1. MECÁNICA GENERAL

1.5. GEOMETRÍA DE MASAS

1.5.1. Introducción

Dentro del bloque de Mecánica General estudiaremos la Dinámica del sólido rígido. La respuesta de los sólidos sometidos a acciones o fuerzas externas, no depende sólo de su masa y de su volumen, sino también de su forma esto es, de cómo está distribuida espacialmente su masa. Por ejemplo, la flexión que experimenta una viga, dependerá de su longitud y de la forma de su sección: dos vigas del mismo material e igual volumen se comportarán de modo diferente ante fuerzas idénticas. La ***Geometría de Masas*** se ocupa del cálculo y definición de aquellos parámetros que dependiendo de la distribución espacial de la masa, son importantes y permiten describir de una manera sencilla el comportamiento mecánico de los sólidos. Entre estos parámetros nosotros vamos a estudiar y aprender a calcular centros de masas y momentos de inercia.

1.5.2. Coordenadas del centro de masas o centroide

Supongamos un sistema integrado por *n* partículas de masas $m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ...m_n$ cuyas posiciones respecto a un sistema fijo de coordenadas cartesianas vienen dadas por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_i, ..., \vec{r}_n$ respectivamente. Consideremos además que $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, siendo *M* la masa total del sistema. Se llama ***centro de masas*** del sistema y se representa como CM a un punto del espacio tal que su vector de posición es:

$$\vec{R} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes cada una de las cuales corresponde a cada una de las componentes cartesianas del centro de masas:

$$\overline{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i$$

Podemos considerar un sólido como compuesto de un gran número de partículas, muy compacto, esto es, podemos suponer que su estructura es continua. Para calcular las coordenadas del centro de masas de una estructura continua se divide el cuerpo en elementos de dimensiones infinitamente pequeñas, cada uno de los cuales tiene una masa tan pequeña como *dm* y se puede considerar como una partícula. Se aplican las expresiones anteriores, pero las sumas, en este caso, de infinitos términos, se convierten en integrales:

$$\overline{X} = \frac{1}{M}\int x \cdot dm$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{M}\int y \cdot dm$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{M}\int z \cdot dm$$

Dependiendo de la geometría del sistema cuyo centro de masas estamos calculando las integrales anteriores se pueden escribir en función de las densidades másicas de la siguiente manera:

a) La masa *M* está distribuida ***uniformemente*** en un volumen *V* y *dV* es el volumen asociado a un elemento infinitesimal de masa *dm* (por ejemplo, en el caso de una esfera):

Densidad volumétrica de masa: $\rho = cte = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho \cdot dV$

$$\overline{X} = \frac{1}{M}\int x \cdot \rho \cdot dV = \frac{1}{\rho \cdot V}\int x \cdot \rho \cdot dV = \frac{\rho}{\rho \cdot V}\int x \cdot dV = \frac{1}{V}\int x \cdot dV \;;$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{V}\int y \cdot dV \;; \qquad \overline{Z} = \frac{1}{V}\int z \cdot dV$$

b) La masa *M* está distribuida ***uniformemente*** en un superficie *S* y *dS* es la superficie asociada a un elemento infinitesimal de masa *dm* (por ejemplo, en el caso de un círculo):

Densidad superficial de masa: $\sigma = cte = \frac{M}{S} = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma \cdot dS$

$$\overline{X} = \frac{1}{M}\int x \cdot \sigma \cdot dS = \frac{1}{\sigma \cdot S}\int x \cdot \sigma \cdot dS = \frac{\sigma}{\sigma \cdot S}\int x \cdot dS = \frac{1}{S}\int x \cdot dS \;;$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{S}\int y \cdot dS \;; \qquad \overline{Z} = \frac{1}{S}\int z \cdot dS$$

c) La masa *M* está distribuida ***uniformemente*** en una longitud *L* y *dL* es la longitud asociada a un elemento infinitesimal de masa *dm* (por ejemplo, en el caso de una varilla):

Densidad lineal de masa: $\lambda = cte = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dL} \Rightarrow dm = \lambda \cdot dL$

$$\overline{X} = \frac{1}{M}\int x \cdot \lambda \cdot dL = \frac{1}{\lambda \cdot L}\int x \cdot \lambda \cdot dL = \frac{\lambda}{\lambda \cdot L}\int x \cdot dL = \frac{1}{L}\int x \cdot dL \;;$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{L}\int y \cdot dL \;; \quad \overline{Z} = \frac{1}{L}\int z \cdot dL$$

De las expresiones se deduce que cuando trabajemos en dos dimensiones la componente z será nula.

Para un determinado sistema de partículas el valor de $\vec{R}$, esto es, las coordenadas del centro de masas dependen del sistema de ejes coordenados que se elija. Sin embargo, la posición del centro de masas dentro del sistema es independiente de tal elección, pues viene determinada solamente por las masas de las partículas y su distribución en el espacio.

Por otro lado, si existe un punto, eje, o plano de simetría en el sistema, el centro de masas estará en él. Si existen varios ejes de simetría estarán en el punto donde éstos se corten. Esto se puede entender fácilmente analizando donde estaría localizado el centro de masas en los casos de una semicircunferencia, una circunferencia y una esfera. En este sentido, en la resolución de ejercicios la primera característica a observar del sólido serán sus ejes de simetría.

El ***centro de gravedad*** de un sistema es el punto de aplicación del peso de sus partículas. El centro de masas y el centro de gravedad coinciden en el caso de que la aceleración de la gravedad sea la misma para todas las partes del sistema, lo cual sucede cuando el tamaño del cuerpo es reducido. En general, nosotros hablaremos indistintamente de centro de gravedad o centro de masas y utilizaremos las mismas fórmulas para su determinación.

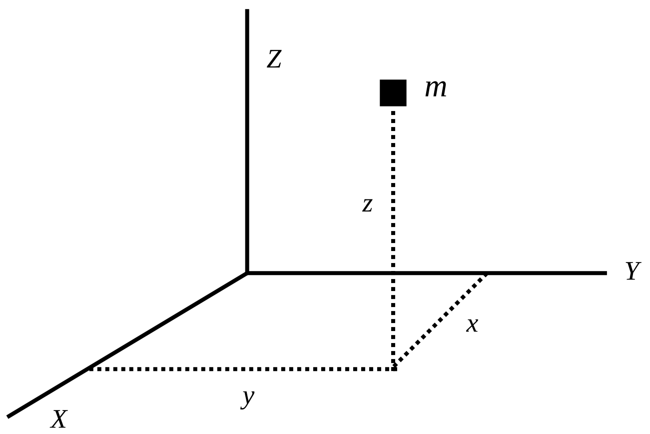
1.5.3. Momentos de inercia

En la descripción del movimiento de rotación de un sistema de puntos materiales o de un sólido rígido aparece un parámetro muy importante que es el ***momento de inercia*** y que por tanto, utilizaremos muy a menudo cuando estudiemos la Dinámica del punto y del sólido rígido. Discutimos en este apartado solo las técnicas para calcular esta cantidad:

Dado un ***sistema de puntos materiales***, se llama ***momento de inercia*** del sistema respecto a un plano, eje o un punto a la suma de los productos obtenidos multiplicando la masa *m* de cada punto material por los cuadrados de sus distancias al plano, al eje o al punto respectivamente. Si $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ son las masas de los *n* puntos del sistema, y $r_1, r_2, r_3 ....r_n$ son sus respectivas distancias al plano, al eje o al punto, la expresión del correspondiente momento de inercia es:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Si *x, y, z* son las coordenadas de un punto material de masa *m* respecto a un sistema de referencia cartesiano:



los momentos respecto a los tres planos coordenados *YZ, ZX* y *XY* son respectivamente:

$$I_{1(YZ)} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 ; \qquad I_{2(ZX)} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 ; \qquad I_{3(XY)} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes *X*, *Y* y *Z*:

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)\ ; \qquad I_Y = \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i^2 + x_i^2)\ ; \qquad I_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Por último, el momento de inercia respecto al origen de coordenadas es:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

De las expresiones anteriores se deducen las propiedades siguientes:

- El momento de inercia respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos planos perpendiculares que intersectan en dicho eje:

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 = I_{ZX} + I_{XY}$$

- El momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a tres planos perpendiculares entre sí que pasan por el punto:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 = I_{YZ} + I_{ZX} + I_{XY}$$

Y por la propiedad anterior es igual a la semisuma de los tres ejes ortogonales correspondientes:

$$I_O = I_{YZ} + I_{ZX} + I_{XY} = \frac{1}{2} I_{YZ} + \frac{1}{2} I_{ZX} + \frac{1}{2} I_{XY} + \frac{1}{2} I_{YZ} + \frac{1}{2} I_{ZX} + \frac{1}{2} I_{XY} = \frac{1}{2} I_X + \frac{1}{2} I_Y + \frac{1}{2} I_Z \Rightarrow$$

$$I_O = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z)$$

Si el cuerpo esta compuesto de un gran número de partículas, muy compacto, podemos suponer que tiene una estructura continua. Para calcular el momento de inercia de una estructura continua se divide el cuerpo en elementos de dimensiones infinitamente pequeñas, cada uno de los cuales tiene una masa tan pequeña como *dm* y se puede considerar como una partícula. Se aplican las expresiones anteriores, pero las sumas, en este caso, de infinitos términos, se convierten en integrales:

$$I = \int_V r^2 dm$$

Los momentos de inercia de un cuerpo continuo respecto a los planos coordenados:

$$I_1 = \int_V x^2 dm\,; \qquad I_2 = \int_V y^2 dm\,; \qquad I_3 = \int_V z^2 dm$$

Respecto a los ejes coordenados:

$$I_X = \int_V (y^2 + z^2) dm\,; \qquad I_Y = \int_V (x^2 + z^2) dm\,; \qquad I_Z = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

y respecto al origen de coordenadas:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Dependiendo de la geometría del sistema cuyo momento de inercia calculemos *dm* puede ser escrito en función de las densidades ρ, σ, λ de igual manera que hemos visto en el cálculo de centro de masas.

Si se conoce el momento de un sistema o sólido respecto a un eje que pasa por su centro de masas, se puede determinar el momento de inercia del sistema respecto a un eje cualquiera paralelo al primero mediante el ***teorema de Steiner***:

"El momento de inercia respecto a un eje es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia que separa dichos ejes"

Matemáticamente el teorema de Steiner se expresa:

$$I_X = I_{X'CM} + Mr^2$$

De manera análoga se tiene que *"el momento de inercia respecto a un plano (punto) es igual al momento de inercia respecto a un plano (punto) que pasa por el centro de masas, más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia que separa dichos planos (puntos)"*.

1.5.4. Productos de inercia

Dado un sistema de *n* puntos materiales, se denominan ***productos de inercia*** respecto a los ejes *X*, *Y* y *Z* respectivamente a los productos:

$$I_{YZ} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i\,; \qquad I_{ZX} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i\,; \qquad I_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

Lógicamente, $I_{YZ} = I_{ZY}$; $I_{XZ} = I_{ZX}$; $I_{XY} = I_{YX}$. Y en el caso de cuerpos continuos se transforman en:

$$I_{YZ} = \int yzdm\,; \qquad I_{ZX} = \int xzdm\,; \qquad I_{XY} = \int yxdm$$

Observaciones al caso particular de cálculos de momentos de inercia en dos dimensiones:

Si se trata de un sistema discreto, los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$I_X = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \,; \qquad I_Y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

El momento de inercia respecto al origen de coordenadas, que coincide con el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano XY y que intersecta con el plano XY en el origen de coordenadas (a este eje se le suele llamar ***eje polar***) viene dado por la siguiente expresión:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 = I_X + I_Y$$

De esta expresión se deduce que en el caso dos dimensiones, *"el momento de inercia respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes ortogonales que intersectan en dicho punto."*

Para el caso en que tengamos un sistema continuo, el momento de inercia respecto a los ejes coordenados vienen dados por las siguientes integrales:

$$I_X = \int_S y^2 dm \,; \qquad I_Y = \int_S x^2 dm$$

y respecto al origen de coordenadas o respecto al eje polar se calculará mediante la siguiente integral:

$$I_O = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

Respecto a los productos de inercia, cuando se trabaja en dos dimensiones el único producto de inercia no nulo es el I_{XY} y I_{YX} que, lógicamente son iguales. Su cálculo se realiza mediante el siguiente sumatorio o integral según se trate de un sistema discreto o continuo respectivamente:

$$I_{XY} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \,; \qquad I_{XY} = \int yx dm$$

1.5.5. Cálculo del momento de inercia respecto de una recta cualquiera

Para calcular el momento de inercia de un sólido respecto de una recta cualquiera primero se calcula el momento de inercia respecto de una recta paralela a la recta dada y que pase por el origen O del sistema de referencia del sólido. Dicho momento de inercia se calcula mediante la expresión:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \right) \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) - (\cos \alpha x_i + \cos \beta y_i + \cos \gamma z_i)^2 \right]$$

siendo $(\cos\beta, \cos\alpha, \cos\gamma)$ las componentes de un vector unitario $\vec{u}$ a lo largo de la dirección de la recta que pasa por el origen. Si desarrollamos los productos que aparecen en dicha expresión podemos escribirla en función de los momentos y productos de inercia de la siguiente manera:

$$I_0 = \cos^2\alpha I_X + \cos^2\beta I_Y + \cos^2\gamma I_Z - 2(\cos\alpha\cos\beta I_{XY} + \cos\alpha\cos\gamma I_{XZ} + \cos\beta\cos\gamma I_{YZ})$$

Y esta expresión puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$I_0 = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{bmatrix}$$

Calculado el momento de inercia I_0 según esta expresión el momento de inercia respecto a la recta original paralela a la que pasa por el origen del sistema de referencia se calcula utilizando el Teorema de Steiner.

Esta expresión nos demuestra que dado un sólido rígido y un sistema de referencia el momento de inercia respecto de una recta cualquiera queda determinado conociendo los momentos de inercia respecto de los ejes del sistema de referencia I_X, I_Y, I_Z y los productos de inercia I_{XY}, I_{YZ}, I_{XZ}. Se demuestra que las componentes de la matriz que aparece en dicha expresión se transforman según la expresión ya vista $T' = R \cdot T \cdot R^t$, por tanto constituye la representación matricial de un tensor de orden dos, el ***tensor de inercia:***

$$\|I\| = \begin{bmatrix} I_X & -I_{XY} & -I_{XZ} \\ -I_{XY} & I_Y & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_Z \end{bmatrix}$$

Por tratarse de un tensor simétrico, en cada punto del sólido existe un sistema de referencia de tres ejes perpendiculares entre sí, los ejes principales de inercia, en los que la matriz que representa el tensor es diagonal. Los elementos de la diagonal principal constituyen los momentos de inercia respecto de los ejes principales y su valor es real.

.