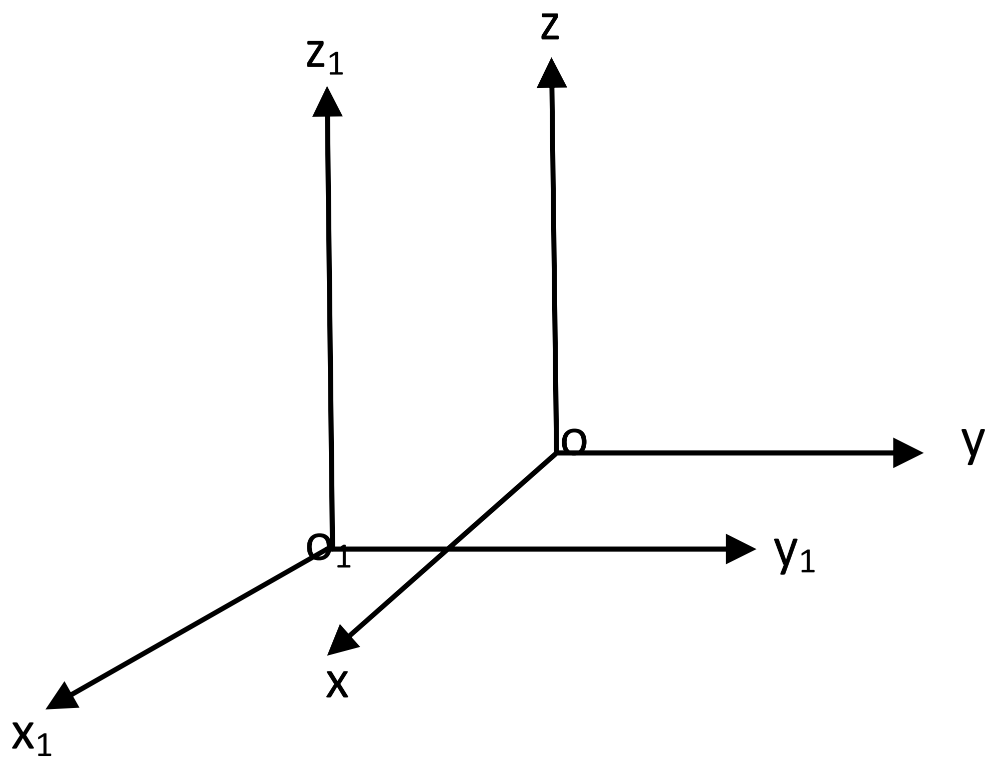
Se puede considerar que el sólido está ligado y se mueve solidariamente con la superficie móvil (axoide móvil) que rueda sobre una superficie fija (axoide fijo) al mismo tiempo que experimenta un deslizamiento a lo largo de la generatriz común instantánea.

Tal representación del movimiento se debe al matemático francés Jean Victor Poncelet a quien debe su nombre

Axoides

Fijo: O_1, X_1, Y_1, Z_1

Móvil: O, X, Y, Z



Axoides: Ecuación analítica

Fijo: O_1, X_1, Y_1, Z_1

$$\vec{v}_{O1} = v_{Ox1}\vec{i} + v_{Oy1}\vec{j} + v_{Oz1}\vec{k}$$

$$\vec{\omega}_1 = \omega_{x1}\vec{i} + \omega_{y1}\vec{j} + \omega_{z1}\vec{k}$$

$$\vec{v}_P = v_{x1}\vec{i} + v_{y1}\vec{j} + v_{z1}\vec{k}$$

Móvil: O, X, Y, Z

$$\vec{v}_O = v_{Ox}\vec{i} + v_{Oy}\vec{j} + v_{Oz}\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$$

$$\vec{v}_P = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Desarrollo de la ecuación en los dos sistemas

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\omega}$$

En el sistema de referencia fijo

$$\begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ox1} \\ v_{Oy1} \\ v_{Oz1} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_{x1} & \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ x_1 - x_{O1} & y_1 - y_{O1} & z_1 - z_{O1} \end{vmatrix}$$

En el sistema de referencia móvil

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Ox} \\ v_{Oy} \\ v_{Oz} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Axoides: Ecuación analítica

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{\omega}$$

En el sistema de referencia fijo

$$v_{x1} = v_{Ox1} + \begin{vmatrix} \omega_{y1} & \omega_{z1} \\ y_1 - y_{O1} & z_1 - z_{O1} \end{vmatrix}$$

$$v_{y1} = v_{Oy1} + \begin{vmatrix} \omega_{z1} & \omega_{x1} \\ z_1 - z_{O1} & x_1 - x_{O1} \end{vmatrix}$$

$$v_{z1} = v_{Oz1} + \begin{vmatrix} \omega_{x1} & \omega_{y1} \\ x_1 - x_{O1} & y_1 - y_{O1} \end{vmatrix}$$

En el sistema de referencia móvil

$$v_x = v_{Ox} + \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ y & z \end{vmatrix}$$

$$v_y = v_{Oy} + \begin{vmatrix} \omega_z & \omega_x \\ z & x_1 \end{vmatrix}$$

$$v_z = v_{Oz} + \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ x & y \end{vmatrix}$$

Axoides: Ecuación analítica

Ecuación del axoide en el sistema de referencia fijo

$$\frac{v_{Ox1}+\begin{vmatrix}\omega_{y1} & \omega_{z1}\\ y_1-y_{O1} & z_1-z_{O1}\end{vmatrix}}{\omega_{x1}}=\frac{v_{Oy1}+\begin{vmatrix}\omega_{z1} & \omega_{x1}\\ z_1-z_{O1} & x_1-x_{O1}\end{vmatrix}}{\omega_{y1}}=\frac{v_{Oz1}+\begin{vmatrix}\omega_{x1} & \omega_{y1}\\ x_1-x_{O1} & y_1-y_{O1}\end{vmatrix}}{\omega_{z1}}$$

En el sistema de referencia móvil

$$\frac{v_{Ox}+\begin{vmatrix}\omega_{y} & \omega_{z}\\ y & z\end{vmatrix}}{\omega_{x}}=\frac{v_{Oy}+\begin{vmatrix}\omega_{z} & \omega_{x}\\ z & x_1\end{vmatrix}}{\omega_{y}}=\frac{v_{Oz}+\begin{vmatrix}\omega_{x} & \omega_{y}\\ x & y\end{vmatrix}}{\omega_{z}}$$

Centro instantáneo de rotación

Cualquier movimiento plano de un sólido rígido es una rotación instantánea alrededor de un punto del espacio denominado Centro Instantáneo de Rotación (c.i.r)

$\vec{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento y por tanto a

$\vec{v}_A, \vec{v}_B, \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = \ldots \vec{v}_P \cdot \vec{\omega}$$