UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos
Dpto. Física y Mecánica

Operadores diferenciales

Se denominan **líneas coordenadas** de un espacio euclídeo tridimensional a aquellas que se obtienen partiendo un punto dado P de coordenadas (q_1, q_2, q_3), variando una de ellas y manteniendo fijas las otras dos.

Si las líneas coordenadas son ortogonales en un punto las coordenadas se denominan coordenadas ortogonales. Por ejemplo, las coordenadas cartesianas (x,y,z) son ortogonales, al igual que los son las coordenadas cilíndricas (r, φ,z) y las coordenadas esféricas (r, θ,φ).

En matemáticas un operador diferencial es un operador lineal definido como una función del operado de diferenciación.

El uso más común del operador diferencial es realizar la **derivada** en sí misma.

Considerando que la variable es x, la notación más común de éste operador es

$$\frac{d}{dx}$$

Las sucesivas derivadas se expresan por $\frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3}, \dots \frac{d^n}{dx^n}$

Cuando se consideran derivadas respecto a variables diferentes las derivadas parciales pueden escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

Las sucesivas derivadas se expresan por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}, \frac{\partial^n}{\partial y^n}, \frac{\partial^n}{\partial z^n}$$

Y las derivadas parciales cruzadas

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}$$

Líneas coordenadas

Se denominan **líneas coordenadas** de un espacio euclídeo tridimensional a aquellas que se obtienen partiendo un punto dado P de coordenadas (q_1, q_2, q_3), variando una de ellas y manteniendo fijas las otras dos.

Si las líneas coordenadas son ortogonales en un punto las coordenadas se denominan coordenadas ortogonales. Por ejemplo, las coordenadas cartesianas (x,y,z) son ortogonales, al igual que los son las coordenadas cilíndricas (r, φ,z) y las coordenadas esféricas (r, θ,φ).

Líneas coordenadas

Tomando tres vectores tangentes a cada línea en un punto, se obtienen tres vectores ortogonales entre sí, pero no unitarios.

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

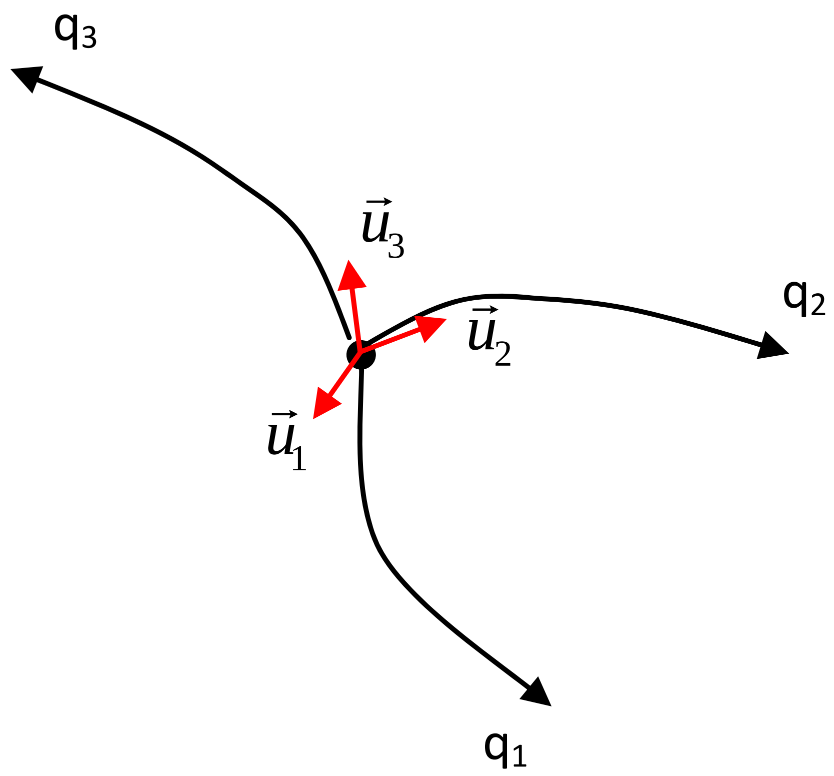
Para obtener un sistema ortonormal, se divide cada vector por su módulo

$$h_i(q_1, q_2, q_3) = \left\| \vec{e}_i \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|$$

enominado factor de escala

Líneas coordenadas

Dado un conjunto de coordenadas (q_1, q_2, q_3) sobre un espacio euclídeo, cuyas líneas son ortogonales entre sí, se puede construir una base ortonormal en cada punto a partir de los vectores tangentes en cada una de las líneas coordenadas.



Factor de escala

En el cálculo vectorial se definen unas cantidades, denominadas **factor de escala h_i,** que representan la proporción entre lo que varía una coordenada y el desplazamiento que produce esta variación.

A partir de la expresión $h_i(q_1, q_2, q_3) = \|\vec{e}_i\| = \left\| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\|$ siendo

$$(h_i)^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)^2 = \left(\vec{e}_x \frac{dx}{dq_i} + \vec{e}_y \frac{dy}{dq_i} + \vec{e}_z \frac{dz}{dq_i} \right)^2 = \left(\vec{e}_x \frac{dx}{dq_i} + \vec{e}_y \frac{dy}{dq_i} + \vec{e}_z \frac{dz}{dq_i} \right) \cdot \left(\vec{e}_x \frac{dx}{dq_i} + \vec{e}_y \frac{dy}{dq_i} + \vec{e}_z \frac{dz}{dq_i} \right)$$

Factor de escala

$$(h_i)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$$

de donde el factor de escala se expresa mediante la expresión

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$$

Factor de escala

Considerando un sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) y un sistema de coordenadas curvilíneas (q_1, q_2, q_3).

Las coordenadas cartesianas se pueden expresar en función de las coordenadas curvilíneas mediante relaciones de la forma

$$x=x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y=y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z=z(q_1, q_2, q_3)$$

Factor de escala

Conociendo estas relaciones los factores de escala (h_1, h_2, h_3) se determinan mediante las expresiones

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

Factor de escala en coordenadas cartesianas

Cuando el sistema de coordenadas es el de coordenadas cartesianas $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$, los vectores unitarios definidos sobre cada una de las direcciones son $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

La relación entre coordenadas es *(x=x, y=y, z=z)*, y los factores de escala son

$$h_1 = h_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = 1$$

$$h_2 = h_y = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1$$

$$h_3 = h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

Factor de escala en coordenadas cilíndricas

Cuando el sistema de coordenadas es de coordenadas cilíndricas $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, z)$,los vectores unitarios definidos sobre cada una de las direcciones son $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{k})$,la relación entre coordenadas es

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = rsen\varphi$$

$$z = z$$

Factor de escala en coordenadas cilíndricas

Los factores de escala son

$$h_1 = h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\cos\varphi)^2 + (sen\varphi)^2} = 1$$

$$h_2 = h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-rsen\varphi)^2 + (r\cos\varphi)^2} = r$$

$$h_3 = h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

Factor de escala en coordenadas esféricas

Cuando el sistema de coordenadas es de coordenadas esféricas $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, z)$ los vectores unitarios definidos sobre cada una de las direcciones son $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ la relación entre coordenadas cartesianas y esféricas es

$$x = rsen\theta \cos\varphi$$

$$y = rsen\theta sen\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

Factor de escala en coordenadas esféricas

Los factores de escala son

$$h_1 = h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\left(sen\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(sen\theta sen\varphi\right)^2 + (\cos\varphi)^2} = 1$$

$$h_2 = h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{\left(r\cos\theta\cos\varphi\right)^2 + \left(r\cos\theta sen\varphi\right)^2 + (-rsen\theta)^2} = r$$

$$h_3 = h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\left(-rsen\theta sen\varphi\right)^2 + \left(rsen\theta\cos\varphi\right)^2} = rsen\theta$$

Un **operador diferencial vectorial** es un operador lineal que actúa sobre campos vectoriales definidos sobre una variedad diferenciables

El operador vectorial nabla es un operador matemático que tiene carácter vectorial; sin embargo carece de algunas de las propiedades de las que gozan las magnitudes vectoriales, como por ejemplo el módulo.

En coordenadas cartesianas se expresar por

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Si el operador nabla se aplica escalarmente a un escalar se obtiene el gradiente de dicha función escalar; si se aplica escalarmente a un vector se obtiene la divergencia de la función vectorial.

Si el operador nabla se aplica vectorialmente a una función vectorial se obtiene el rotacional de la función vectorial

Gradiente de un campo escalar **f(q$_1$,q$_2$q$_3$)**

Dada un campo escalar, el gradiente de dicha función es un campo vectorial, que en coordenadas curvilíneas se expresa mediante la ecuación

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\vec{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\vec{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\vec{u}_3 \right) f$$

Siendo

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\vec{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\vec{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\vec{u}_3 \right)$$

Gradiente de un campo escalar **f(q$_1$,q$_2$q$_3$)**

En un sistema de coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Y en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

Divergencia de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{v}(q_1, q_2, q_3)$, la divergencia de dicho campo es un campo escalar, que se puede expresar como la aplicación del operador nabla escalarmente por el campo vectorial

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\vec{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\vec{u}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\vec{u}_3 \right) \cdot \left(v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3 \right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial v_3}{\partial q_3} \right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial (v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (h_1 v_2 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 v_3)}{\partial q_3} \right)$$

En un sistema de coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Y en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial (sen\theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotacional de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{v}(q_1, q_2, q_3)$, el rotacional de es el producto vectorial, del operador nabla por el vector, lo que resulta

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\vec{u}_1 & h_2\vec{u}_2 & h_3\vec{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}$$

En un sistema de coordenadas cartesianas

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\varphi & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & v_z \end{vmatrix}$$

Y en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{1}{r^2 sen\theta} \begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & rsen\theta \vec{u}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & r v_\theta & rsen\theta v_\varphi \end{vmatrix}$$

Laplaciano de un campo escalar **$f(q_1,q_2q_3)$**

La expresión del laplaciano de un campo escalar f es un campo escalar, que en coordenadas curvilíneas se expresa mediante la ecuación

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h^3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_2}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right]$$

En un sistema de coordenadas cartesianas

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Y en coordenadas esféricas

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right)$$