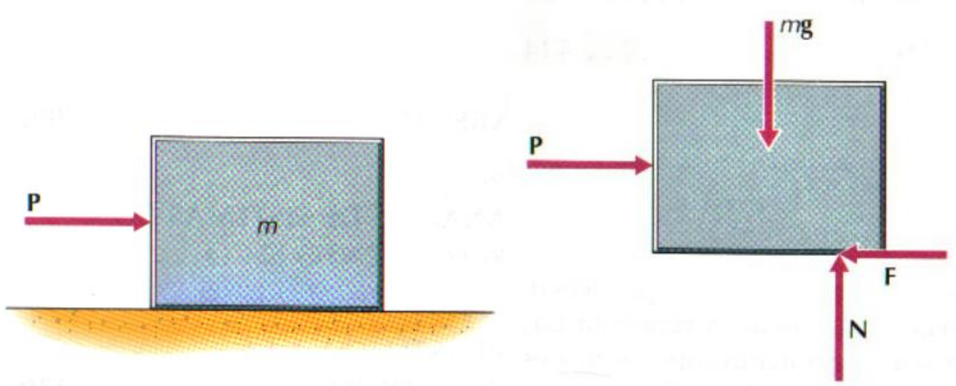
1.9. ESTÁTICA CON ROZAMIENTO

Hemos estudiado el equilibrio de los cuerpos situados libremente en el espacio, o cuando estaban unidos mediante enlaces a otros cuerpos o a bases fijas. En todos estos casos las fuerzas que se han considerado se ejercían entre superficies perfectamente lisas. Cuando las superficies de contacto son perfectamente lisas, las únicas acciones mutuas entre los cuerpos son las fuerzas normales a dichas superficies.

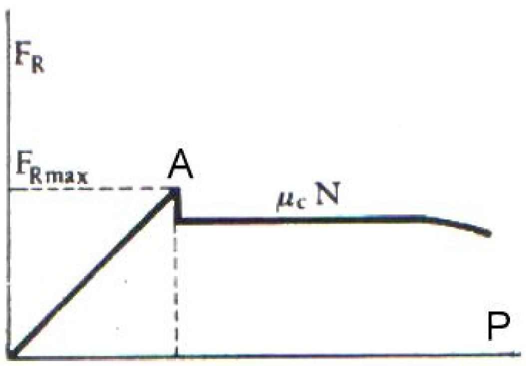
Las superficies perfectamente lisas o exentas de rozamiento constituyen un modelo útil para muchas situaciones. Ahora bien, debido a la rugosidad que presentan las superficies en el contacto entre superficies reales además de la reacción normal siempre están presentes ***fuerzas de rozamiento***. Las fuerzas de rozamiento se ejercen de manera que se oponen a la tendencia de las superficies en contacto a deslizar una respecto a otra y su valor depende de varias cosas entre las que se cuenta el tipo de materiales de contacto.

1.9.1. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO

Para estudiar el comportamiento de las fuerzas de rozamiento vamos a considerar un bloque sólido de masa *m* que descansa sobre una superficie horizontal rugosa y se halla sometido a una fuerza horizontal *P*.



Dibujamos una gráfica en la que en el eje horizontal representamos la fuerza *P* aplicada sobre el bloque y en el eje vertical la fuerza de rozamiento:



Desde el origen de la gráfica hasta el punto a la fuerza P aplicada sobre el bloque no es suficientemente grande como para moverlo. Estamos en una situación de equilibrio y se cumple que $F_R = P$, entonces al ir aumentando la fuerza P aumenta también el rozamiento cumpliéndose siempre la condición de equilibrio. Ahora bien la fuerza de rozamiento no puede aumentar indefinidamente y llega a alcanzar un valor máximo $F_{R\max}$. El valor de este rozamiento límite es $\mu_S N$ y la constante de proporcionalidad recibe el nombre de ***coeficiente de rozamiento estático*** y depende de los tipos de materiales en contacto. También se observa que el coeficiente de rozamiento estático es relativamente independiente de la fuerza normal y del área de la superficie de contacto.

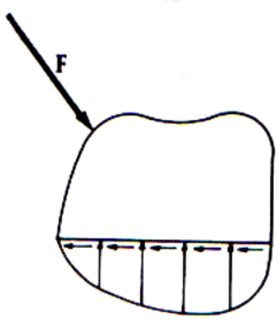
Entonces cuando la fuerza P crece hasta el valor máximo de la fuerza de rozamiento, el rozamiento ya no va a poder crecer más y no va a poder proporcionar la fuerza necesaria para mantener el equilibrio. Se dice entonces que el ***deslizamiento es inminente*** ya que basta aumentar el valor de P un poquito por encima del punto A para que el bloque comience a deslizar en la dirección y sentido de la fuerza P. Cuando empieza a deslizar la fuerza de rozamiento sigue siendo proporcional a la normal pero el coeficiente de proporcionalidad es ahora μ_C , esto es $F_R = \mu_C N$, ***el coeficiente de rozamiento cinético*** que es un 20 y 25 % menor que el coeficiente de rozamiento estático para la misma superficie.

A partir de aquí el bloque deslizará con aceleración creciente a medida que aumenta el valor de P mientras que la fuerza de rozamiento, ahora fuerza de rozamiento cinético se mantiene aproximadamente constante e igual a $\mu_C N$ **.**

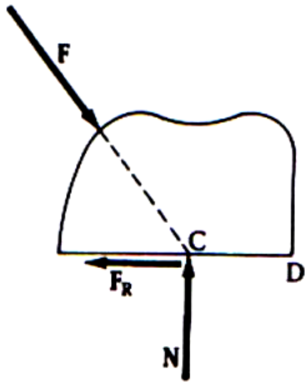
1.9.2. PROBLEMAS DE ROZAMIENTO

Los problemas de rozamiento son similares a los tratados en los apartados anteriores con la diferencia de que ahora también debe incluirse la fuerza de rozamiento en el diagrama de fuerzas y su valor se determinará mediante las ecuaciones de equilibrio del sólido. Ahora la fuerza normal no tiene por qué dibujarse pasando por el centro del cuerpo. Su situación se determina utilizando el equilibrio de momentos. Para entender esto supongamos el siguiente ejemplo:

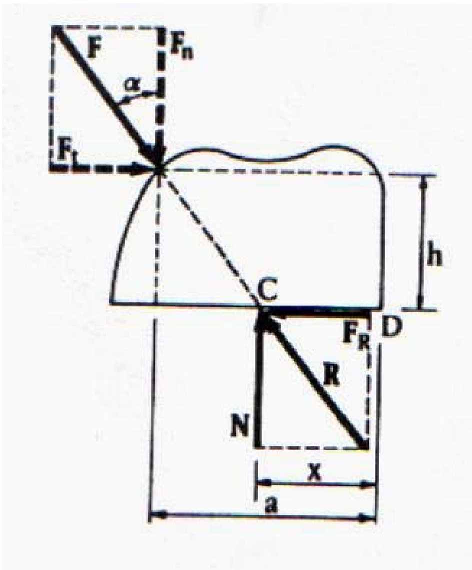
Sean un cuerpo A supuestamente en equilibrio y que está en contacto con una superficie plana. Sobre el cuerpo A estará en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas externas cuya resultante es la fuerza *F* y a la reacción del cuerpo de la superficie plana formada por dos sistemas de fuerzas distribuidas uno de los cuales actúa normalmente a la superficie de contacto y el otro tangencialmente a dicha superficie:



La resultante del primer sistema es la componente normal *N* de la reacción del cuerpo mientras que la resultante del segundo sistema es la fuerza de rozamiento de deslizamiento F_R :



Si el sistema de fuerzas F, N y F_R está en equilibrio la resultante de la reacción de la superficie sobre el cuerpo A debe ser una fuerza igual y directamente opuesta a F. Gráficamente esta situación obliga a que el punto de aplicación de N sea el punto C para que la línea de acción de la fuerza F y de la resultante R de la reacción coincidan y estas fuerzas se anulen:



De las ecuaciones de equilibrio se deducen las siguientes expresiones donde los momentos se han tomado respecto al punto D:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \Rightarrow F sen\alpha - F_R = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \Rightarrow F \cos\alpha - N = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_D = 0 \Rightarrow Fa\cos\alpha - Fhsen\alpha + Nx = 0$$

Estas tres ecuaciones determinan la magnitud y posición de la componente normal N y la magnitud de F_R. Si el sistema está en equilibrio la normal estará situada dentro del cuerpo y el valor de F_R obtenido debe ser menor que $F_{R\max} = \mu_S N$.

A partir de estas ecuaciones también es posible deducir el valor de F y su ángulo de aplicación necesario para provocar la pérdida de equilibrio del cuerpo A, ***esta pérdida de equilibrio puede ser por deslizamiento o por vuelco.***

1. **Pérdida de equilibrio por deslizamiento:**

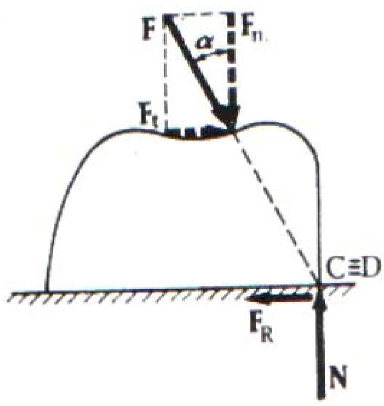
El ***deslizamiento del cuerpo A será inminente***, cuando la componente de F a lo largo del eje X sea igual a $F_{R\max} = \mu_S N$, basta que la componente paralela al eje X aumente un poquito más para que el cuerpo A comience a moverse paralelamente a este eje. La condición de pérdida de equilibrio inminente por deslizamiento se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \Rightarrow Fsen\alpha - \mu_S N = 0 \Rightarrow Fsen\alpha = \mu_S N$$

De esta condición se deduce que para conseguir tal condición se puede aumentar el valor de la fuerza externa aplicada F manteniendo constante el ángulo de aplicación, o manteniendo la magnitud de F aumentar el ángulo α .

2. **Pérdida de equilibrio por vuelco:**

La condición $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_D = 0 \Rightarrow Fhsen\alpha - Fa\cos\alpha + Nx = 0$ recoge la pérdida de equilibrio por vuelco. Es fácil observar que si aumentamos el valor del ángulo α el punto de aplicación *C* de la componente normal N se desplaza hacia la derecha. La pérdida de equilibrio se producirá por vuelco si el ángulo α de aplicación de *F* es tal que su línea de acción no corte a la superficie de contacto, ya que entonces F no podría ser equilibrada por las componentes N y F_R de la reacción. En este caso no sería nula la suma de los momentos respecto a *D* de todas la fuerzas aplicadas al cuerpo *A* y éste volcaría alrededor de *D*.



El valor del ángulo α mínimo para que la pérdida de ***equilibrio sea inminente por vuelco alrededor de D*** se obtiene suponiendo que en la ecuación de momentos N está aplicada en el punto D:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_D = 0 \Rightarrow Fhsen\alpha - Fa\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = \frac{a}{h}$$

En este sentido si manteniendo el módulo de F constante variamos el valor del ángulo α la pérdida de equilibrio del cuerpo A se producirá por deslizamiento o por vuelco dependiendo de lo que se consiga antes, que la componente horizontal de la fuerza F alcance el valor máximo de la fuerza de rozamiento o que el punto de aplicación C de la componente normal N se desplace hasta el extremo D del bloque.

1.9.3. MÉTODOS DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Hasta ahora establecíamos las ecuaciones estáticas como suma de fuerzas y de momentos igualados a cero, presentándose la problemática de aparecer mezcladas las incógnitas de posición con las de reacción. Es decir, para calcular la posición de equilibrio de un sistema material nos aparecían unas reacciones desconocidas que, en algunos casos, incluso no era preciso determinar. Se trata de plantear, un estudio analítico, y eso lo va a permitir el procedimiento del teorema de los trabajos virtuales, que permita determinar exclusivamente la configuración de equilibrio de un sistema sin que ello conduzca de forma obligada a la resolución de las reacciones en los vínculos o enlaces.

Para conseguir determinar la posición de equilibrio sin tener en cuenta las reacciones en los enlaces o vínculos, deberán eliminarse éstas mediante un procedimiento de cálculo gracias al cual simplemente no aparezcan, este nuevo método está basado en el concepto de trabajo y se llama ***método de los desplazamientos virtuales o método de los trabajos virtuales***. Este método está basado en el hecho de que un sistema está en equilibrio si no hay desplazamiento, esto es, si el trabajo producido por las fuerzas aplicadas al sistema es nulo.

Al estudiar el equilibrio de un cuerpo por el método de los trabajos virtuales es necesario introducir desplazamientos ficticios a los que se llama ***desplazamientos virtuales***. El desplazamiento virtual infinitesimal se representará por la diferencial δs en vez de por ds. El trabajo que efectúa una fuerza F que se ejerce sobre el cuerpo durante un desplazamiento virtual recibe el nombre de trabajo virtual.

Consideremos un sistema mecánico en equilibrio sobre el que actúa un sistema de fuerzas e imaginemos que los cuerpos del sistema sufren desplazamientos virtuales infinitesimales, compatibles con los enlaces y fuerzas aplicadas al sistema y se calcular el trabajo virtual efectuado por el sistema de fuerzas. El principio del trabajo virtual se puede enunciar de la siguiente manera:

Si el trabajo virtual efectuado por todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre un punto, un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos conectados mediante conexiones o apoyos ideales (sin rozamiento) es nulo para todos los desplazamientos virtuales del sistema, éste está en equilibrio.

Si el rozamiento no fuese despreciable, sería necesario incluir el "trabajo" de dichas fuerzas de rozamiento. Si los sólidos fuesen deformables, habría que tener en cuenta el trabajo de deformación.

La expresión matemática cartesiana del teorema de los trabajos virtuales es:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i l) = 0$$

siendo δx_i, δy_i y δz_i los desplazamientos virtuales a lo largo de los ejes cartesianos.