Universidad Politécnica de Madrid
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Cinemática del sólido rígido III

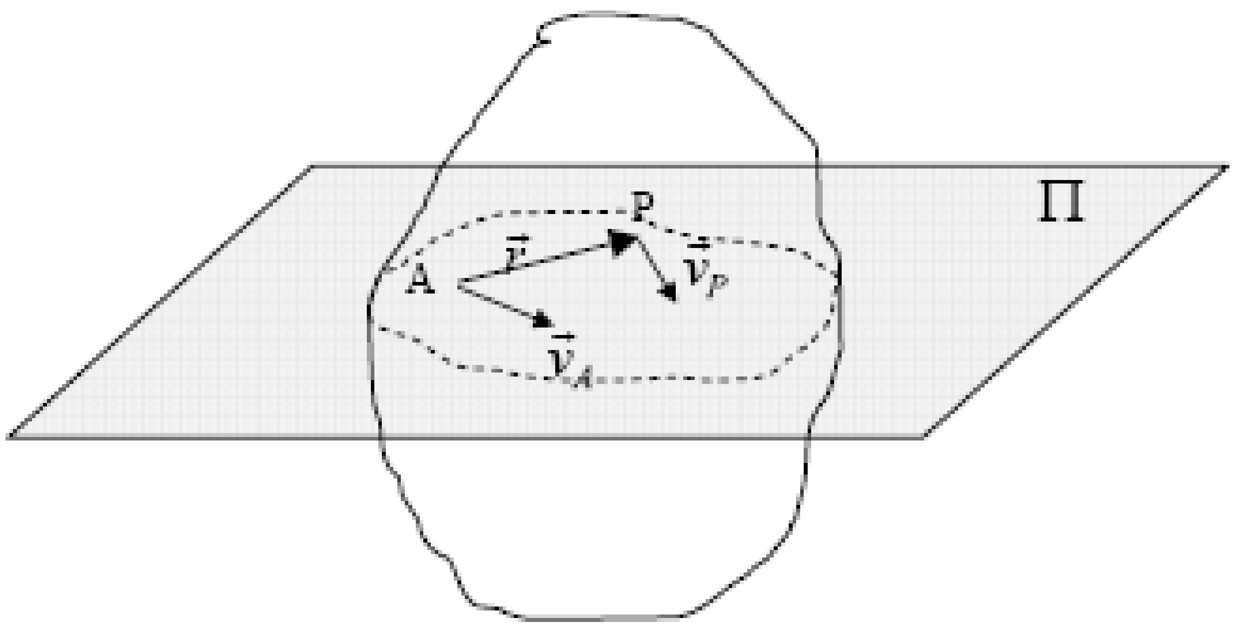
Movimiento plano paralelo

Elvira Martínez Ramírez

Distribución de las aceleraciones en el movimiento plano-paralelo.

Movimiento plano-paralelo

Un sistema tiene movimiento plano-paralelo si existe un plano de puntos del sistema que se mantiene constantemente coincidente consigo mismo a lo largo de la evolución del movimiento en el tiempo



Movimiento plano-paralelo

Todos los puntos del sistema que pertenecen a ese plano, tienen velocidades cuyos vectores están contenidos en el mismo.

Si existiera un punto P de dicho plano cuya velocidad no estuviera contenida en el plano, admitiría una descomposición en una componente sobre el plano y otra en la dirección perpendicular; esta componente haría que el punto P abandonara el plano, lo cual está en contra del hipótesis

Movimiento plano-paralelo

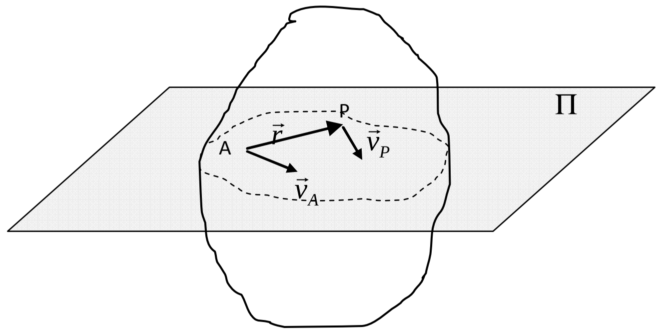
Las trayectorias de todos los puntos contenidos en el plano son curvas planas contenidas en el mismo

El eje instantáneo de rotación y deslizamiento es perpendicular en todo momento al plano

En un movimiento plano-paralelo el eje instantáneo de rotación y deslizamiento es perpendicular en todo momento al plano Π

Movimiento plano-paralelo

Las velocidades de los puntos A y P, y el vector que los une, están contenidas en el plano.



De la ecuación, $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ se deduce que también $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ lo está. Como el producto vectorial es simultáneamente perpendicular a los dos vectores, necesariamente $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano Π.

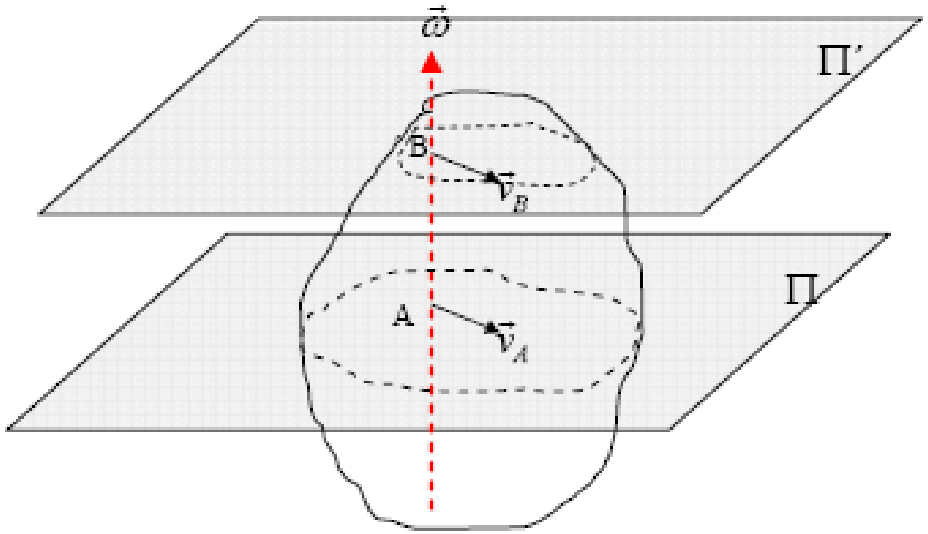
Movimiento plano-paralelo

Las velocidades de puntos pertenecientes a rectas perpendiculares al plano Π son idénticas.

Si dos puntos A y B están en los planos paralelos Π y Π´ , la velocidad de ambos puntos es la misma ya que

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Y los vectores $\vec{\omega}$ y $\overrightarrow{AB}$ son colineales



*Basta con estudiar el movimiento de uno de los planos del haz de planos paralelos, **plano director,** ya que **el movimiento se reproduce de igual forma para todos los puntos del haz***

Base y ruleta

La intersección del plano director con los axoides fijo y móvil determina curvas polares: polar fija o base y polar móvil o ruleta.

En cada plano del movimiento, la ruleta rueda con velocidad angular ω sobre la base, siendo el punto de contacto entre ambas en cada instante el polo de velocidades o centro instantáneo de rotación y deslizamiento.

Base y ruleta

La velocidad de cualquier punto material es ortogonal a la velocidad instantánea de rotación, por lo que el segundo invariante cinemático se anula por tratarse de vectores perpendiculares.

La velocidad de mínimo deslizamiento se anula.

El movimiento plano-paralelo es una rotación pura alrededor del eje instantáneo de rotación siempre que la rotación no sea nula

Base y ruleta

El movimiento se puede materializar en una rodadura sin deslizamiento (porque la velocidad de mínimo deslizamiento es nula) del axoide móvil sobre el fijo, siendo en cada instante la generatriz común de tangencia entre ambos axoides el eje instantáneo de rotación

La intersección de ambos axoides con el plano director determina las denominadas curvas polares: fija o base y móvil o ruleta

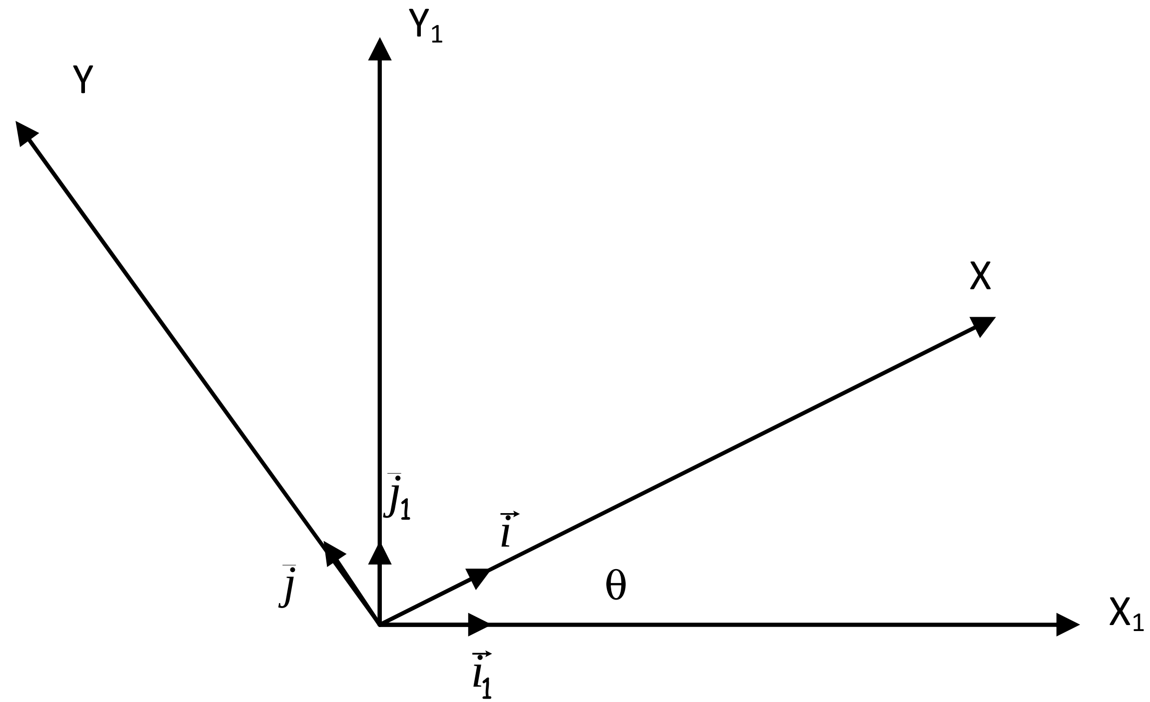
Base y ruleta

Ambas son tangentes en el punto P, que es la intersección del eje instantáneo de rotación con el plano director, denominado centro instantáneo de rotación o centro de velocidades.

El movimiento puede materializarse en el plano director como la rotación sin deslizamiento de la polar móvil o ruleta (solidaria con el sistema material) sobre la polar fija o base

Ecuación de la Base y ruleta

Tomamos dos sistemas de referencia con el mismo origen. En el sistema de referencia móvil (O, X, Y) hacemos coincidir la el eje OX con la recta R, y en el fijo (O_1, X_1, Y_1) el eje O_1X_1 con la recta R_1.



Ecuación de la Base y ruleta

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\vec{i}_1 = \cos\theta \vec{i} - \operatorname{sen}\theta \vec{j}$$

$$\vec{j}_1 = \operatorname{sen} s\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$$

Ecuación de la Base y ruleta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuación de la Base y ruleta

El lugar geométrico descrito por el CIR se calcula imponiendo la condición de que se anule su velocidad, por tanto derivando respecto al tiempo e igualando a cero se tiene

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \\ \\ \dfrac{dy_1}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_0}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \\ \\ \dfrac{dy_0}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta\dfrac{d\theta}{dt} & -\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ \\ \cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} & -\operatorname{sen}\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{d\theta} \\ \\ \dfrac{dy_1}{d\theta} \end{pmatrix}\frac{d\theta}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_0}{d\theta} \\ \\ \dfrac{dy_0}{d\theta} \end{pmatrix}\frac{d\theta}{dt} - \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx_1}{d\theta} = 0 = -(x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta) + \frac{dx_0}{d\theta}$$

$$\frac{dy_1}{d\theta} = 0 = -(-x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{dy_0}{d\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_0}{d\theta} \\ \dfrac{dy_0}{d\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx_0}{d\theta} \\ \dfrac{dy_0}{d\theta} \end{pmatrix}$$

Polar móvil

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{sen}\theta \frac{dx_O}{d\theta} - \cos\theta \frac{dy_O}{d\theta} \\ y &= \cos\theta \frac{dx_O}{d\theta} + \operatorname{sen}\theta \frac{dy_O}{d\theta} \end{aligned}\right\}$$

Polar fija

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx_0}{d\theta}\operatorname{sen}\theta - \dfrac{dy_0}{d\theta}\cos\theta \\ \\ \dfrac{dx_0}{d\theta}\cos\theta + \dfrac{dy_0}{d\theta}\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dx_0}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{dx_0}{d\theta}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{dx_0}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{dy_0}{d\theta}\operatorname{sen}^2\theta \\ \\ \frac{dx_0}{d\theta}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{dy_0}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{dx_0}{d\theta}\cos^2\theta + \frac{dy_0}{d\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{dy_0}{d\theta} \\ \\ \frac{dx_0}{d\theta} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_O - \frac{dy_O}{d\theta} \\ y_1 &= y_O + \frac{dx_O}{d\theta} \end{aligned}\right\}$$

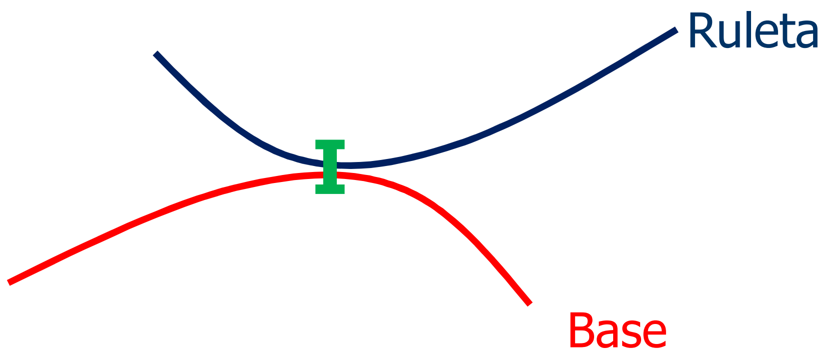
Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación

A lo largo del transcurso del tiempo, la posición del centro instantáneo de rotación y deslizamiento se irá trasladando sobre la polar fija.

A la velocidad en un instante dado en este movimiento se denomina velocidad de cambio de polo, la cual no tiene nada que ver con la velocidad que tiene un punto P perteneciente al sistema indeformable, que en todo instante es nula.

Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación

En un instante determinado, las polares (base y ruleta) son tangentes en un punto I.



El centro instantáneo de rotación ocupa las posiciones I e I´en los instantes t y t+Δt respectivamente

Se denomina velocidad de sucesión del CIR al límite

$$v_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I\,I'}{\Delta t}$$

Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación

La velocidad de sucesión viene representada por un vector tangente a la base en el CIR

Corresponde a la velocidad de un punto ficticio cuya trayectoria fuese la base y cuya posición coincidiese en cada instante con la del centro instantáneo de rotación.

La velocidad de sucesión se puede determinar en función de la velocidad de rotación del sólido y de las curvaturas de la base y de la ruleta en el CIR.

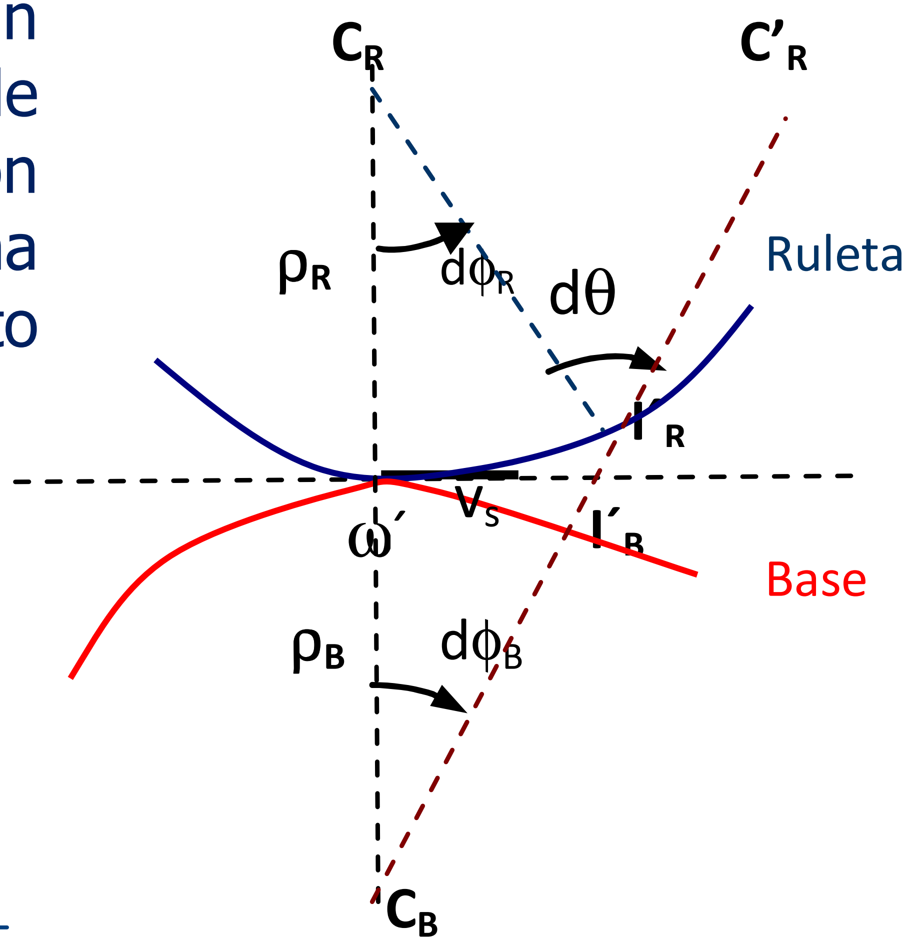
Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación

La ruleta rueda sobre la base sin deslizamiento, los elementos de arco sobre ambas curvas son iguales, el arco II´$_B$ tiene la misma longitud que el arco II´$_R$, por tanto se puede expresar

$$ds = arc\ \ II_B{}' = \rho_B d\phi_B$$

$$ds = arc\ \ II_R{}' = \rho_R d\phi_R$$

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \rho_B \frac{d\phi_B}{dt} = \rho_R \frac{d\phi_R}{dt}$$



Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación

$$d\theta = d\phi_B + d\phi_R$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\phi_B}{dt} + \frac{d\phi_R}{dt} = \frac{v_s}{\rho_B} + \frac{v_s}{\rho_R}$$

Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

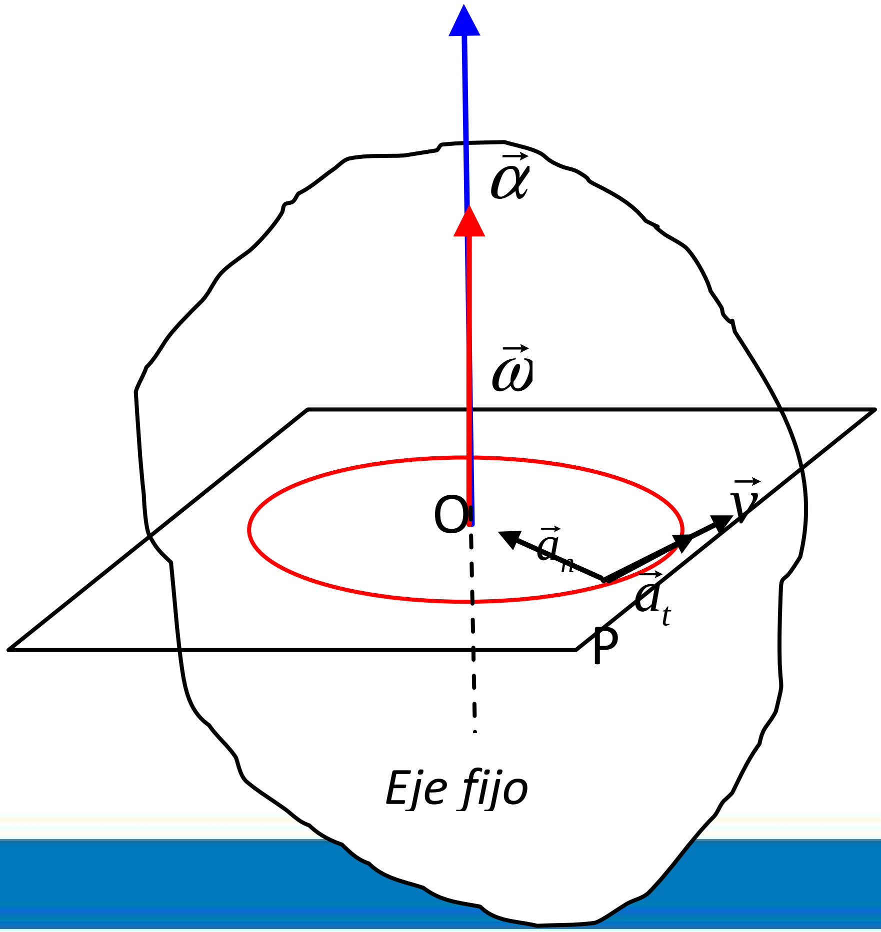
El movimiento se puede considerar como una rotación pura, sin deslizamiento a lo largo del eje de rotación.

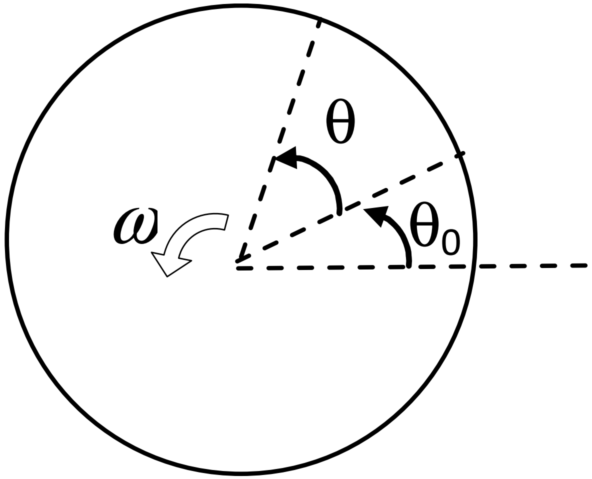
Si se tomar el punto de referencia O sobre dicho eje, no tiene ni velocidad ni aceleración, lo cual simplifica considerablemente el problema.

Cualquier punto P realiza una trayectoria circular con centro en un punto de dicho eje.

Movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

El cálculo de la velocidad y aceleración del punto P del sólido se reduce a calcular la velocidad y aceleración de un punto que realiza un movimiento circular,





Distribución de las aceleraciones en el movimiento plano-paralelo.

Velocidad de un punto M de un sistema material indeformable con movimiento plano paralelo

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

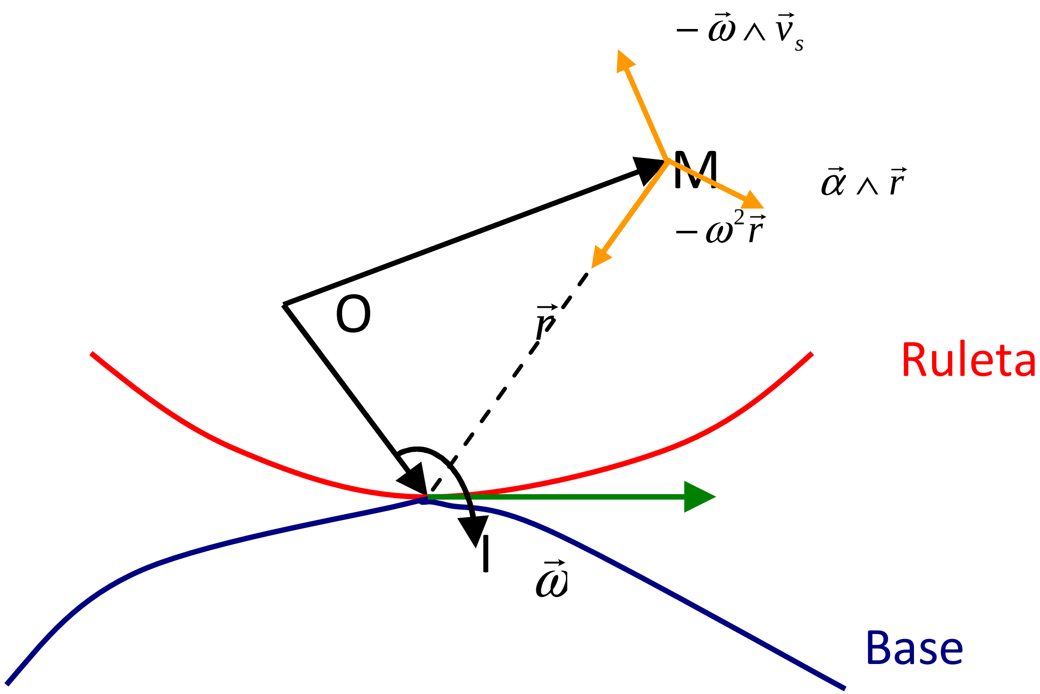
Aceleración de un punto M de un sistema material indeformable con movimiento plano paralelo:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Se usarán coordenadas polares, siendo el polo el centro instantáneo de velocidades I, y el eje origen de ángulos la recta tangente común a la base y ruleta.

Distribución de las aceleraciones en el movimiento plano-paralelo.

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OI}$$



$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OI}}{dt} = \vec{v}_M - \vec{v}_s$$

$$\vec{a}_M = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_M - \vec{\omega} \wedge \vec{v}_s = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) - \vec{\omega} \wedge \vec{v}_s =$$

$$= \vec{\alpha} \wedge \vec{r} - \left| \vec{\omega} \right|^2 \vec{r} - \vec{\omega} \wedge \vec{v}_s$$

Distribución de las aceleraciones en el movimiento plano-paralelo.

$$\vec{a}_M = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} - |\vec{\omega}|^2 \vec{r} - \vec{\omega} \wedge \vec{v}_s$$

El primer término, es tangente a la trayectoria del punto en M, y representa la aceleración tangencial del punto M en su rotación alrededor de I.

El segundo término es normal a la trayectoria en M, esta dirigido hacia I, y representa la aceleración normal de M en su movimiento alrededor de I.

El tercer término, es constante en todos los puntos, porque no depende de r; representa la aceleración del centro instantáneo de rotación I, ya que en ese punto se anulan los otros términos.

Distribución de las aceleraciones en el movimiento plano-paralelo.

También se puede expresar en función de las componentes intrínsecas

$$a_t = \alpha r - \omega v_s \cos\varphi$$

$$a_n = -\omega^2 r + \omega v_s sen\varphi$$

Se puede encontrar algún punto en el que la aceleración sea nula,

$$\alpha r = \omega v_s \cos\varphi$$

$$\omega^2 r = \omega v_s sen\varphi$$

Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones

Se define la *circunferencia de las inversiones* como el lugar geométrico perteneciente al sistema indeformable y al plano director tales que poseen aceleración tangencial nula.

$$\alpha r = \omega v_s \cos\varphi$$

Se define la *circunferencia de las inflexiones* como el lugar geométrico de los puntos pertenecientes al sistema indeformable y al plano director tales que poseen aceleración normal nula.

$$\omega^2 r = \omega v_s sen\varphi$$

Circunferencia de las inversiones

circunferencia de las inversiones : aceleración tangencial nula.

$$\alpha r = \omega v_s \cos\varphi$$

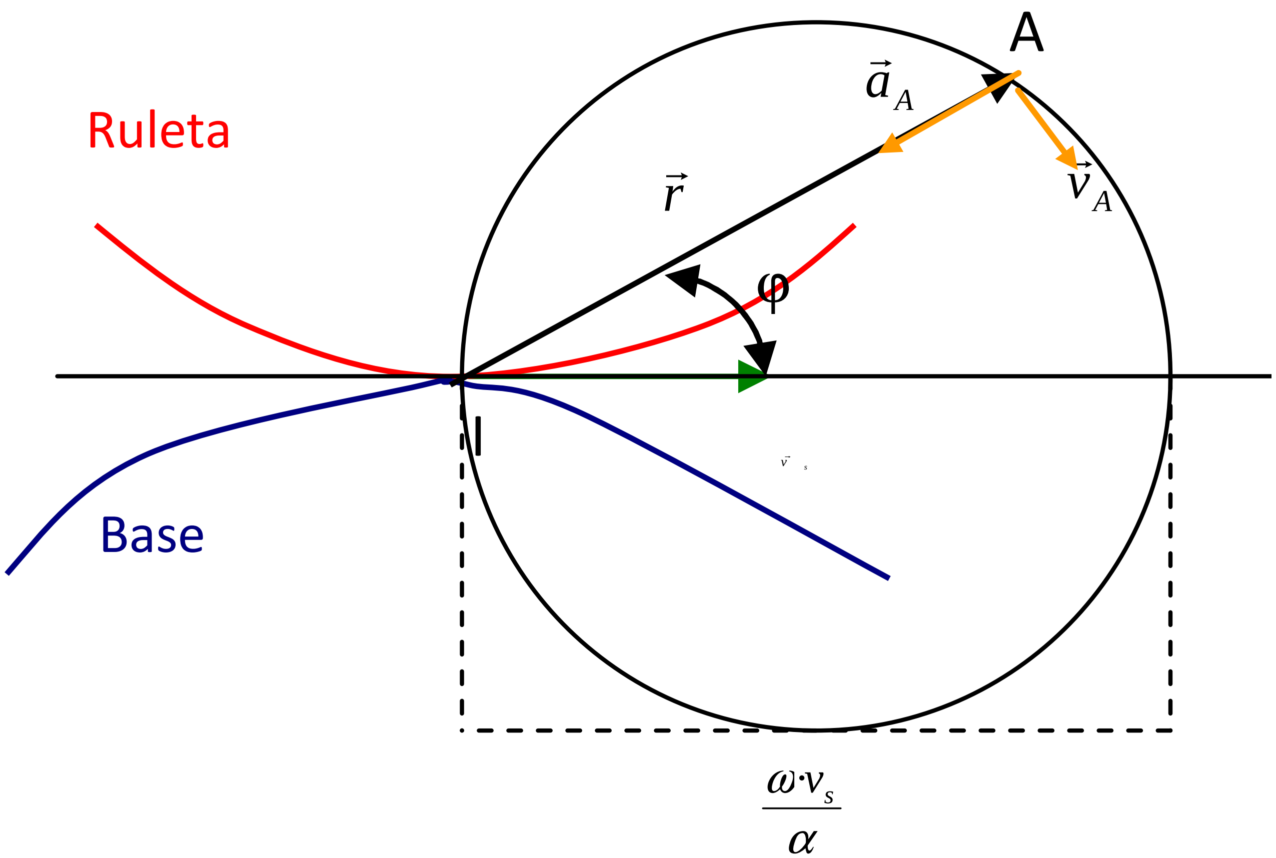
$$r = \frac{\omega \cdot v_s}{\alpha} \cos\varphi$$

Ecuación que en el sistema de coordenadas polares elegido representa una circunferencia de diámetro $\frac{\omega \cdot v_s}{\alpha}$

El centro está en la dirección de la tangente común base-ruleta y que pasa por el punto I.

En los puntos de la circunferencia el vector aceleración es ortogonal al vector velocidad

Circunferencia de las inversiones



Circunferencia de las inflexiones

circunferencia de las inflexiones : aceleración normal nula.

$$0 = -\omega^2 r + \omega v_s sen\varphi$$

$$r = \frac{v_s}{\omega} sen\varphi$$

es la ecuación que representa la ecuación en polares de una circunferencia de diámetro $\frac{v_s}{\omega}$

El centro está en la dirección normal a la tangencia entre base y ruleta y que pasa por el punto I.

En los puntos de esta circunferencia la velocidad y la aceleración son colineales.

Circunferencia de las inflexiones

En la intersección de las dos circunferencias se anula la aceleración, es el centro instantáneo de aceleraciones.