4. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Desde muy antiguo se conoce que algunos materiales, al ser frotados con lana, adquieren la propiedad de atraer cuerpos ligeros. Transcurrió mucho tiempo antes de disponer de una adecuada interpretación de este hecho y así, con el avance en el conocimiento de la estructura íntima de la materia y la consiguiente identificación de las partículas elementales que componen el átomo, ha surgido la necesidad de asignar a la materia una nueva propiedad, ***la carga eléctrica***. Actualmente decimos que dos cuerpos están sometidos a una ***interacción eléctrica*** si ambos poseen esa propiedad, conocida como carga eléctrica.

4.1. CAMPO Y POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

En ese primer apartado estudiaremos la **electrostática** que trata de las cargas eléctricas en reposo.

4.1.1. Concepto de carga eléctrica

La materia está constituida por átomos y los átomos a su vez por un núcleo central donde se encuentran los protones y los neutrones y alrededor del núcleo se mueven los electrones. La ***carga eléctrica*** es una propiedad intrínseca y fundamental que tienen partículas como electrones y protones. Se manifiesta en que dos electrones o dos protones se repelen mientras un electrón y un protón se atraen. A la carga del protón se le asigna signo positivo (e) mientras que a la carga del electrón se le asigna signo negativo (-e).

Un cuerpo cuyos átomos poseen el mismo número de protones que de electrones no tiene carga eléctrica neta, pero si conseguimos extraer o introducir algunos electrones, producimos un desequilibrio en dicho número que hace que el cuerpo posea ahora una carga neta. Existen, pues, dos clases de cuerpo electrizados: cuerpos con carga neta positiva (defecto de electrones) y cuerpos con carga neta negativa (exceso de electrones). Dos propiedades fundamentales de la carga son su conservación y su cuantización, solo puede transferirse la carga correspondiente a un número entero de electrones.

La unidad de carga natural es el electrón. Sin embargo, esta unidad es tan pequeña, que en la práctica resulta más útil definir otras mayores como el Coulombio. La relación entre esta unidad y la carga del electrón: $e = 1.6\times10^{-19}\,C$

4.1.2. Ley de Coulomb. Principio de superposición

Realmente no vemos las cargas eléctricas sino que vemos su efecto, vemos como dos cuerpos carga neta se atraen o se repelen. Charles Augustin Coulomb (1736-1806) midió por primera vez, en 1785 las interacciones eléctricas en forma cuantitativa y enuncio la ley que las rige:

"La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las mismas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos"

Matemáticamente, la ley se expresa: $\vec{F} = K \frac{q_1 \times q_2}{r^2} \vec{u}$, siendo $\vec{u}$ un vector unitario dirigido desde la carga que ejerce la fuerza hasta la carga que lo experimenta. Para aplicar este criterio cada carga debe ser incluida en la expresión de la ley de Coulomb con su signo correspondiente.

En la expresión, K es la constante de Coulomb y su valor depende del medio en el que estén colocadas las cargas:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \times m^2}$ permitividad dieléctrica del vacío

ε_r permitividad dieléctrica relativa del medio en el que se encuentran las cargas, si trabajamos en el vacío $\varepsilon_r = 1$

Con estos datos: $K = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2}$

Nosotros solo estudiaremos supuestos en los que las cargas se encuentran en el vacío (o en el aire seco). La ley de Coulomb solo es aplicable a cargas puntuales, es decir, a cuerpos cargados cuyos tamaños sean mucho menores que la distancia que los separa y dichas cargas han de estar en reposo.

Acabamos de ver cómo se calcula la fuerza que una carga ejerce sobre otra, pero ¿qué ocurre cuando interaccionan más de dos cargas puntuales? ¿Cómo calcular la fuerza que ejercen varias cargas sobre otra? La respuesta está en el llamado Principio de Superposición:

Principio de superposición: Si en un medio determinado existen varias cargas puntuales q_1, q_2, q_3......q_n la fuerza total actuante sobre la carga q_1 es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema, esto es, la fuerza con que interaccionan dos cargas no se ve alterada por la presencia de una tercera carga:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} = \sum_{i=2}^{4} \vec{F}_{i1}$$

4.1.3. Campo eléctrico. Líneas de campo

En todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora se ha podido apreciar que para que una carga eléctrica sienta la fuerza eléctrica de otra o de una distribución de ellas no es necesario que estén en contacto. Es lo que se llama fuerza de **“acción a distancia”**. Otro ejemplo es la fuerza gravitatoria.

Una carga (sistema de cargas) modifica las propiedades del espacio que la rodea, cualquier carga que acerquemos a esta región siente su acción atractiva o repulsiva. A esta región se le llama **“campo eléctrico”.**

a) Campo eléctrico creado por una carga puntual

El siguiente paso es buscar la magnitud vectorial que describe dicho campo, esto es que exprese como es esa perturbación en cada punto del espacio que rodea una carga:

Campo creado por Q_1:

La fuerza eléctrica que experimenta Q_2 debido a Q_1 es, $\vec{F} = Q_2 K \frac{Q_1}{r^2}\vec{u}$ si en lugar de Q_2 colocamos otra carga hay una parte de la expresión que no cambia, esa parte es la que elegimos para definir matemáticamente el campo eléctrico que crea Q_1 y lo llamamos vector campo eléctrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} = K \frac{Q_1}{r^2}\vec{u}$$

$$\vec{F} = Q_i \vec{E}$$

La introducción de este vector permite definir una magnitud vectorial que varía punto a punto y que sólo depende de las cargas que crean ese campo. De este modo se consigue dotar a cada punto del espacio de una propiedad vectorial tal que el producto del valor de una carga situada en dicho punto por el valor de dicho vector en ese punto proporciona la fuerza que experimenta dicha carga.

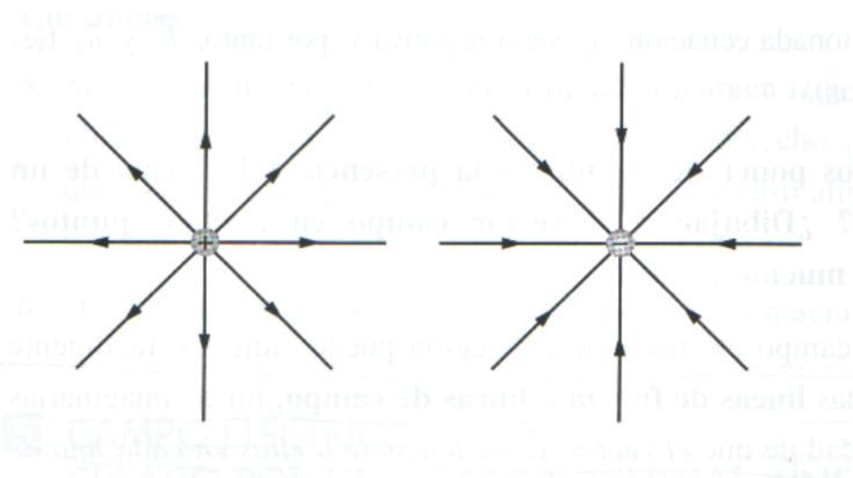
En este sentido el campo eléctrico es una magnitud vectorial que puede definirse como la fuerza por unidad de carga y son unidades son N/C:

$$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2}\vec{u} = 9\times10^9 \ \frac{N\times m^2}{C^2}\frac{Q}{r^2}\vec{u}$$

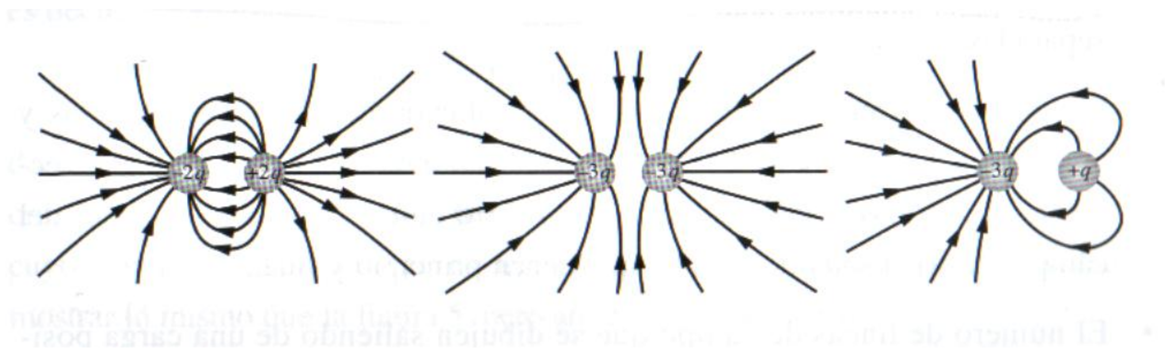
La mejor forma de dibujar el vector campo en un punto es abandonar imaginariamente en dicho punto la unidad de carga positiva: la dirección y sentido de la fuerza que actúe sobre ella indica la dirección y sentido del vector campo eléctrico.

Por otro lado, para el campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales sigue siendo válido el **Principio de superposición** enunciado para la ley de Coulomb.

La presencia de un campo eléctrico en una región puede indicarse fácilmente dibujando las llamadas **líneas de campo o líneas de fuerzas,** líneas que tienen la propiedad de que el vector campo eléctrico es tangente a ellas en cada uno de sus puntos. Estás líneas muestran la dirección y sentido de la fuerza ejercida por unidad de carga por la distribución sobre una carga testigo positiva. Las líneas de campo de una sola carga puntual son radiales apuntando hacia fuera si la carga es positiva y hacia dentro si la carga es negativa. En la figura pueden observarse las líneas de campo cuando el campo lo crea una carga puntual positiva o una carga puntual negativa:

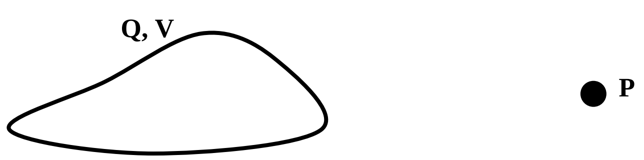


El número de líneas de campo que se dibujen saliendo de una carga positiva y entrando en una negativa es proporcional al valor absoluto de la carga. Además, el campo es intenso cuando las líneas están muy próximas entre sí y débil si están muy separadas. Por ello, a medida que nos alejamos de una carga puntual, el campo eléctrico se debilita y las líneas de campo se separan. En la figura se puede apreciar las líneas de campo que corresponden a los campos eléctricos creados por dos cargas opuestas, por dos cargas del mismo signo y por dos cargas de distinto signo y diferente valor absoluto:



b) Campo eléctrico creado por una distribución continua de carga

Hasta ahora hemos calculado fuerzas y campos eléctricos solo para cargas puntuales. Se nos plantea ahora el siguiente problema: cálculo del campo eléctrico creado por un cuerpo de carga eléctrica Q y volumen V en un punto P.



$\vec{E}$????

Para este cálculo, dividimos el cuerpo con carga Q y volumen V en elementos muy pequeños (infinitesimales) tales que podamos considerarlos como cargas puntuales (cada elemento tienen un volumen dV y una carga dQ). Calculamos el campo eléctrico debido a este elemento usando la expresión definida anteriormente. El campo así calculado es el campo solo creado por un elemento infinitesimal y lo llamamos $d\vec{E}$. El campo total producido por toda la distribución de carga se obtiene sumando las contribuciones infinitesimales (principio de superposición), esto es, integrando:

$$\int d\vec{E} = \int_V K \frac{dQ}{r^2}\vec{u}$$

Para calcular el campo producido por las distribuciones de carga se puede hacer uso al igual que en el cálculo de momentos de inercia y centro de masas de las densidades volumétrica, lineal y superficial de carga.

4.1.4. Diferencia de potencial. Potencial eléctrico.

a) Diferencia de potencial

Vamos a trasladar al caso del campo eléctrico las nociones sobre campos escalares y campos vectoriales vistos en el primer tema del programa. El campo eléctrico $\vec{E}$ es el vector gradiente cambiado de signo del campo escalar potencial eléctrico V. De esta manera conocido el potencial eléctrico en cada punto del espacio el campo eléctrico viene determinado por la expresión:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\right) = -gradV$$

Por el apartado anterior, tenemos la expresión que nos permite calcular el campo eléctrico creado por una determinada distribución de cargas y sin embargo no conocemos la expresión del potencial eléctrico. Conocida la expresión que permite determinar $\vec{E}$ es posible obtener la que determina el valor del potencial eléctrico *V* en cada punto recordando las propiedades de la circulación de un campo vectorial entre dos puntos. Si dicho campo vectorial es $\vec{E}$, la circulación de $\vec{E}$ entre dos puntos A y B se calcula mediante la expresión:

$$C_{A\to B} = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

Dado que el campo vectorial $\vec{E}$ es el gradiente de un campo escalar, es por tanto, un campo conservativo, que verifica las siguientes propiedades:

1) la circulación a lo largo de un camino cerrado es cero: $C = \oint \vec{E} \bullet d\vec{r}$
2) la circulación para ir desde *A* hasta *B* es independiente de la trayectoria elegida
3) la circulación de $\vec{E}$ (campo vectorial) es igual a la variación del potencial eléctrico (campo escalar) entre dichos puntos:

$$C_{A\to B} = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{r} = \int_A^B (-gradV) \bullet d\vec{r} = -\int_A^B gradV \bullet d\vec{r} = -[V(B) - V(A)] \Rightarrow$$

$$V(B)-V(A)=-\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{r}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{F}=q\vec{E}$, si multiplicamos ambos miembros de la expresión anterior por q es fácil intuir el significado de dicha expresión:

$$q\cdot(V(B)-V(A))=-\int_A^B q\vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{r}=W(A\rightarrow B)$$

es decir, ***la diferencia de potencial representa el trabajo por unidad de carga para trasladar una carga del primer punto al segundo del campo eléctrico.*** La unidad en la que se mide el potencial eléctrico es el J/C o Voltio.

Anteriormente hemos estudiado la representación de un campo mediante líneas de fuerza o líneas de campo. Una representación alternativa es la de utilizar las llamadas **superficies equipotenciales**, que son el lugar geométrico de los puntos del campo que están a un mismo potencial, es decir, en estas superficies $V=cte$. Las superficies equipotenciales tienen dos importantes propiedades que conviene destacar:

1. El trabajo realizado para desplazar una carga entre dos puntos de una superficie equipotencial es nulo.
2. Las líneas de campo son perpendiculares en cada punto a las superficies equipotenciales. En efecto si el potencial es constante, $V(B)-V(A)=-\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{r}=0$, entonces $\vec{E}\bullet d\vec{r}=0$ y el vector $\vec{E}$ debe ser perpendicular a cualquier desplazamiento $d\vec{r}$.

b) Potencial eléctrico

Hasta ahora hemos hablando de diferencia de potencial al ir de un punto a otro, pero también podemos definir potencial eléctrico en un punto. Para ello elegimos un punto de referencia al que le podamos asignar potencial cero de igual manera que para hablar de energía potencial gravitatoria es escribirla como *mgh* elegimos un punto al que le asignamos energía potencial cero que es la superficie de la tierra. No obstante, dicho punto no es arbitrario sino que se elige un punto al que de modo razonable se le pueda asignar un valor nulo. Para definir dicho punto, calculamos el trabajo necesario por unidad de carga para trasladar una carga en el campo creado por una carga puntual de valor Q:

El campo eléctrico que crea una carga puntual es $\vec{E}=K\dfrac{Q}{r^2}\vec{u}$ y dado que es un campo conservativo, y el resultado es independiente de la trayectoria nos vamos a desplazar para ir de A a B a lo largo de una línea de campo de manera que $\vec{E}\|d\vec{r}$ y el producto escalar de la integral que nos da el trabajo eléctrico por unidad de carga pasa a ser un producto de módulos:

$$V(B)-V(A)=-\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_A^B K\frac{Q}{r^2}\,dr=-KQ\int_A^B\frac{dr}{r^2}=KQ\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

siendo r_A y r_B la distancia a la carga *Q* de los puntos *A* y *B* respectivamente.

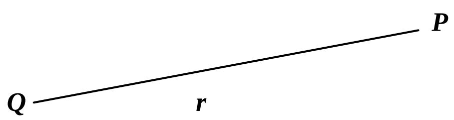
Según la expresión podríamos definir el potencial en potencial en el punto *B* debido a la carga *Q* como $V = \frac{KQ}{r_B}$ si hacemos cero el potencial en el punto *A*. ¿Dónde debería estar el punto *A* para que de manera razonable el potencial fuese nulo en dicho punto? Al decaer la expresión con la distancia, *A* debería escogerse en el infinito. Luego a partir de ahora hablaremos de potencial en un punto tomando como origen de potenciales el infinito. Si no se trata de una carga puntual la expresión general del potencial eléctrico en un punto debido a una distribución continua de carga es:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

Por tanto, el potencial eléctrico en un punto se define como el trabajo que debe realizar contra el campo (por una fuerza externa) para trasladar la unidad de carga positiva desde el infinito hasta dicho punto del campo eléctrico.

En este sentido, para calcular el potencial en un punto debido a un sistema de cargas puntuales sigue siendo válido el **Principio de Superposición**: se calcula el potencial eléctrico que en dicho punto crea cada una de las cargas y se suma. Si lo que tenemos es una cuerpo extenso y cargado, calculamos el potencial eléctrico en un punto debido a cada elemento infinitesimal de carga *dq* y sumamos a todos los elementos en que hemos dividido dicha distribución de carga: $V = \int_Q \frac{Kdq}{r}$.

Por otro lado, a partir de la definición de potencial eléctrico en un punto para calcular el trabajo eléctrico realizado por el campo basta multiplicar dicha expresión por el valor de la carga que se desplaza desde el infinito hasta dicho punto. Dicho trabajo puede tener signo positivo y negativo, veamos como se interpreta el signo:



El potencial eléctrico debido al campo creado por la carga *Q* en el punto *P* situado a una distancia *r* de la carga vale $V = \frac{KQ}{r}$. Suponiendo que la carga *Q* que crea el campo es positiva, el signo del trabajo eléctrico calculado dependerá del signo de la carga *q* que trasladamos desde infinito hasta dicho punto *P* :

Si trasladamos una carga q positiva: $W = \frac{KQ}{r} q \geq 0$ El trabajo se realiza en contra de las fuerzas del campo, si dejamos libre la carga *q* tendería a alejarse de la carga *Q* que crea el campo, si queremos acercarlas es necesario realizar un trabajo eléctrico venciendo la fuerza eléctrica de repulsión entre ellas.

Si trasladamos una carga q negativa: $W = \frac{-KQ}{r} q \leq 0$ El trabajo lo realizan las propias fuerzas del campo, si dejamos libre la carga *q* tendería a acercarse a la carga *Q* debido a la fuerza eléctrica atractiva que existe entre ambas.

Por tanto, un valor positivo en el trabajo eléctrico en Electrostática significa que el trabajo se realiza en contra o para vencer las fuerzas del campo, mientras que un valor negativo significa que el trabajo lo realizan las propias fuerzas del campo.

4.1.5. Flujo de un campo eléctrico. Ley de Gauss.

El flujo de una magnitud vectorial $\vec{a}$ a través de una superficie abierta es proporcional al número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie, y se calcula mediante la expresión:

$$\phi = \int_S \vec{a} \bullet d\vec{s}$$

Si la superficie es cerrada (engloba un volumen) el flujo es proporcional al número de líneas de campo que salen de dicha superficie cerrada menos el número de líneas que entran. En este sentido el flujo neto es positivo cuando hay más líneas de campo que salen y es negativo cuando hay más líneas de campo que entran. En este caso para expresar el flujo se emplea la siguiente notación:

$$\phi = \oint_S \vec{a} \bullet d\vec{s}$$

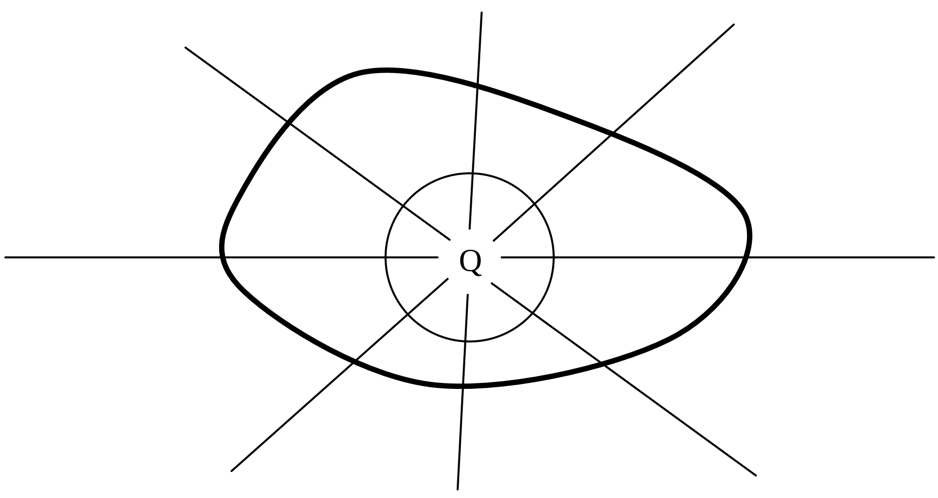
En el caso en que el campo vectorial $\vec{a}$ sea el campo eléctrico $\vec{E}$ tenemos el flujo del campo eléctrico a través de una superficie *S*:

Superficie abierta: $$\phi = \int_S \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Superficie cerrada: $$\phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

y se interpreta como el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie abierta o como el número de líneas que salen menos el número de líneas que entran en una superficie cerrada respectivamente. Las unidades del flujo eléctrico son $\frac{N}{C} \times m^2$.

Ley de Gauss: la ley de Gauss es una ley fundamental del electromagnetismo y nos habla del flujo eléctrico a través de una superficie cerrada. Supongamos una carga puntual *Q* situada en el interior de una superficie cerrada de forma arbitraria:



Se trata de calcular el flujo eléctrico que atraviesa dicha superficie debido al campo eléctrico creado por la carga puntual. Para ello, y dado que se trata de una superficie cerrada debemos usar la expresión:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}$$

Si el flujo eléctrico es el número de líneas de campo que atraviesan la superficie, obtenemos el mismo resultado si calculamos el flujo eléctrico a través de la superficie esférica que rodea la carga ya que cualquier línea de campo atraviesa ambas superficies. Sin embargo, el cálculo de la integral del flujo eléctrico a través de la superficie esférica es mucho más sencillo:

1) El producto escalar se reduce a producto de módulos porque en cada elemento de superficie que consideremos sobre la esfera los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{s}$ son paralelos.
2) El módulo del campo eléctrico creado por una carga puntual solo depende de la distancia entre la carga y el punto, por tanto tiene el mismo valor en todos los puntos de la esfera. Por tanto, se puede tratar como una constante y sacarlo de la integral.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oint_S E ds = E \oint_S ds$$

Sustituimos el módulo del campo eléctrico por su valor:

$$\phi = E 4\pi R^2 = K \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

La expresión matemática de la ley de Gauss queda de la siguiente manera:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

y nos dice que *el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta que encierra dicha superficie dividida por la permitividad dieléctrica del vacío.* Esta carga *Q* representa solamente la carga encerrada dentro de la superficie cerrada. Cualquier carga exterior no contribuye al flujo eléctrico ya que cualquier línea de campo que entra a través de la superficie cerrada también sale, por tanto su contribución al flujo total (número de líneas de flujo que salen menos flujo de líneas que entran) es nula.

La ley de Gauss se cumple cualquiera que sea la distribución de carga y cualquiera que sea la forma de la superficie cerrada. Si, independientemente de la complejidad matemática, calculásemos la integral del flujo eléctrico a través de una superficie cualquiera siempre obtendríamos como resultado final $\frac{Q}{\varepsilon_0}$. La ventaja de la ley de Gauss reside en que es útil para el cálculo del campo eléctrico que crean distribuciones de carga con un alto grado de simetría. Una simetría suficiente para que E lo podamos sacar fuera de la integral y pueda ser despejado. Para poder aplicar la ley de Gauss es necesario conocer previamente algo sobre la simetría del campo creado por la distribución de carga. En este sentido, la ley de Gauss solo permite calcular el módulo del campo eléctrico, ya que su dirección y sentido tienen que ser previamente conocidos.